

К ПЕРЕНОСУ ТЕПЛОвого ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Н. А. Рубцов

(Новосибирск)

За последнее время заметно возрос интерес к исследованиям переноса излучения в условиях простейших конфигураций излучающих систем как в собственном смысле этого слова, так и в связи с решением сложных, комбинированных задач.

В том или ином виде, применительно к серым, диффузно излучающим и отражающим граничным поверхностям, а также серым, нерассеивающим средам, подобные постановки задачи рассматриваются многими авторами [1-11]. В подавляющем большинстве случаев эти рассмотрения ограничиваются или получением приближенных расчетных формул для результирующей плотности излучения, в ходе которого исключается всесторонний анализ температурного распределения в слое [5-7], или приведением результатов численного анализа [1-4]. В последних, исключая работу [8], где численно анализируется случай оптической симметрии, влияние оптических свойств граничных поверхностей на температурное распределение в слое не рассматривается.

В зависимости от методов исследования указанные работы могут быть разделены на две группы. В первую группу следует отнести работы, использующие интегральные уравнения излучения и соответствующие интегральные методы исследования [1, 2]. К этому направлению примыкают работы [3, 4], в которых используется зональный метод исследования и в качестве расчетного приема метод электрических аналогий, а также недавно опубликованная статья [8], базирующаяся на вероятностных методах исследования.

Вторая группа работ [5-7], посвященных рассматриваемой задаче, применяет так называемые дифференциальные методы решения. Особого внимания заслуживают исследования [7], существенно их развивающие. В ряде работ вопросы переноса теплового излучения анализируются в связи с решением более общих, комбинированных задач (см., например, [10, 11]).

Настоящая работа представляет попытку проведения приближенного аналитического рассмотрения вопросов, связанных с исследованием теплового переноса излучения в плоском слое поглощающей, переизлучающей и нерассеивающей серой среды с оптическими свойствами, не зависящими от температуры. Указанный слой образован параллельными плоскостями, представляющими диффузно излучающие и диффузно отражающие серые изотермические поверхности.

В работе рассматривается фундаментальная постановка задачи, заключающаяся в определении результирующего теплового потока по заданному температурному распределению (прямая постановка) и температурного распределения по заданным значениям соответственно объемной результирующей плотности излучения и температур граничных поверхностей (обратная постановка). В качестве метода исследования используются интегральные методы и соответствующие интегральные уравнения, представляющие собой решения относительно объемной и полусферической плотностей результирующего переноса излучения [12].

В общем случае излучающих систем произвольной конфигурации интегральные уравнения излучения имеют следующую форму записи [12]:

$$E(M) = A(M) \int_F A(N) E_0(N) \Gamma(M, N) dF_N + \\ + A(M) \int_V \kappa(P) \eta_0(P) Z(M, P) dV_P - A(M) E_0(M) \quad (M \in F) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
-\eta(M) &= \kappa(M) \eta_0(M) - \kappa(M) \int_V \kappa(P) \eta_0(P) Z_1(M, P) dV_P - \\
&\quad - \kappa(M) \int_F A(N) E_0(N) \Gamma_1(M, N) dF_N \quad (M \in V) \quad (2)
\end{aligned}$$

$$(-\eta(M) = \operatorname{div} E_{4\pi}, \quad \eta_0(M) = 4E_0(M) = 4\varepsilon_0 T^4(M), \quad E_0 = \varepsilon_0 T^4(M) \quad A(N) = 1 - R(N))$$

Здесь $\eta(M)$ — объемная плотность результирующего излучения в точке M , $E_{4\pi}$ — сферический вектор излучения; $E(M)$ — полусферическая плотность результирующего излучения в точке M ; $\eta_0(M)$ — объемная плотность черного излучения; $E_0(M)$ — полусферическая плотность черного излучения; $\kappa(M)$ — коэффициент объемного поглощения (излучения) среды в точке M ; $A(N)$ — степень черноты поверхности в точке N . В уравнениях (1) и (2) разрешающие ядра $Z(M, P)$, $\Gamma(M, N)$ имеют физический смысл разрешающих угловых коэффициентов излучения между фиксированной точкой M и текущими объемными P и поверхностными N точками

$$\begin{aligned}
Z(M, P) &= L(M, P) + \int_F R(N) L(M, N) Z(N, P) dF_N \\
\Gamma(M, N) &= Q(M, N) + \int_F R(P) Q(M, P) \Gamma(P, N) dF_P \\
L(M, P) &= \exp\left(-\int_{r^*}^r \kappa(P) dS\right) \frac{\cos \theta_M}{\pi r_{MP}^2} \\
Q(M, N) &= \exp\left(-\int_0^r \kappa(P) dS\right) \frac{\cos \theta_N \cos \theta_M}{\pi r_{MN}^2}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом разрешающие ядра $Z_1(M, P)$ и $\Gamma_1(M, N)$ могут быть представлены следующими интегральными уравнениями:

