

УДК 532.529

## МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

Н. С. Хабеев

Университет Королевства Бахрейн, 32038 Манама, Бахрейн  
E-mail: nail@sci.uob.bh

Рассмотрена задача о свободных радиальных колебаниях газовых пузырьков в жидкости. Детально исследована структура корней дисперсионного уравнения при наличии теплообмена между фазами. Показано, что это уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, а также бесконечное число действительных корней, причем все корни лежат в левой комплексной полуплоскости, что обеспечивает затухание радиальных колебаний. Получены приближенные выражения для этих корней.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, газовые пузырьки в жидкости, свободные колебания.

Рассмотрим газовый пузырек, свободно пульсирующий в идеальной несжимаемой жидкости, в предположении сферической симметрии процесса и однородности давления в пузырьке. Последнее имеет место, когда длина звуковой волны в газе значительно больше размера пузырька.

В рамках принятых допущений уравнения притока тепла и неразрывности для газовой фазы в сферических эйлеровых координатах  $r$ ,  $t$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{dp}{dt}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho w) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $w$  — радиальная скорость;  $p$  — давление;  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $\lambda$  — теплопроводность.

Как показано в [1], граничное условие для температуры на поверхности пузырька можно задать в виде

$$r = a(t): \quad T = T_0 = \text{const}, \quad (2)$$

где  $a$  — радиус пузырька;  $T_0$  — температура жидкости.

Граничное условие в центре пузырька имеет вид

$$r = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Динамика радиальных колебаний пузырька описывается уравнением Рэлея [2]

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{p - p_\infty - 2\sigma/a}{\rho_e}, \quad (4)$$

где  $p_\infty$  — давление в жидкости вдали от пузырька;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\rho_e$  — плотность жидкости.

Уравнение состояния газа имеет вид

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

где  $R$  — газовая постоянная.

Условие однородности давления в пузырьке позволяет получить из (1), (5) соотношение

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3(\gamma - 1)}{a} \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_a - \frac{3\gamma p}{a} \frac{da}{dt}, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты газа.

В случае малых колебаний радиус пузырька определяется действительной частью выражения

$$a = a_0 [1 + \alpha \exp(ht)],$$

где индекс 0 соответствует параметрам в невозмущенном состоянии;  $|\alpha| \ll 1$  — комплексное число;  $\omega = \text{Im } h$  — частота колебаний.

Линеаризуем систему основных уравнений (1)–(6). Предполагается, что малые отклонения давления и температуры от соответствующих значений в состоянии равновесия имеют вид [1–3]

$$p = p_0 [1 + P \exp(ht)], \quad T = T_0 [1 + \theta(r) \exp(ht)].$$

После линеаризации и перехода к безразмерным величинам систему уравнений (1)–(6) можно записать следующим образом:

$$H\theta = \nabla^2 \theta + (1 - 1/\gamma)HP; \quad (7)$$

$$P = \frac{\alpha H^2}{N} - S\alpha, \quad HP = 3\gamma \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} - \alpha H \right), \quad (8)$$

где

$$\xi = \frac{r}{a_0}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad S = \frac{2\sigma}{a_0 p_0}, \quad N = \frac{p_0 a_0^2}{\rho_e D^2}, \quad D = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad H = \frac{h a_0^2}{D}.$$

Решение уравнения (7) с граничными условиями (2), (3) имеет вид

$$\theta = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) P \left(1 - \frac{\text{sh}(H^{1/2}\xi)}{\xi \text{sh}(H^{1/2})}\right). \quad (9)$$

Из условия существования нетривиального решения системы линейных уравнений (7)–(9) следует характеристическое уравнение относительно  $H$  — трансцендентное уравнение [2]

$$f(H) = f_0(H) + f_1(H) \text{Kh}(H) = 0; \quad (10)$$

$$\text{Kh}(H) = H^{1/2} \text{cth}(H^{1/2}) - 1, \quad (11)$$

где  $f_0(H)$ ,  $f_1(H)$  — многочлены от  $H$ , причем степень второго многочлена меньше степени первого многочлена.

