

## ДИАГНОСТИКА СВОЙСТВ СТРУКТУРИРОВАННОЙ СРЕДЫ ДЛИННЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНАМИ

УДК 532.59:517.19

В. А. Вахненко

Институт геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, 252054 Киев

Традиционно считалось, что моделирование длинноволновых процессов в неоднородных средах можно проводить в рамках однородной среды. Известно [1–3], что на акустическом уровне структуру среды для длинных волн удается учесть посредством дисперсно-диссипативных свойств однородной среды. В то же время на эволюцию длинных волн конечной амплитуды, как показывает строгий математический анализ методом асимптотического осреднения [4–6], непосредственно влияет структура среды.

В данной работе доказано, что влияние структуры на нелинейные длинноволновые возмущения так велико, что по закономерностям эволюции волнового поля удается диагностировать свойства среды.

**1. Асимптотическая осредненная модель.** Элементарными неоднородными средами, для которых может быть проанализировано влияние структуры, являются среды с регулярной структурой. Закономерности распространения длинноволновых возмущений исследуются на примере периодической среды при выравнивании напряжений и массовых скоростей на границах соседних компонентов. Предполагается, что элемент микроструктуры среды достаточно большой, так что для него применимы законы классической механики сплошной среды. Среда баротропная. В данной работе рассматриваются среды в гидродинамическом приближении без учета касательных напряжений. Периодически изменяющимися свойствами невозмущенной среды считаются удельный объем  $V = \rho^{-1}$  и скорость звука  $c$ .

Одним из методов осредненного описания сред регулярной структуры является метод асимптотического осреднения [7, 8]. Он используется для моделирования длинных волн в сжимаемых средах [4]. В отличие от известных результатов для случая плоской симметрии [4–6] выведем осредненную систему уравнений для одномерных движений любой симметрии.

Исходные уравнения одномерного неустановившегося движения — это уравнения движения для отдельного компонента, записанные в лагранжевых переменных:

$$\frac{\partial r^\nu}{\partial l^\nu} = \frac{V}{V_0}, \quad u = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + V_0 \left( \frac{r}{l} \right)^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial l} = 0. \quad (1.1)$$

Можно использовать уравнение непрерывности в альтернативной форме

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nu V_0 \frac{\partial r^{\nu-1} u}{\partial l^\nu} = 0. \quad (1.2)$$

Обозначения общепринятые. Условиями согласования являются равенства массовых скоростей, а также давлений на границах компонентов. Для каждого компонента известны

уравнения состояния

$$dp = c^2 d\rho. \quad (1.3)$$

Удобно пользоваться безразмерными переменными [9], причем запись получаемых безразмерных уравнений по виду не будет отличаться от исходных уравнений. Поэтому будем считать уравнения (1.1)–(1.3) записанными в безразмерных переменных.

Строго математически удается вывести осредненную систему уравнений для сред периодической структуры. В случае цилиндрической ( $\nu = 2$ ) и сферической ( $\nu = 3$ ) симметрии слои имеют, как полагается, соответствующую симметрию. Оказывается (это будет видно ниже), ограничение, связанное с периодичностью свойств среды, может быть снято.

Согласно асимптотическому методу осреднения [7, 8], пространственная массовая координата  $m = l^\nu/V_0$  разбивается на медленную  $s$  и быструю  $\xi$  независимые переменные:

$$m = s + \varepsilon\xi, \quad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Безразмерный период структуры  $\varepsilon = \varepsilon'/\lambda$  (отношение периода структуры  $\varepsilon'$  к длине волны  $\lambda$ ) является малым параметром. Решение для  $r$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $V$  ищется в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} r^\nu(m, t) &= (r^\nu)^{(0)}(s, t, \xi) + \varepsilon(r^\nu)^{(1)}(s, t, \xi) + \varepsilon^2(r^\nu)^{(2)}(s, t, \xi) + \dots, \\ V(m, t) &= V^{(0)}(s, t, \xi) + \varepsilon V^{(1)}(s, t, \xi) + \varepsilon^2 V^{(2)}(s, t, \xi) + \dots \end{aligned}$$

Функции  $f^{(*)}(\xi)$  полагаются однопериодическими по  $\xi$ .