$$\begin{aligned}
Z_1(M, P) &= L_1(M, P) + \int_F R(N) Q_1(M, N) Z_1(N, P) dF_N \\
\Gamma_1(M, N) &= Q_1(M, N) + \int_F R(P) Q_1(M, P) \Gamma_1(P, N) dF_P \\
L_1(M, P) &= \exp\left(-\int_{r^*}^r \kappa(P) dS\right) \frac{1}{4\pi r_{MP}^2} \\
Q_1(M, N) &= \exp\left(-\int_0^r \kappa(P) dS\right) \frac{\cos \theta_N}{\pi r_{MN}^2}
\end{aligned}$$

Здесь r — расстояние между точками M, P и M, N , а θ_M, θ_N — углы между направлением излучения и направлением нормалей к площадкам в точках M и N .

Преобразования интегральных уравнений (1) и (2) применительно к рассматриваемой конфигурации излучающей системы сводятся к формальному учету ее геометрических особенностей.

В частности, принимается во внимание невогнутость ее поверхностей F_1 и F_2 , составляющих поверхность F , в связи с чем при анализе соответствующих разрешающих угловых коэффициентов излучения полагаем $Q(P_1, N_1) = Q(P_2, N_2) = 0$ (Здесь P_1, P_2 — промежуточные точки отражения по поверхностям F_1 и F_2 соответственно), а также учитываем, что отражающими являются лишь граничные, образующие замкнутую систему поверхности.

Легко показать, что интегральные члены, составляющие уравнения (1) и (2), могут быть выражены в явном виде через оптико-геометрические параметры $Q(M, N)$, $Q_1(M, P)$, $L_1(M, P)$. Применительно к преобразованию интегрального уравнения (2) для $\eta(M)$ имеем соответственно

$$\int_{F_1} A(N_1) E_0(N_1) \Gamma_1(M, N_1) dF_{N_1} = \frac{1}{D_{12}} \int_{F_1} A(N_1) E_0(N_1) \left[Q_1(M, N_1) + \int_{F_2} R(N_2) Q_1(M, N_2) Q(N_2, N_1) dF_{N_2} \right] dF_{N_1} \quad (3)$$

$$\int_{F_2} A(N_2) E_0(N_2) \Gamma_1(M, N_2) dF_{N_2} = \frac{1}{D_{12}} \int_{F_2} A(N_2) E_0(N_2) \left[Q_1(M, N_2) + \int_{F_1} R(N_1) Q_1(M, N_1) Q(N_1, N_2) dF_{N_1} \right] dF_{N_2} \quad (4)$$

$$\int_V \kappa(P) \eta_0(P) Z_1(M, P) dV_P = \int_V \kappa(P) \eta_0(P) L_1(M, P) dV_P + \frac{1}{D_{12}} \int_V \kappa(P) \eta_0(P) \left[\int_{F_1} R(N_1) Q_1(M, N_1) Q(N_1, P) dF_{N_1} + \int_{F_2} R(N_2) Q_1(M, N_2) Q_1(N_2, P) dF_{N_2} + \int_{F_1} \int_{F_2} R(N_1) R(N_2) Q_1(M, N_2) Q(N_2, N_1) Q_1(N_1, P) dF_{N_2} dF_{N_1} + \int_{F_2} \int_{F_1} R(N_2) R(N_1) Q_1(M, N_1) Q(N_1, N_2) Q_1(N_2, P) dF_{N_1} dF_{N_2} \right] dV_P \quad (5)$$

Учет эффектов многократных отражений оказался сведенным здесь в оптико-геометрическом соотношении

$$D_{12} = 1 - \int_{F_1} \int_{F_2} R(N_1) R(N_2) Q(N_1, N_2) Q(N_2, N_1) dF_{N_2} dF_{N_1}$$

Использование выражений указанных выше оптико-геометрических параметров, представляющих аналог угловых коэффициентов излучения, позволяет получить в конечном счете для $\eta(M)$ интегральное уравнение, непосредственно применяемое в вычислениях.

