

ЛИТЕРАТУРА

1. Fogler H. S., Goddard J. D. Oscillations of a gas bubble in viscoelastic liquids subject to acoustic and impulsive pressure variations.—«J. Appl. Phys.», 1971, vol. 42, N 1.
2. Tanasawa I., Yang W. J. Dynamic behavior of a gas bubble in viscoelastic liquids.—«J. Appl. Phys.», 1970, vol. 41, N 11.
3. Левцкий С. П., Листров А. Т. Малые колебания газонаполненной сферической полости в вязкоупругих полимерных средах.— ПМТФ, 1974, № 1.
4. Yang W. J., Lawson M. L. Bubble pulsation and cavitation in viscoelastic liquids.—«J. Appl. Phys.», 1974, vol. 45, N 2.
5. Oldroyd J. G. Non-newtonian effects in steady motion of some idealized elasticoviscous liquids.—«Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1958, vol. 245, N 1241.
6. Флинн Г. Физика акустической кавитации в жидкостях.— В кн.: Физическая акустика. Т. 1. М., «Мир», 1967.
7. Городцов В. А., Леонов А. И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
8. Dunn J. E., Fosdick R. L. Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade.—«Arch. Rat. Mech. Anal.», 1974, vol. 56, N 3.
9. Walters K. The solution of flow problems in the case of materials with memory — «J. Méc.», 1962, vol. 1, N 4.
10. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
11. Houghton G. Theory of bubble pulsation and cavitation.—«J. Acoust. Soc. Amer.», 1963, vol. 35, N 9.

УДК 532.51

РЭЛЕЕВСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В. Е. Накоряков, В. В. Соболев, О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

Рассматривается устойчивость установившегося течения в среде с нелокальной связью между давлением и плотностью. В линейном приближении выводятся уравнения для возмущений в такой среде. Приведены результаты численного интегрирования для сдвигового течения.

Устойчивость параллельных слоистых потоков в невязкой однородной жидкости изучается уже в течение ста лет. Был развит математический аппарат исследования невязкой неустойчивости и дано ее физическое объяснение. Первые важные результаты по устойчивости течений несжимаемой жидкости получены в работах Гельмгольца, Рэля и Кельвина [1] в прошлом веке. В 1920-х гг. этой проблемой занимался Гейзенберг [2], затем появился ряд интересных работ Толмина [3]. Одна из первых задач по устойчивости сжимаемой жидкости решена, по-видимому, Ландау [4]. Первые работы по устойчивости пограничного слоя идеального газа выполнены Лизом и Линем [5], Даном и Линем [6]. Следует отметить ряд работ, появившихся сравнительно недавно [7—9]. Во всех упомянутых работах исследовалась устойчивость течений в рамках классической однофазной гидродинамики. Между тем в последние годы интенсивно изучаются процессы распространения возмущений в средах с релаксацией [10—12].

1. Основные уравнения Рассмотрим задачу об устойчивости относительно малых возмущений установившегося течения жидкости со следующим уравнением состояния:

$$(1.1) \quad \delta p = c_0^2 \delta \rho + \beta d \delta \rho / dt + \kappa d^2 \delta \rho / dt^2,$$

где δp и $\delta \rho$ — малые возмущения давления и плотности. Влиянием вязкости, не обусловленной внутренними процессами, будем пренебрегать.

Пусть невозмущенный поток определяется соотношениями

$$p_0 = \text{const}, \quad \text{div } V = 0, \quad V_x = V(y).$$

Предположим, что параметры течения колеблются около этих величин

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v_x &= V(y) + \tilde{u}(x, y, z, t); \\ v_y &= \tilde{v}(x, y, z, t); \\ v_z &= \tilde{W}(x, y, z, t); \\ p &= p_0 + \tilde{p}(x, y, z, t); \\ \rho &= \rho_0 + \tilde{\rho}(x, y, z, t), \end{aligned}$$

где знак \sim относится к малым величинам флуктуаций. Выписывая для (1.2) уравнение Эйлера и пренебрегая величинами второго порядка малости относительно возмущений и их производных, получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \partial \tilde{u} / \partial t + V \partial \tilde{u} / \partial x + \tilde{v} V' &= - (1/\rho_0) \partial \tilde{p} / \partial x; \\ \partial \tilde{v} / \partial t + V \partial \tilde{v} / \partial x &= - (1/\rho_0) \partial \tilde{p} / \partial y; \\ \partial \tilde{W} / \partial t + V \partial \tilde{W} / \partial x &= - (1/\rho_0) \partial \tilde{p} / \partial z; \\ \partial \tilde{\rho} / \partial t + V \partial \tilde{\rho} / \partial x + \rho_0 (\partial \tilde{u} / \partial x + \partial \tilde{v} / \partial y + \partial \tilde{W} / \partial z) &= 0, \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по y .