Продельвая процедуру, подробно описанную для случая плоской симметрии в [5], в приближении порядка  $O(\varepsilon^{-1})$  получим

$$\frac{\partial (r^\nu)^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial ((r^\nu)^{(0)})u^{(0)}}{\partial \xi} = 0. \quad (1.4)$$

Следовательно, массовая скорость  $u^{(0)}$ , давление  $p^{(0)}$  и эйлерова координата  $(r^\nu)^{(0)}$  не зависят от быстрой переменной  $\xi$ .

Для примера запишем уравнение импульса в приближении порядка  $O(\varepsilon^0)$ :

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \nu(r^\nu)^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \nu(r^\nu)^{(1)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} + \nu(r^\nu)^{(0)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = 0. \quad (1.5)$$

Теперь применим процедуру осреднения, что возможно только в лагранжевых массовых координатах, поскольку период при этом не зависит от волнового движения. По определению  $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) d\xi$ . Здесь использовано условие нормировки  $\int_0^1 d\xi = 1$ . С одной стороны, имеем одно из искомых уравнений

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \nu(r^\nu)^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} = 0, \quad (1.6)$$

поскольку  $\langle \partial p^{(1)}/\partial \xi \rangle = 0$  в силу периодичности  $p^{(1)}$  от  $\xi$ , а с другой — получаем  $\partial p^{(1)}/\partial \xi = 0$  в результате вычитания уравнения (1.6) из уравнения (1.5). Поэтому  $p^{(1)}$  также не зависит от  $\xi$ .

Аналогично записываются остальные осредненные уравнения:

$$\frac{\partial(r^\nu)^{(0)}}{\partial s} = \langle V^{(0)} \rangle, \quad u^{(0)} = \frac{\partial r^{(0)}}{\partial t}; \quad (1.7)$$

$$d\langle V^{(0)} \rangle = -\left\langle \frac{(V^{(0)})^2}{c^2} \right\rangle dp. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.2) имеет вид

$$\frac{\partial \langle V^{(0)} \rangle}{\partial t} - \nu \frac{\partial (r^{\nu-1})^{(0)} u^{(0)}}{\partial s} = 0. \quad (1.9)$$

Независимость переменных от быстрой координаты (1.4) означает  $u^{(0)} = \langle u^{(0)} \rangle$ ,  $p^{(0)} = \langle p^{(0)} \rangle$ ,  $r^{(0)} = \langle r^{(0)} \rangle$ . В отличие от этих величин удельный объем  $\tilde{v}^{(0)}(\xi)$  — функция  $\xi$ . Система уравнений (1.6)–(1.9) интегродифференциальная. В дальнейшем ограничимся нулевым приближением по  $\varepsilon$ , верхний индекс 0 опустим.

Уравнения (1.6)–(1.9) выведены для строго периодической среды. Однако можно показать, что для сред с квазипериодической структурой уравнения (1.6)–(1.9) также будут справедливы. Действительно, давление  $p$ , массовая скорость  $u$  — постоянные величины на всем периоде структуры. На большом масштабе  $s$  действие возмущений проявляется в волновом движении среды, в то время как на микромасштабе  $\xi$  действие однородное (безволновое) на всем периоде структуры среды.

Поведение среды на микроуровне подчиняется только термодинамическим законам. На макроуровне поведение среды описывается законами волновой динамики (1.6), (1.7) для средних характеристик  $r$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\langle V \rangle$ . С математической точки зрения в нулевом приближении по  $\varepsilon$  размер периода бесконечно мал ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Это значит, что местоположение отдельных компонентов в периоде не имеет никакого значения. Система уравнений (1.6)–(1.9) не изменяется, если в элементарной ячейке менять расположение слоев или дробить эти слои. Следовательно, уравнения (1.6)–(1.9) описывают поведение любой квазипериодической (статистически-неоднородной) среды, имеющей на уровне микроструктуры одно и то же массовое содержание компонентов безотносительно к местоположению вещества по объему ячейки.