В ходе преобразований используется экспоненциальный интеграл $K_n(x)$, характерный для процессов переноса в поглощающих средах, оптические глубина τ и толщина τ_0 слоя

$$K_n(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu^{n-1} \frac{d\mu}{\mu}, \quad \tau = \int_0^y \kappa(\zeta) d\zeta, \quad \tau_0 = \int_0^{\delta} \kappa(\zeta) d\zeta$$

В случае, когда F_1 и F_2 являются оптически однородными и изотермическими зонами, выражение для объемной результирующей плотности излучения записывается следующим образом:

$$-\eta(\tau) = \frac{dE(\tau)}{d\tau} = 4E_0(\tau) - 2 \int_0^{\tau_0} E_0(\zeta) K_1|\tau - \zeta| d\zeta - \frac{2}{1 - 4R_1R_2K_3^2(\tau_0)} \left\{ A_1E_{0,1} [K_2(\tau) + 2R_2K_3(\tau_0)K_2(\tau_0 - \tau)] + A_2E_{0,2} [K_2(\tau_0 - \tau) + 2R_1K_3(\tau_0)K_2(\tau)] + 2R_1K_2(\tau) \int_0^{\tau_0} E_0(\tau) K_2(\tau) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2R_2K_2(\tau_0 - \tau) \int_0^{\tau_0} E_0(\tau) K_2(\tau_0 - \tau) d\tau + 4R_1R_2K_3(\tau_0) \times \\
& \times \left[K_2(\tau_0 - \tau) \int_0^{\tau_0} E_0(\tau) K_2(\tau) d\tau + K_2(\tau) \int_0^{\tau_0} E_0(\tau) K_2(\tau_0 - \tau) d\tau \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Уравнение (6) согласуется с аналогичным выражением для $\eta(\tau)$ в работе [13], полученным путем непосредственного составления баланса лучистых потоков тепла.

Интегрируя почленно по τ правую и левую части уравнения (6), а также применяя правило интегрирования под знаком интеграла, получаем выражение для полусферической плотности результирующего излучения.

Следуя работе [14], представим последнее, а также уравнение (6) в форме, использующей соответствующие оптико-геометрические комплексы

$$\begin{aligned}
E(\tau) = & 2A_1(\tau)E_{0,1} - 2A_2(\tau)E_{0,2} + 2 \int_0^{\tau} E_0(\zeta) \Psi(\tau, \zeta) d\zeta - \\
& - 2 \int_{\tau}^{\tau_0} E_0(\zeta) \Psi(\zeta, \tau) d\zeta \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} = 4E_0(\tau) - 2A_1'(\tau)E_{0,1} - 2A_2'(\tau)E_{0,2} - 2 \int_0^{\tau} E_0(\zeta) Z(\tau, \zeta) d\zeta$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_1(\tau) &= \frac{A_1}{D_{12}} [K_3(\tau) - 2R_2K_3(\tau_0)K_3(\tau_0 - \tau)] \\
A_2(\tau) &= \frac{A_2}{D_{12}} [K_3(\tau_0 - \tau) - 2R_1K_3(\tau_0)K_3(\tau)] \\
A_1'(\tau) &= \frac{A_1}{D_{12}} [K_2(\tau) + 2R_2K_3(\tau_0)K_2(\tau_0 - \tau)] \\
A_2'(\tau) &= \frac{A_2}{D_{12}} [K_2(\tau_0 - \tau) + 2R_1K_3(\tau_0)K_2(\tau)] \\
D_{12} &= 1 - 4R_1R_2K_3^2(\tau_0) \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\Psi(\tau, \zeta) = K_2(\tau - \zeta) + 2A_1(\tau) \frac{R_1}{A_1} K_2(\zeta) - 2A_2(\tau) \frac{R_2}{A_2} K_2(\tau_0 - \zeta)$$

$$\Psi(\zeta, \tau) = K_2(\zeta - \tau) - 2A_1(\tau) \frac{R_1}{A_1} K_2(\zeta) + 2A_2(\tau) \frac{R_2}{A_2} K_2(\tau_0 - \zeta)$$

$$Z(\tau, \zeta) = K_1|\tau - \zeta| + 2A_1'(\tau) \frac{R_1}{A_1} K_2(\zeta) + 2A_2'(\tau) \frac{R_2}{A_2} K_2(\tau_0 - \zeta)$$

В случае, если излучающая система находится в состоянии термодинамического равновесия, интегральные уравнения (7) и (8) вырождаются в интегральные уравнения замкнутости

$$\begin{aligned}
A_1(\tau) - A_2(\tau) + \int_0^{\tau} \Psi(\tau, \zeta) d\zeta - \int_{\tau}^{\tau_0} \Psi(\zeta, \tau) d\zeta &= 0 \\
A_1'(\tau) + A_2'(\tau) + \int_0^{\tau_0} Z(\tau, \zeta) d\zeta &= 2 \quad (9)
\end{aligned}$$

Используя уравнения замкнутости (9), представим интегральные уравнения (7) и (8) в безразмерном виде

$$q = 2A_2(\tau) - 2 \int_0^{\tau} \Psi(\tau, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta + 2 \int_{\tau}^{\tau_0} \Psi(\zeta, \tau) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau} = 4\varphi(\tau) - 2A_2'(\tau) - 2 \int_0^{\tau_0} Z(\tau, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \quad (11)$$

$$\left(q(\tau) = \frac{E(\tau)}{E_{0,1} - E_{0,2}}, \quad \varphi(\tau) = \frac{E_0(\tau) - E_{0,1}}{E_{0,2} - E_{0,1}} \right)$$