Уравнение состояния (1.1) переписется в виде

$$(1.4) \quad \tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho} + \beta (\partial \tilde{\rho} / \partial t + V \partial \tilde{\rho} / \partial x) + \kappa (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial t^2 + 2V \partial^2 \tilde{\rho} / \partial t \partial x + V^2 \partial^2 \tilde{\rho} / \partial x^2).$$

Система (1.3), (1.4) допускает решения, являющиеся экспоненциальными функциями относительно переменных x, z, t . Будем искать эти решения в виде

$$(1.5) \quad \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{W} \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \\ W(y) \\ \rho(y) \\ p(y) \end{pmatrix} \exp [i\alpha(x - ct) + i\gamma z].$$

В дальнейшем ограничимся исследованием возмущений, периодических относительно пространственных координат x и z , следовательно, в этом случае α и γ в (1.5) должны быть вещественными, а c может быть и комплексным

$$(1.6) \quad c = c_r + ic_i.$$

Если αc_i в (1.6) больше нуля, то возмущения (1.5) со временем нарастают, если αc_i меньше нуля, то возмущения затухают.

Подставляя (1.5) в (1.3), (1.4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно y

$$(1.7) \quad \begin{aligned} i\alpha(V-c)u + vV' &= i-(\alpha/\rho_0)p; & i\alpha(V-c)v &= -(1/\rho_0)p'; \\ i\alpha(V-c)W &= -(i\gamma/\rho_0)p; \\ (i\alpha/\rho_0)(V-c)\rho + i\alpha u + v' + i\gamma W &= 0; \\ p &= c_0^2\rho + i\alpha\beta(V-c)\rho - \kappa\alpha^2(V-c)^2\rho. \end{aligned}$$

Пусть V_{\max} — характерная скорость невозмущенного течения, h — его характерный размер. Введем безразмерные величины

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho/\rho_0, & \bar{p} &= p/\rho_0 V_{\max}^2, & \bar{V} &= V/V_{\max}, & \bar{u} &= u/V_{\max}, \\ \bar{c}_0 &= c_0/V_{\max} = 1/M, & \bar{x} &= x/h, & \bar{y} &= y/h, & \bar{z} &= z/h, \\ \bar{\gamma} &= \gamma h, & \bar{\alpha} &= \alpha h, & \bar{v} &= v/V_{\max}, & \bar{W} &= W/V_{\max}, \\ \bar{\beta} &= \beta/hV_{\max}, & \bar{\kappa} &= \kappa/h^2, \end{aligned}$$

где M — число Маха.

Используя (1.8), перепишем, опуская черту сверху, (1.7)

$$(1.9) \quad \begin{aligned} i\alpha(V-c)u + vV' &= -i\alpha p, \\ i\alpha(V-c)v &= -p', \\ i\alpha(V-c)W &= -i\gamma p, \\ i\alpha(V-c)\rho + i\alpha u + v' + i\gamma W &= 0, \\ p &= (1/M^2)[1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2]\rho. \end{aligned}$$

Таким образом, задача об устойчивости установившегося течения сводится к отысканию собственных значений c для системы (1.9), удовлетворяющей определенным граничным условиям на возмущения. Можно показать, что задача об устойчивости относительно трехмерных возмущений эквивалентна задаче об устойчивости относительно двумерных возмущений с меньшим числом Маха и большим параметром β . Поэтому можно ограничиться рассмотрением двумерных возмущений.