В нелинейной волне отдельные компоненты сжимаются по-разному. Структура среды меняется, что в конечном счете приводит к изменению осредненных характеристик среды, отличному от их изменения для однородной среды при таком же нагружении. В этом и проявляется структура среды на волновом движении, несмотря на то что уравнения движения (1.6), (1.7) записаны для средних величин  $r$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\langle V \rangle$ .

Как уже отмечалось в [5,6], структура влияет на распространение нелинейных длинных волн. Существование нелинейных эффектов связано с наличием члена  $\langle V^2/c^2 \rangle$  в уравнении состояния (1.8). Введение эффективной средней скорости звука по формуле

$$\tilde{c} = \sqrt{\langle V \rangle^2 \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{-1}} \quad (1.10)$$

приводит систему уравнений к традиционной записи. Очевидно, что  $\tilde{c}$  не является средней характеристикой, т. е.  $\tilde{c}^2 \neq \langle c^2 \rangle$ . Структура среды вносит определенный вклад в нелинейность. Действительно, если даже для каждого компонента скорость звука не зависит от давления ( $c \neq f(p)$ ), то в общем случае  $\tilde{c}$  — функция давления. В то же время в акустическом приближении, как отмечалось в [5, 6], поле давления и поле массовой скорости в

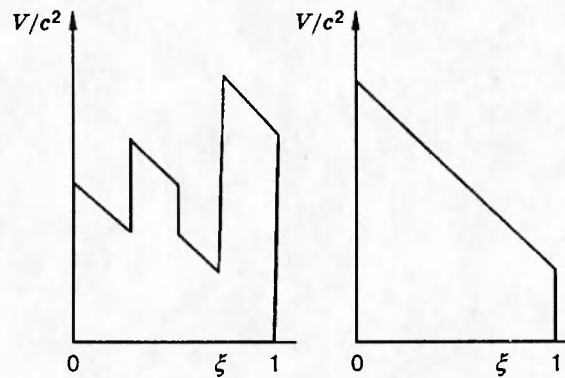


Рис. 1

периодической и однородной средах совпадают при определенных условиях согласования свойств сред.

Выделяются среды, у которых величина  $V/c^2$  не изменяется на периоде. Они ведут себя как однородные под действием волновых возмущений. Отдельные элементы структуры реагируют на изменение давления так, что относительная структура остается постоянной, т. е. отношение  $V(\xi, p)/V(\xi, p_0)$  не зависит от  $\xi$ . Осредненные величины  $\langle V \rangle$  и  $\langle V^2/c^2 \rangle$  представим в виде  $\langle V \rangle = V/c^2 \langle c^2 \rangle$ ,  $\langle V^2/c^2 \rangle = (V/c^2)^2 \langle c^2 \rangle$ . Эффективная скорость звука (1.10) в этом случае будет средней характеристикой:  $\bar{c}^2 = \langle c^2 \rangle$ , и, следовательно, вся система уравнений представима в средних переменных  $u$ ,  $p$ ,  $\langle V \rangle$ ,  $\bar{c} = \sqrt{\langle c^2 \rangle}$ . Для таких сред их структура не проявляется на нелинейном волновом движении.

**2. Диагностика среды длинными нелинейными волнами.** Влияние структуры среды на волновое поле длинных нелинейных возмущений доказано в [5, 6]. В то же время возникает вопрос: достаточно ли информации содержится в волновом поле, чтобы восстанавливать структуру среды? Выясняется, что ответ на этот вопрос положителен. Опишем метод диагностики структуры среды по закономерностям движения волн давления конечной амплитуды.

Докажем, что влияние структуры на нелинейные длинноволновые возмущения так велико, что по закономерностям эволюции поля удастся диагностировать свойства среды, а именно: можно найти зависимость  $V/c^2$  от быстрой переменной, т. е. распределение величины  $V/c^2$  на периоде структурированной среды. Рассмотрим плоские волны. В отличие от [5, 6] здесь не накладывается ограничение, связанное с требованием совпадения скоростей звука во всех компонентах.