Анализ теплового переноса в соленоидальном поле излучений, когда объемная результирующая плотность излучения тождественно равна нулю, а полусферическая результирующая плотность постоянна ($E(\tau) = \text{const}$, $dE/d\tau \equiv 0$), сводится к совместному рассмотрению, как это следует из (10) и (11), следующих интегральных соотношений:

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \left(A_2'(\tau) + \int_0^{\tau_0} Z(\tau, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \right) \quad (12)$$

$$q = 2 \left(A_2(0) + \int_0^{\tau_0} \Psi(\tau, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \right) \quad (13)$$

Заметим, что определение безразмерного потока q сводится к взятию соответствующих квадратур после подстановки $\varphi(\tau)$, полученного из решения интегрального уравнения (12). Таким образом, основное содержание рассматриваемой постановки задачи оказывается сведенным к исследованию и решению уравнения (12), представляющего интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K_1 |\tau - \zeta|$, обладающим в $\tau = \zeta$ бесконечностью логарифмического характера.

Заметим также, что из условий оптической симметрии применительно к рассматриваемой излучающей системе, когда $A_1 = A_2$, имеем очевидное соотношение

$$\varphi(\tau) + \varphi(\tau_0 - \tau) = 1, \quad \text{или} \quad \varphi(1/2\tau_0) + \varphi(1/2\tau_0) = 1 \\ \varphi(1/2\tau_0) = 1/2$$

С другой стороны, в общем случае из (12) с очевидностью следует, что

$$\varphi(\tau)|_{\tau_0=0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_1 - R_2}{1 - R_1 R_2} \right)$$

В условиях оптической симметрии ($R_1 \equiv R_2$), $\varphi(\tau) = 1/2$ при $\tau_0 = 0$. Следует обратить внимание на обобщающую форму интегрального уравнения (12), столь характерную при описании процессов переноса, использующих понятие средней длины свободного пробега носителей.

В частности, в исследованиях внутреннего трения разреженных газов используется интегральное уравнение, описывающее распределение скоростей «видимого» движения газа, образованного двумя параллельными стенками, из которых одна движется, и которое применительно к частному случаю неупругих молекул записывается [15] в виде

$$w(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ w_0 K_2(\tau_0 - \tau) + \int_0^{\tau_0} K_1 |\tau - \zeta| w(\zeta) d\zeta \right\} \quad [\tau = \sigma y, \tau_0 = \sigma h, \sigma = 1/l]$$

Здесь l — средняя длина свободного пробега молекул, w_0 — скорость движения одной из ограничивающих стенок, $w(\tau)$ — скорость «видимого» или «стройного» движения газов в слое h .

Представленное уравнение оказывается полностью совпадающим с интегральным уравнением

$$E_0(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ E_{0,2} K_2(\tau_0 - \tau) + \int_0^{\tau_0} K_1 |\tau - \zeta| E_0(\zeta) d\zeta \right\}$$

являющимся частным случаем уравнения (12), записанного в размерном виде, когда граничные поверхности оказываются абсолютно черными, а излучение одной из поверхностей $E_{0,1}$ равно нулю.

Анализ молекулярного переноса в плоском слое разреженного газа указывает на линейный характер распределения скоростей «стройного» движения молекул газа в значительной части слоя [15]. Это позволяет использовать в качестве первого приближения линейную зависимость $\varphi(\tau)$ от оптической толщины τ слоя излучающей среды

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{\varphi(\tau_0) - \varphi(0)}{\tau_0} \tau \quad (14)$$

Используя (14) в интегральном уравнении (12), получаем его формальное решение во втором приближении

$$\varphi(\tau) = a(\tau) + b(\tau)\varphi(0) + c(\tau)(\varphi(\tau_0) - \varphi(0)) \quad (15)$$

где

$$a(\tau) = \frac{1}{2} A_2'(\tau), \quad b(\tau) = \frac{1}{2} \left[2 - K_2(\tau) - K_2(\tau_0 - \tau) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{2} - K_3(\tau_0) \right) \left(A_1'(\tau) \frac{R_1}{A_1} + A_2'(\tau) \frac{R_2}{A_2} \right) \right] \quad (16)$$

$$c(\tau) = \frac{1}{2\tau_0} \left[2\tau + K_3(\tau) - K_3(\tau_0 - \tau) - \tau_0 K_2(\tau_0 - \tau) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{3} - K_4(\tau_0) \right) \left(A_1'(\tau) \frac{R_1}{A_1} - A_2'(\tau) \frac{R_2}{A_2} \right) \right] - A_1'(\tau) \frac{R_1}{A_1} K_3(\tau_0) + \frac{1}{2} A_2'(\tau) \frac{R_2}{A_2}$$