2. Вывод уравнений для двумерных возмущений скорости и давления. В системе (1.9) положим $W=0$ и $\gamma=0$. Из первых двух уравнений системы (1.9) исключим p и ρ с помощью последних двух уравнений

$$(2.1) \quad i\alpha(V-c)u + vV' = (i\alpha u + v') \frac{1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2}{M^2(V-c)};$$

$$(2.2) \quad i\alpha(V-c)v = \left[\frac{1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2}{i\alpha M^2(V-c)} (i\alpha u + v') \right]'$$

Из (2.1) выразим u через v

$$(2.3) \quad \begin{aligned} i\alpha u &= \left[\frac{1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2}{M^2(V-c)} v' - vV' \right] \times \\ &\times \frac{M^2(V-c)}{(V-c)^2 M^2(1 + \kappa\alpha^2) - i\alpha\beta M^2(V-c) - 1}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} v'' - v' [V'(V-c)M^2(2 + i\alpha\beta M^2(V-c))/\Delta] + v[-\alpha^2 - V''/(V-c) + \\ + \alpha^2 M^2(V-c)^2/(1 + i\alpha\beta M^2(V-c)) - \\ - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2 + V'^2 M^2(2 + i\alpha\beta M^2(V-c))/\Delta] = 0, \\ \Delta = [1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2] \cdot [M^2(V-c)^2(1 + \\ + \kappa\alpha^2) - i\alpha\beta M^2(V-c) - 1]. \end{aligned}$$

Если $M=0$, то уравнение (2.4) переходит в уравнение Рэлея, определяющее устойчивость параллельных течений невязкой несжимаемой жидкости.

Если $\beta=\kappa=0$, $M \neq 0$, то (2.4) совпадает с формулой (5.3.20) в [13], если в последней положить $T=1$.

Вернемся снова к системе (1.9). Выразим v , u и p через p

$$(2.5) \quad \begin{aligned} p &= \{M^2/[1 + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2]\} p; \\ v &= [i/\alpha(V-c)] p'; \\ u &= -[1/(V-c)] p - [V'/\alpha^2(V-c)^2] p'. \end{aligned}$$

Подставляя (2.5) в четвертое уравнение системы (1.9), получим уравнение для p

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p'' - [2V''/(V-c)] p' - \alpha^2 p \{1 - M^2(V-c)^2/[1 + \\ + i\alpha\beta M^2(V-c) - \kappa\alpha^2 M^2(V-c)^2]\} = 0. \end{aligned}$$

Если $\beta=\kappa=0$, то (2.6) совпадает с уравнением для p в случае сжимаемой жидкости (см., например, [8]). Для течений, ограниченных твердыми стенками, уравнения (2.4) — (2.6) решаются при граничных условиях

$$v|_{y=l}=0; \quad dp/dy|_{y=l}=0,$$

где l — y -координата стенки.

Для свободных течений, учитывая, что на бесконечности $V'=0$, из (2.4), (2.6) для нарастающих со временем возмущений можно получить следующие граничные условия:

$$(2.7) \quad v|_{y=\pm\infty}=0, \quad p|_{y=\pm\infty}=0.$$

Если $\beta=0$ и

$$1/\alpha M \kappa^{1/2} > |V(\infty) - c| > 1/M(1 + \kappa\alpha^2)^{1/2},$$

то нейтральные по времени возмущения на бесконечности не исчезают и (2.7) не выполняется. В этом случае граничные условия сводятся к требованию: возмущения на бесконечности должны быть уходящими.

3. Исследование устойчивости сдвигового течения. Для профиля основного потока

$$(3.1) \quad V(y) = thy$$

задача об устойчивости решалась численно. Собственные значения s искались для чисел Маха меньше единицы. Чтобы не сталкиваться с трудно-

стями, возникающими при $c_i=0$, уравнения (2.4), (2.6) решались только с теми значениями α , при которых для данного числа Маха c_i еще различно от нуля.

С помощью замены

$$(3.2) \quad \varphi = g'/g$$

однородные линейные уравнения второго порядка (2.4), (2.6) сводятся к нелинейному уравнению Риккати

$$(3.3) \quad \varphi' + \varphi^2 + a\varphi + b=0.$$

Здесь g — скорость, если берется уравнение (2.4), или давление, если берется уравнение (2.6); a и b — коэффициенты при первой и нулевой производных в соответствующих уравнениях. Граничные условия для φ имеют вид

$$(3.4) \quad \varphi|_{y=-\infty} = \alpha\{1 - M^2(1+c)^2/[1 - i\alpha\beta M^2(1+c) - \kappa\alpha^2 M^2(1+c)^2]\}^{1/2};$$

$$(3.5) \quad \varphi|_{y=+\infty} = -\alpha\{1 - M^2(1-c)^2/[1 + i\alpha\beta M^2(1-c) - \kappa\alpha^2 M^2(1-c)^2]\}^{1/2}.$$

Здесь реальная часть корня больше нуля.