Отметим одно важное обстоятельство. Поскольку в асимптотической осредненной модели период структуры  $\epsilon'$  бесконечно мал по отношению к длине волны  $\lambda$ , то в предложенном методе диагностики местоположение элементов структуры в периоде не удастся указать точно. Тем самым две структуры, различающиеся функциональной зависимостью  $V/c^2$  от  $\xi$  (например, как на рис. 1), одинаково влияют на движение волны. Следовательно, две такие среды невозможно различить длинными волнами. Имея в виду это ограничение, в дальнейшем для определенности будем считать, что зависимость  $V/c^2$  от быстрой эйлеровой координаты  $\zeta$  является убывающей интегрируемой взаимнооднозначной функцией на отрезке  $\zeta \in [0, 1]$ , а вне его она равна нулю. Переменная  $\zeta$  определяется соотношением  $(\partial \xi / \partial \zeta)_t = \rho(\xi)$ . Оно аналогично соотношению между обычно используемыми эйлеровой  $x$

и лагранжевой массовой  $m$  координатами  $(\partial m / \partial x)_i = \rho$ .

Воспользуемся известным фактом из теории вероятностей [10]. Функция распределения  $f(x)$  (однозначная интегрируемая положительная функция) выражается через свои центральные моменты  $\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$  с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(x) = F^{-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n i^n \frac{q^n}{n!} \right] (x). \quad (2.1)$$

Рассмотрим цепочку преобразований

$$\begin{aligned} \langle V(V/c^2)^n \rangle &= \int_0^1 V(\xi) \left( \frac{V}{c^2} \right)^n d\xi = \int_0^1 V \left( \frac{V}{c^2} \right)^n \rho d\xi = \\ &= \langle V \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{V}{c^2} \right)^n \frac{d\zeta}{d(V/c^2)} d(V/c^2) = n \langle V \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{V}{c^2} \right)^{n-1} \zeta d(V/c^2) = n \langle V \rangle \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

т. е. центральный момент функции  $\zeta$  от  $V/c^2$  выражается через  $\langle V(V/c^2)^n \rangle$ . Окончательно находим функцию, обратную искомой:

$$\zeta = F^{-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle V(Vc^{-2})^n \rangle}{(n+1)! \langle V \rangle} i^n q^n \right]. \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) для этой формулы легко вычислить, если знать функциональную зависимость  $\langle V \rangle$  от  $p$  или  $\langle V^2/c^2 \rangle$  от  $p$ . Они последовательно определяются по рекуррентному соотношению

$$\frac{d \langle V(Vc^{-2})^n \rangle}{dp} = -(n+1) \langle V(Vc^{-2})^{n+1} \rangle, \quad (2.3)$$

которое следует непосредственно из уравнения состояния; (2.3) — это основное соотношение, применяемое в новом методе диагностики, в котором определяются свойства отдельных элементов структурированной среды с помощью нелинейных длинных волн.

Использование предложенного метода связано с нахождением коэффициентов  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$  степенного ряда, их можно получать по закономерностям эволюции волновых полей. Преимущества диагностики с помощью волнового воздействия очевидны особенно для сред сложной структуры, в том числе природной среды.

Возможный способ определения функциональной зависимости  $\langle V \rangle$  от  $p$  — эксперимент по распространению ударной волны. В результате эксперимента должны находиться скорость ударной волны в лагранжевых массовых координатах  $D = ds/dt$  ( $D$ , кг/с) и/или массовая скорость  $u_1$ , а также давление  $p_1$  за ударной волной. По соотношениям на ударном разрыве

$$D = \sqrt{(p_1 - p_0) / (\langle V_0 \rangle - \langle V_1 \rangle)}, \quad u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0) (\langle V_0 \rangle - \langle V_1 \rangle)},$$

которые следуют из осредненных уравнений, вычисляется  $\langle V_1 \rangle$ . После измерения параметров ударной волны для различных давлений  $p_1$  получим зависимость  $\langle V \rangle = \langle V \rangle(p)$ . Затем применяется рекуррентная формула (2.3) для нахождения  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$  при  $n \geq 1$ .