На основании (15) при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ составляется система алгебраических уравнений относительно $\varphi(0)$ и $\varphi(\tau_0)$, имеющая решение

$$\varphi(0) = \frac{a(0)(1 - c(\tau_0)) + a(\tau_0)c(0)}{1 - b(0) - c(\tau_0)(1 - b(0)) + c(0)(1 - b(\tau_0))} \quad (17)$$

$$\varphi(\tau_0) = \frac{a(\tau_0)(1 - b(0)) - a(0)(c(\tau_0) - a(\tau_0) - b(\tau_0))}{1 - b(0) - c(\tau_0)(1 - b(0)) + c(0)(1 - b(\tau_0))}$$

Здесь $a(0)$, $a(\tau_0)$, $b(0)$, $b(\tau_0)$, $c(0)$, $c(\tau_0)$ определяются согласно их значениям из (16) соответственно при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$.

Если излучающая система обладает оптической симметрией ($R_1 = R_2$), то решение интегрального уравнения (12) в линейном приближении может быть представлено

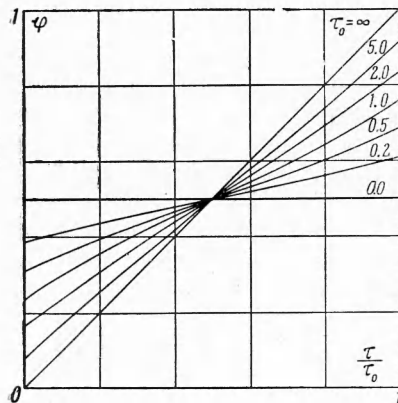
$$\varphi(\tau) = \frac{1}{D(\tau_0)} \left\{ \frac{1}{2} - K_3(\tau_0) + 2 \left(\frac{1}{3} - K_4(\tau_0) \right) \left(A_1'(0) \frac{R_1}{A_1} - A_2'(0) \frac{R_2}{A_2} \right) + \right. \\ \left. + \tau \left[1 - K_2(\tau_0) - 2 \left(\frac{1}{2} + K_3(\tau_0) \right) \left(A_1'(0) \frac{R_1}{A_1} - A_2'(0) \frac{R_2}{A_2} \right) \right] \right\} \quad (18)$$

$$D(\tau_0) = 1 + \tau_0(1 - K_2(\tau_0)) - 2K_3(\tau_0) + \\ + \left[\frac{4}{3} - \tau_0(1 + 2K_3(\tau_0) - 4K_4(\tau_0)) \right] \left(A_1'(0) \frac{R_1}{A_1} - A_2'(0) \frac{R_2}{A_2} \right)$$

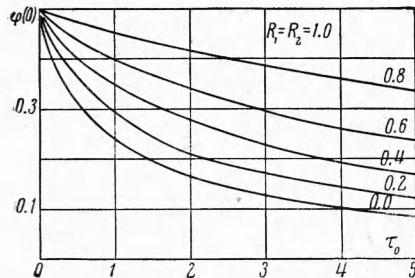
В частном случае, когда образующие поверхности являются абсолютно черными ($R_1 = R_2 = 0$), решение (18) существенным образом упрощается

$$\varphi(\tau) = \frac{1/2 - K_3(\tau_0) + \tau(1 - K_2(\tau_0))}{1 + \tau_0(1 - K_2(\tau_0)) - 2K_3(\tau_0)} \quad (19)$$

Решение интегрального уравнения (12) во втором приближении, использующее линейное приближение (14), в качестве первого приближения применительно к случаю абсолютно черных граничных поверхностей имеет следующий вид:



Фиг. 1. Распределение безразмерной температуры $\varphi(\xi)$ по толщине слоя τ/τ_0 излучающего газа, образованного абсолютно черными граничными поверхностями



Фиг. 2. Зависимость безразмерной температуры в окрестности стенки $\tau \approx 0$, $\varphi(0)$ от оптической толщины слоя τ_0

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2D(\tau_0)} \left\{ 1 - 2K_3(\tau_0) + \right. \quad (20)$$