Уравнение (3.3) решалось численно методом Рунге — Кутты двумя способами. В первом граничные условия (3.4), (3.5) из бесконечности переносились на конечные расстояния $y_1 = -l$ и $y_2 = l$.

При c , равном некоторому c_n , интегрирование (3.3) начиналось с y_1 при начальном условии (3.4), затем полученное значение φ в точке y_2 сравнивалось с (3.5). Новое значение c вычислялось итерациями с помощью метода секущих

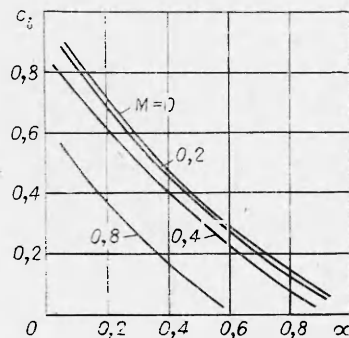
$$(3.6) \quad c_{n+1} = c_n + [(c_n - c_{n-1})(\varphi_2(c_n) - \varphi_n(c_n))]/[\varphi_n(c_n) - \varphi_n(c_{n-1})],$$

где $\varphi_2(c_n)$ — граничное условие (3.5), вычисленное при $c=c_n$; $\varphi_n(c_n)$ и $\varphi_n(c_{n-1})$ — значения φ в точке y_2 , полученные из решения уравнения (3.3) при $c=c_n$ и $c=c_{n-1}$.

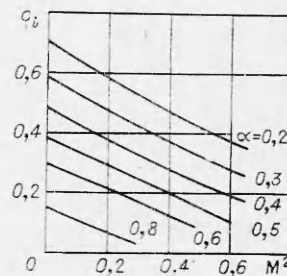
Процесс решения продолжался до тех пор, пока

$$(3.7) \quad \text{mod}(c_n - c_{n-1}) > \varepsilon.$$

Как видно из (3.6), для решения задачи необходимо иметь два приближенных значения c . Они брались из ранее полученных результатов.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Т а б л и ц а 1

M	c_i			
	0	0,2	0,4	0,8
0,05	0,914664	0,880269	0,792673	0,547393
0,1	0,836440	0,805063	0,723345	0,480605
0,15	0,764315	0,735587	0,659242	0,419158
0,2	0,697455	0,671047	0,599557	0,362019
0,3	0,576895	0,554264	0,491015	0,257844
0,4	0,470451	0,450676	0,393933	0,164127
0,5	0,375022	0,357401	0,305719	0,078692
0,52				0,062465
0,54				0,046496
0,56				0,030772
0,6	0,288324	0,272315	0,224518	
0,7	0,208643	0,193847	0,148956	
0,75			0,112951	
0,8	0,134669	0,120758	0,077983	
0,85	0,099496	0,085328	0,043955	
0,9	0,065387	0,052105		
0,95	0,032250	0,019202		

Т а б л и ц а 2

α	c_i			
	M=0,4		M=0,8	
	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$	$\kappa=0,1$	$\kappa=0,2$
0,1	0,723341	0,723337	0,480556	0,480508
0,2	0,599535	0,599513	0,361682	0,361346
0,3	0,490963	0,490911	0,256814	0,255778
0,4	0,393843	0,393754	0,161882	0,159578
0,5	0,305589	0,305460	0,074781	0,070655
0,52	0,		0,058198	0,053676
0,54			0,041877	0,036960
0,56			0,025809	0,020508
0,6	0,224349	0,224179	0,	
0,7	0,148748	0,148538		
0,75	0,112724	0,112495		
0,8	0,077737	0,077488		
0,85	0,043691	0,043423		

Т а б л и ц а 3

α	c_i			
	M=0,2		M=0,8	
	$\beta=1$	$\beta=10$	$\beta=1$	$\beta=10$
0,1	0,805154	0,805990	0,496011	0,610520
0,2	0,671166	0,672289	0,388198	0,542480
0,3	0,554383	0,555553	0,291754	0,460170
0,4	0,450782	0,451899	0,203215	0,377236
0,5	0,357489	0,358516	0,120289	0,297443
0,6	0,272393	0,273320	0,041324	0,221685
0,7	0,193899	0,194734		
0,8	0,120793	0,121544		

ленность по правилу Лопиталья, получим

$$\varphi'(z = -1) = \left\{ (1 + \varphi)^{-1} \left[-\frac{2\varphi}{1+c} + \frac{\alpha^2 M^2 (1+c) (1 - 0,5i\alpha\beta M^2 (1+c))}{[1 - i\alpha\beta M^2 (1+c) - \kappa\alpha^2 M^2 (1+c)^2]} \right] \right\}_{z=-1};$$

Для проверки правильности вычислений этим же способом величина c независимо находилась из (2.4), (2.6) при различных значениях l . При решении ε в (3.7) бралось равным 10^{-6} , шаг интегрирования $\Delta y = 0,01$.