Универсальным инструментом для определения коэффициентов  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$  можно считать автомодельную волну разрежения. Автомодельность движения волны разреже-

ния, как следует из соотношения (2.5) работы [6], дает значения скорости распространения  $ds/dt$  отдельных участков профиля волны при различных давлениях. Это определяет однозначно зависимость  $\langle V^2/c^2 \rangle = \langle V^2/c^2 \rangle(p)$ , а зависимости  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$  при  $n \geq 2$  находятся по (2.3). При давлениях, когда профиль волны разрежения имеет наибольший изгиб (см. рис. 1 в [6]), т. е. структура сильно изменяет возмущение, имеем наилучшую точность значений коэффициентов. Следовательно, в этой области давлений структура среды определяется точнее всего.

**3. Приближение диагностируемой среды слоистой средой.** Диагностика свойств структурированной среды длинными нелинейными волнами связана с нахождением величин  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$  по экспериментальным результатам. Естественно, возникает вопрос о точности описания структуры среды ограниченным рядом (2.2). Покажем, что частичная сумма ряда (2.2) приближает искомую функцию  $\zeta = \zeta(V/c^2)$  ступенчатой функцией, т. е. исходная среда будет аппроксимироваться слоистой.

Выпишем цепочку тождеств для произвольной интегрируемой функции

$$2\pi f(-x) = F[F[f(x)](q)](x) = F\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n q^n}{n!} \alpha_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \alpha_n}{n!} 2\pi(-i)^n \delta^{(n)}(x).$$

Здесь были использованы известные соотношения для преобразования Фурье [11] и (2.1). Поэтому произвольная интегрируемая функция представима в виде ряда

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \delta^{(n)}(x). \quad (3.1)$$

Рассмотрим ступенчатую функцию  $f_1(x)$ , состоящую из  $N$  ступенек:

$$f_1(x) = \begin{cases} \varphi_1, & \dots & 0 < x \leq b_1, \\ \varphi_2, & \dots & b_1 < x \leq b_2, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N, & \dots & b_{N-1} < x \leq b_N, \end{cases}$$

с помощью которой будем аппроксимировать искомую функцию  $f(x)$ . Очевидно, что, увеличивая число разбиений  $N$  и подбирая значения  $\varphi_i$ ,  $b_i$ , можно аппроксимировать любую интегрируемую функцию  $f(x)$  ступенчатой функцией  $f_1(x)$ . Удобно использовать запись

$$f_1(-x) = \varphi_1[\Theta(x + b_1) - \Theta(x)] + \varphi_2[\Theta(x + b_2) - \Theta(x + b_1)] + \dots + \varphi_N[\Theta(x + b_N) - \Theta(x + b_{N-1})]. \quad (3.2)$$

Разложив функцию Хевисайда  $\Theta(x + b)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$  в виде

$$\Theta(x + b) = \Theta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \Theta^{(n)}(x),$$

приравнявая функции (3.1) и (3.2) и считая число ступенек в функции  $f_1(x)$  бесконечно большим, получим

$$\begin{aligned} & \varphi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_1^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{(n)}(x) + \varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_2^{n+1} - b_1^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{(n)}(x) + \dots + \\ & + \varphi_N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_N^{n+1} - b_{N-1}^{n+1}}{(n+1)!} \delta^{(n)}(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \delta^{(n)}(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

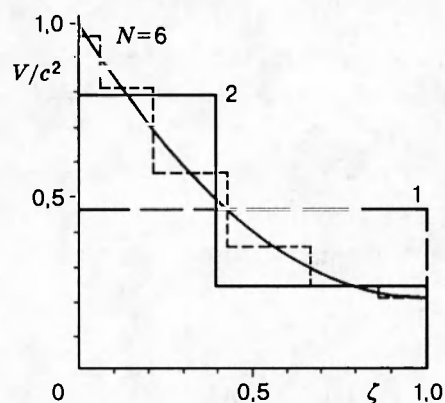


Рис. 2

Это соотношение показывает, что если использовать частичную сумму ряда справа в (3.3)  $\sum_{n=0}^{2N-1} \frac{\alpha_n}{n!} \delta^{(n)}(x)$ , а также  $N$  первых членов слева, то искомая функция  $f(x)$  аппроксимируется ступенчатой функцией  $f_1(x)$ , причем число ступеней равно  $N$ . Другими словами, если необходимо восстановить структуру среды с помощью  $N$  периодически повторяющихся слоев, то надо знать  $2N - 1$  моментов  $\alpha_n$ , т. е. величин  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$ .