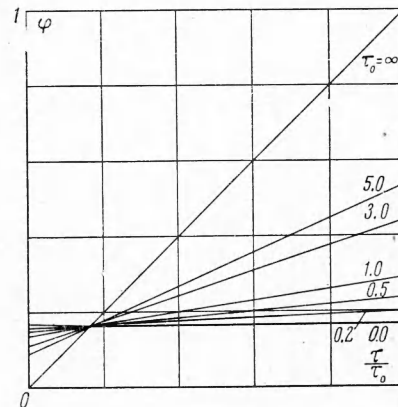
$$+ (1 - K_2(\tau_0)) (2\tau + K_3(\tau) - K_3(\tau_0 - \tau)) - \left. \left(\frac{1}{2} - K_3(\tau_0) \right) (K_2(\tau) - K_2(\tau_0 - \tau)) \right\}$$

$$[D(\tau_0) = 1 + \tau_0(1 - K_2(\tau_0)) - 2K_3(\tau_0)]$$

Распределение

$$\varphi(\xi) = \frac{E_0(\xi) - E_{0,1}}{E_{0,2} - E_{0,1}}, \quad \xi = \frac{\tau}{\tau_0}$$

по толщине слоя излучающего газа (фиг. 1)



Фиг. 3. Распределение $\varphi(\xi)$ по толщине слоя, образованного отражающими поверхностями с $R_1 = 0.3$ и $R_2 = 0.8$

для значений $\tau_0 = 0, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, \infty$, построенное по уравнению (20), весьма хорошо согласуется (с погрешностью $< 1\%$) со строгим численным решением, представленным в работе [2]. Совершенно очевидно, что линейное приближение достаточно хорошо (с погрешностью, не превышающей 3%) аппроксимирует решение интегрального уравнения (12) во втором, последующем приближении.

Функция температурного распределения в плоском слое излучающего газа, как следует из решений (14), (17) и (18), определяется, помимо оптической толщины слоя, оптическими свойствами излучающих поверхностей.

На фиг. 2 представлена зависимость безразмерной температуры в окрестности стенки $\tau = 0$, $\varphi(0)$, характеризующей температурный скачок, от оптической толщины слоя τ_0 в случае оптической симметрии для значений $R_1 = R_2 = R$, соответственно равных 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 и 1.0.

Как и следовало ожидать, с ростом значений R температурные скачки $\varphi(0)$ увеличиваются, и при $R \equiv 1.0$ величина $\varphi(0)$ принимает ¹ максимальное значение $\varphi(0) = 1/2$, не зависящее от τ_0 . Нарушение оптической симметрии ($R_1 \neq R_2$) расслаивает точку перегиба, весьма характерную для оптической симметрии (фиг. 1), по значениям τ_0 и смещает ее в сторону поверхности с высоким значением коэффициента, характеризующего излучательную способность стенки. На фиг. 3 представлено подобное распределе-

¹ Строго говоря, условие $R \equiv 1.0$ следует исключить из рассмотрения, так как оно не предполагает единственности решения соответствующих интегральных уравнений излучения.

ние $\varphi(\xi)$ по толщине слоя, построенное в линейном приближении по формулам (14) и (17), при $R_1 = 0.3$ и $R_2 = 0.8$ для значений τ_0 , равных 0, 0.2, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0 и ∞ .

Обобщая рассмотрение приближенного решения интегрального уравнения (12), отмечаем, что подобные уравнения имеют неограниченные ядра линейно-потенциального вида, для которых, как известно [16], справедливы теоремы Фредгольма на плоскости комплексного параметра $\lambda = 1/2$ в такой же степени, как и для непрерывных ядер. Это позволяет использовать в решении интегральных уравнений типа (12) обычные методы и, в частности, метод итераций.

Решение частной формы интегрального уравнения (12) применительно к случаю абсолютно черных поверхностей, которая имеет вид

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \left(K_2(\tau_0 - \tau) + \int_0^{\tau_0} K_1 |\tau - \xi| \varphi(\xi) d\xi \right) \quad (21)$$

может быть получено следующим образом.

Следуя работе [17], дифференцируем интегральное уравнение (21) по τ . При дифференцировании под знаком интеграла используется вполне очевидное свойство ядра $K_1 |\tau - \xi|$, записываемое в форме уравнения сохранения

$$\frac{\partial K_1 |\tau - \xi|}{\partial \tau} + \frac{\partial K_1 |\tau - \xi|}{\partial \xi} = 0$$

После простых преобразований

$$\varphi'(\tau) = \frac{1}{2} (K_1(\tau) + K_1(\tau_0 - \tau)) \varphi(0) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K_1 |\tau - \xi| \varphi'(\xi) d\xi \quad (22)$$

Разрешая (22) с привлечением разрешающих ядер и интегрируя полученное решение почленно от 0 до τ , получим

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \varphi(0) \left(\int_0^{\tau} \Gamma_1(\xi) d\xi + \int_0^{\tau} \Gamma_1(\tau_0 - \xi) d\xi \right) \quad (23)$$

Полагая здесь $\tau = 1/2 \tau_0$ и учитывая, что $\varphi(1/2 \tau_0) = 1/2$, определяем

$$\varphi(0) = \left(2 + \int_0^{\tau_0} \Gamma_1(\tau) d\tau \right)^{-1} \quad (24)$$