Численное интегрирование показало, что всегда $c_r = 0$. Было найдено, что при $l=3$

$$\max |c_1 - c_2| \sim 10^{-2},$$

при $l=6$

$$\max |c_1 - c_2| \sim 10^{-5},$$

где c_1 — мнимая часть c , найденного из решения уравнения (2.4); c_2 — мнимая часть c , найденного из решения уравнения (2.6).

Вторым способом решалось только уравнение (2.6). С помощью замены независимой переменной $z = \text{th } y$ для профиля (3.1) из (2.6), (3.2), (3.3) получаем

$$(3.8) \quad (1 - z^2)\varphi' + \varphi^2 - [2(1 - z^2)/(z - c)]\varphi - \alpha^2 [1 - M^2(z - c)^2/(1 + i\alpha\beta M^2(z - c) - \kappa\alpha^2 M^2(z - c)^2)] = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по z . Граничные условия для φ (3.4), (3.5) берутся в точках $z=1$, $z=-1$.

Как видно из (3.4), (3.5) и (3.8) значение φ' в этих точках не определено. Раскрывая эту неопреде-

$$\varphi'(z=1) = \left\{ (1-\varphi)^{-1} \left[\frac{2\varphi}{1-c} + \frac{\alpha^2 M^2 (1-c) (1+0,5i\alpha\beta M^2 (1-c))}{[1+i\alpha\beta M^2 (1-c) - \kappa\alpha^2 M^2 (1-c)^2]} \right] \right\}_{z=1}.$$

Процесс отыскания c аналогичен описанному в первом способе. Различие между значениями c , полученными из решения уравнения (2.6) первым способом при $l=6$ и вторым способом, не превышало 10^{-6} , поэтому в c можно доверять пяти значащим цифрам.

При $M=0$ значения c_i совпадают при учете разницы в нормировке V с результатами работы [14], где c_i даны с четырьмя значащими цифрами.

На фиг. 1 и в табл. 1 приведены найденные значения c_i при $\beta = \kappa = 0$, $M \neq 0$ в зависимости от волнового числа α .

На фиг. 2 показано, как меняется величина c_i при фиксированном α в зависимости от M^2 . При малых M^2 эта зависимость с графической точностью линейна, поэтому удавалось хорошо задавать начальные приближения для c_i для других чисел Маха, используя ранее полученные значения c_i . Из этого видно, что для сдвигового течения сжимаемость оказывает стабилизирующее действие на нарастающие возмущения. Это согласуется с известными результатами (см., например, [8]).

В табл. 2 представлены значения c_i при фиксированных M , $\beta = 0$ и $\kappa \neq 0$. Видно, что с увеличением κ поток становится более устойчивым.

В табл. 3 c_i даны при $\beta \neq 0$, $\kappa = 0$. В этом случае неустойчивость усиливается.

Поступила 27 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
2. Heisenberg W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen.—«Ann. Physik», 1924, vol. 74.
3. Tollmien W. Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen.—«Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Klasse», 1935, vol. 50.
4. Ландау Л. Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемых жидкостях.—«Докл. АН СССР», 1944, т. 44, № 4.
5. Lees L., Lin C. C. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. NACA Tech. Note, 1946, N 1115.
6. Dunn D. W., Lin C. C. The stability of the laminar layer in a compressible fluid for the case of three-dimensional disturbances.—«J. Aero. Sci.», 1952 vol. 19.
7. Mack L. M. Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer.— In: Methods in computational physics. Vol. 4. N. Y., Acad. Press., 1965.
8. Blumen W. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid.—«J. Fluid Mech.», 1970, vol. 40, pt 4.
9. Beckemeyer Roy J. Application of an inner expansion method to plane inviscid compressible flow stability studies.—«J. Fluid Mech.», 1974, vol. 62, pt 2.
10. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
11. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 5.
12. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. М., Атомиздат, вып. 4, 1964, № 5.
13. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
14. Michalke A. On the inviscid instability of the hypersonic tangent velocity profile.—«J. Fluid Mech.», 1964, vol. 19, pt 3.