Для удобства запишем соотношение (3.3) в развернутом виде. Для этого умножим его на  $x^n$  и проинтегрируем по всей оси  $x$ . Получим нелинейную систему уравнений относительно неизвестных  $b_1, b_2, \dots, b_N, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$  (переменная  $\varphi_1 = 1$  в силу нормировки):

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 b_1 + \varphi_2 (b_2 - b_1) + \varphi_3 (b_3 - b_2) + \dots + \varphi_N (b_N - b_{N-1}) &= \alpha_1, \\
 \varphi_1 b_1^2 + \varphi_2 (b_2^2 - b_1^2) + \varphi_3 (b_3^2 - b_2^2) + \dots + \varphi_N (b_N^2 - b_{N-1}^2) &= 2\alpha_2, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 \varphi_1 b_1^{2N-1} + \varphi_2 (b_2^{2N-1} - b_1^{2N-1}) + \varphi_3 (b_3^{2N-1} - b_2^{2N-1}) + \dots + \varphi_N (b_N^{2N-1} - b_{N-1}^{2N-1}) &= \\
 &= (2N - 1)\alpha_{2N-1}.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Теперь, если под  $b_i$  подразумевать разбиение  $(V/c^2)_i$ , а под  $\varphi_i$  — разбиение  $\zeta_i$ , то получим систему уравнений для определения структуры среды. Решение этой системы уравнений дает знание свойств среды, а именно:  $V/c^2$  на периоде структуры находится в виде ступенчатой функции.

Отметим частный случай периодической среды, для которой величина  $V/c^2$  является постоянной на периоде. Эта среда, как уже отмечалось, не отличается от однородной при распространении в ней длинных нелинейных волн. Такой же результат следует из системы (3.4). Действительно, для однородной среды моменты  $\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} dx = 1/n$ . Поэтому справа в системе уравнений будут стоять единицы. Легко заметить, что решение системы имеет вид  $b_1 = b_2 = \dots = b_N = 1, \varphi_1 = 1$  ( $\varphi_i$  любое для  $i \geq 2$ ), оно соответствует слоистой среде, у которой  $V/c^2 \neq f(\zeta)$ ; в частности, эта среда может быть однородной.

Для примера на рис. 2 приведены результаты расчета по определению слоистой среды, которая наилучшим образом описывает заданную наперед среду  $V/c^2 = 0,2 + 0,8(1 - \zeta)^2$ . Это означает, что в диагностируемой среде и слоистой среде с  $N$  слоями совпадают  $2N - 1$

осредненные характеристики  $\langle V(Vc^{-2})^n \rangle$ .

Таким образом, в работе на основе асимптотической осредненной модели структурированной среды изложен новый метод диагностики свойств среды длинными нелинейными волнами.

Автор благодарит чл.-корр. НАН Украины В. А. Даниленко за полезное и плодотворное обсуждение результатов.

Частично работа выполнялась и финансировалась в рамках Международного научного фонда (грант UAE200).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
2. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984.
3. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. М.: Наука, 1983. Т. 1, 2.
4. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 4. С. 836–840.
5. Вахненко В. А., Кулич В. В. Длинноволновые процессы в периодической среде // ПМТФ. 1992. № 6. С. 49–56.
6. Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В. Осредненное описание ударно-волновых процессов в периодических средах // Хим. физика. 1993. Т. 12, № 3. С. 383–389.
7. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
8. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
9. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. О скорости распространения возмущений в микронеднородных упругих средах с малой сдвиговой упругостью // Докл. РАН. 1992. Т. 323, № 1. С. 13–18.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1988.
11. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 21/VII 1995 г.*

---