Общее решение (21) окончательно записывается в следующей обобщенной форме:

$$\varphi(\tau) = \left(1 + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \Gamma_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \Gamma_1(\tau_0 - \xi) d\xi \right) \left(2 + \int_0^{\tau_0} \Gamma_1(\tau) d\tau \right)^{-1} \quad (25)$$

$$\Gamma_1(\tau) = K_1(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K_1 |\tau - \xi| \Gamma_1(\xi) d\xi$$

$$\Gamma_1(\tau_0 - \tau) = K_1(\tau_0 - \tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K_1 |\tau - \xi| \Gamma_1(\tau_0 - \xi) d\xi$$

Достаточно хорошая сходимость итерационного процесса позволяет надеяться на применение решения (25) в варианте использования приближенных выражений для разрешающих ядер (ряд, составленный из итерированных ядер, может быть оборван на втором члене).

Заметим, что сопоставление выражений для $\varphi(0)$ из (19) и (24) позволяет получить вполне строгое интегральное тождество следующего вида:

$$\int_0^{\tau_0} \Gamma_1(\tau) d\tau = \tau_0 \frac{1 - K_2(\tau_0)}{1/2 - K_3(\tau_0)}$$

Как следует из уравнения (13) для полусферической плотности результирующего излучения, определение последней сводится к взятию соответствующих квадратур после того, как будут использованы данные по температурным распределениям.

Для вычисления интеграла в правой части уравнения (13) используем линейное распределение $\varphi(\tau)$ в форме (14), где $\varphi(0)$ и $\varphi(\tau_0)$ определяются либо из общего решения (17), либо из частного решения (18), полученного для случая оптической симметрии. После некоторых преобразований общее выражение для безразмерного потока может быть представлено следующим образом:

$$q = 2A_2(0) + 2\varphi(0)(A_1(0) - A_2(0)) - 2 \frac{\varphi(\tau_0) - \varphi(0)}{1 - 4R_1R_2K_3^2(\tau_0)} \left\{ A_1A_2K_3(\tau_0) - \frac{1}{\tau_0} A_1(1 - 2R_2K_3(\tau_0))(1/3 - K_4(\tau_0)) \right\} \quad (26)$$

$$A_1(0) = A_1 \frac{1/2 - 2R_2K_3(\tau_0)}{1 - 4R_1R_2K_3^2(\tau_0)}, \quad A_2(0) = \frac{A_1A_2K_3(\tau_0)}{1 - 4R_1R_2K_3^2(\tau_0)}$$

Здесь в процессе преобразований использовано уравнение замкнутости из (9), которое для $\tau = 0$ имеет вид

$$A_1(0) - A_2(0) - \int_0^{\tau_0} \Psi(\zeta) d\zeta = 0$$

В случае оптической симметрии следует иметь в виду, что

$$\varphi(\tau_0) = 1 - \varphi(0)$$

Определенный интерес представляет рассмотрение частного случая решения (26), когда излучающие поверхности являются абсолютно черными. Выражение для безразмерного потока имеет форму сравнительно простого соотношения

$$q = \left(\frac{1}{2} + K_3(\tau_0) + \frac{2}{3} (1 - K_2(\tau_0)) \frac{1 - 3K_4(\tau_0)}{1 - 2K_3(\tau_0)} \left(1 + \tau_0 \frac{1 - K_2(\tau_0)}{1 - 2K_3(\tau_0)} \right)^{-1} \right) \quad (27)$$

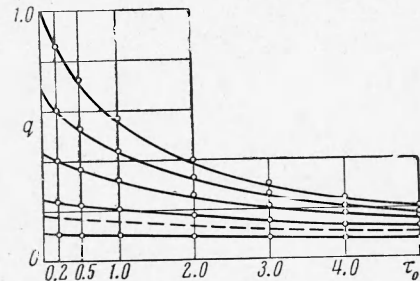
Расчеты по формуле (27) практически совпадают с результатами строгих численных решений в работе [2]. На фиг. 4 показана зависимость q от оптической толщины слоя, построенная по формуле (26) для значений $R = R_1 = R_2$, соответственно равных 0, 0.2, 0.4, 0.6 и 0.8. Там же для сопоставления кружочками представлены результаты, построенные по приближенной формуле

$$q = (1/A_1 + 1/A_2 - 1 + 3/4 \tau_0)^{-1} \quad (28)$$

которая получена дифференциальным методом в предположении изотропного распределения интенсивности излучения по всему слою [7].

Как и следовало ожидать, с ростом R степень согласования расчетов по упрощенной формуле (28) с расчетами по уравнению (26) увеличивается. На фиг. 4 пунктирной линией представлены результаты расчета q для случая оптической несимметрии ($R_1 = 0.3$, $R_2 = 0.8$), которые также хорошо согласуются с формулой (28).

Фиг. 4. Зависимость безразмерного теплового потока q от оптической толщины слоя τ_0



В заключение нельзя не отметить некоторую, вполне очевидную, консервативность q по отношению к закладываемому температурному распределению.

Таким образом, в работе показан непрерывный переход от интегральных уравнений излучения общего вида (1), (2) к частной форме (7), (8). Строятся интегральные уравнения (12), (13), имеющие форму, весьма характерную для описания процессов переноса некоторой субстанции при помощи понятия средней длины свободного пробега носителей.

В этой связи оказывается физически обоснованным применение линейного приближения (14)—(17) для $\varphi(\tau)$. Использование его для получения второго приближения (20), практически совпадающего со строгим решением, указывает на сравнительно быструю сходимость итераций интегрального уравнения (12).

В случае оптической симметрии в излучающей системе функция температурного распределения $\varphi(\xi)$ имеет общую точку перегиба, не зависящую от оптической толщины слоя и расположенную в плоскости симметрии. Функция температурных скачков в окрестности стенок определяется оптической толщиной слоя τ_0 и оптическими свойствами поверхности R . С ростом τ_0 температурные скачки уменьшаются, с увеличением R — увеличиваются.

Нарушение оптической симметрии расслаивает местоположения точки перегиба по значениям τ_0 и смещает ее в сторону поверхности с высоким значением излучательной способности. Значения безразмерной полусферической плотности результирующего излучения, рассчитанные по (26) и (27) с использованием линейной функции температурного распределения, совпадают со значениями, полученными численно в строгой постановке задачи.

Пользуюсь случаем поблагодарить С. С. Кутателадзе за внимание и интерес к работе.

Поступила 10 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Usiskin S. M. and Sparrow E. M. Thermal radiation between parallel plates separated by an absorbing — emitting nonisothermal gas. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 1960, vol. 1, p. 28—36.
2. Viskanta R. and Gross R. J. Heat transfer in a thermal radiation absorbing and scattering medium. *Internat. developments in Heat Transfer*, 1962, part IV.
3. Э к к е р т Э. Р. и Д р е й к Р. М. Теория тепло- и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.
4. Hottel H. C. and Sarofim A. F. Gaseous radiation with temperature gradients allowance for isotropic scatter. *Theory and Fundamental Research in Heat Transfer*. Ed. by J. A. Clark, Perg. Press, 1963.
5. Н е в с к и й А. С. Теплообмен излучением в поглощающем слое. *Изв. АН СССР, ОТН*, 1942, № 5 и 6.
6. Ш о р и н С. Н. Лучистый теплообмен в поглощающей среде. *Изв. АН СССР, ОТН*, 1951, № 3; Теплопередача, Изд. «Высшая школа», 1964.
7. А д р и а н о в В. Н. и П о л я к Г. Л. Дифференциальные методы исследования теплообмена излучением и Новый метод исследования теплообмена излучением. *Инж.-физ. ж.*, 1964, № 4 и 6.
8. Х а у э л Д. Р., П е р л м у т т е р М. Применение метода Монте-Карло для расчета лучистого теплообмена в излучающей среде, заключенной между серыми стенками. *Теплопередача*, 1964, № 1.
9. Д е й с л е р Р. Г. Аппроксимация теплоизлучения в газах рассеянием со скачкообразными граничными условиями. *Теплопередача*, 1964, № 2.
10. Ф и л и п о в Л. П. Влияние излучения и поглощения среды на процесс теплопередачи. *Вестн. Моск. ун-та*, 1954, № 2.
11. Н е м ч и н о в И. В., Ф о н а р е в А. С. Течение Куэтта с учетом переноса тепла излучением. *ПМТФ*, 1960, № 3.
12. С у р и н о в Ю. А. О некоторых вопросах теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей среде. *Докл. АН СССР*, 1958, т. 123, № 5.
13. Goulard R. and M. One dimensional energy transfer in radiant media. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 1960, vol 1, p. 89—91.
14. А д р и а н о в В. Н. Радиационно-кондуктивный и радиационно-конвективный теплообмен. Тезисы докл. на II Всесоюзном совещании по тепло- и массообмену. Изд. АН БССР, 1964.
15. Т и м и р я з е в А. К. Об упрощенном способе нахождения приближенных решений интегрального уравнения в теории внутреннего трения разреженных газов. *Ж. эксперим. и теор. физ.*, 1934, т. 4, № 5, стр. 455.
16. С о б о л е в С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1950.
17. К о с т и ц ы н В. А. Интегральные уравнения с интегро-логарифмическим ядром и исходные интегральные уравнения. *Матем. сб.*, 1922, т. 31, № 2.