В случае достаточно крупных пузырьков, когда можно пренебречь капиллярными эффектами, имеем  $f_0(H) = H^2 + A^2$ ,  $f_1(H) = \varepsilon H$ ,  $A = \sqrt{3\gamma N}$ ,  $\varepsilon = 3(\gamma - 1)$ .

Последний член  $-1$  в выражении для  $\text{Kh}(H)$  (11) можно объединить с первым членом в (10). Однако в механических задачах именно коэффициент перед  $\text{Kh}(H)$  имеет физический смысл, поэтому такое объединение не имеет смысла.

Заметим, что  $\text{Kh}(H)$  является мероморфной функцией на всей комплексной плоскости  $\zeta$  (ветвления в точках  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \infty$  отсутствуют), при этом функция  $\text{Kh}(H)$  не зависит от выбора знака перед квадратным корнем. Поэтому можно считать, что  $\sqrt{H} = x + iy$  при  $x > 0$  или  $x = 0, y \geq 0$ . Докажем следующую лемму.

**Лемма.** *Справедливо представление функции  $\text{cth}(x + iy)$  и ее модуля*

$$\text{cth}(x + iy) = \frac{\text{sh}(2x) - i \sin(2y)}{\text{ch}(2x) - \cos(2y)},$$

$$|\text{cth}(x + iy)| = \sqrt{\frac{\text{ch}(2x) + \cos(2y)}{\text{ch}(2x) - \cos(2y)}} = \sqrt{\frac{\text{sh}^2 x + \cos^2 y}{\text{sh}^2 x + \sin^2 y}}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Функцию  $\text{cth}(x + iy)$  представим в виде

$$\text{cth}(x + iy) = \frac{\exp(x + iy) + \exp(-x - iy)}{\exp(x + iy) - \exp(-x - iy)} = \frac{\text{ch } x \cos y + i \text{sh } x \sin y}{\text{sh } x \cos y + i \text{ch } x \sin y}.$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю число, находим

$$\text{cth}(x + iy) = \frac{\text{ch } x \text{sh } x (\cos^2 y + \sin^2 y) + i \sin y \cos y (\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x)}{\text{sh}^2 x \cos^2 y + \text{ch}^2 x \sin^2 y}.$$

Перейдя к двойным аргументам (умножением на 2 числителя и знаменателя), получаем

$$\text{cth}(x + iy) = \frac{\text{sh}(2x) - i \sin(2y)}{(\text{ch}(2x) - 1) \cos^2 y + (\text{ch}(2x) + 1) \sin^2 y} = \frac{\text{sh}(2x) - i \sin(2y)}{\text{ch}(2x) - \cos(2y)}.$$

Вычислим модуль этого выражения:

$$|\text{cth}(x + iy)| = \sqrt{\frac{\text{sh}^2(2x) + \sin^2(2y)}{(\text{ch}(2x) - \cos(2y))^2}}.$$

Учитывая, что

$$\text{sh}^2(2x) + \sin^2(2y) = \text{ch}^2(2x) - 1 + \sin^2(2y) = \text{ch}^2(2x) - \cos^2(2y),$$

и разлагая члены данного выражения на множители, находим

$$|\text{cth}(x + iy)| = \sqrt{\frac{\text{ch}(2x) + \cos(2y)}{\text{ch}(2x) - \cos(2y)}}.$$

Переходя от двойных аргументов к одинарным, получаем искомое представление для  $|\text{cth}(x + iy)|$ .

Из полученного для функции  $\text{cth}(x + iy)$  представления

$$\text{cth}(x + iy) = \frac{\text{sh}(2x) - i \sin(2y)}{\text{ch}(2x) - \cos(2y)}$$

следует, что полюсами функции  $\text{Kh}(H)$  являются точки

$$x = 0, \quad y = \pi n, \quad H = (iy)^2 = -(\pi n)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а нулями — решения уравнения  $\text{tg } y = y, H = -y^2$ .

Полюсы функции  $\text{Kh}(H)$  являются полюсами и для характеристической функции  $f(H)$ , а нули вида  $H_n = -y_n^2, n\pi < y_n < (n + 1)\pi$  являются также нулями функции  $f(H)$ , поскольку функция  $f(-y^2)$  принимает действительные значения и в каждом из

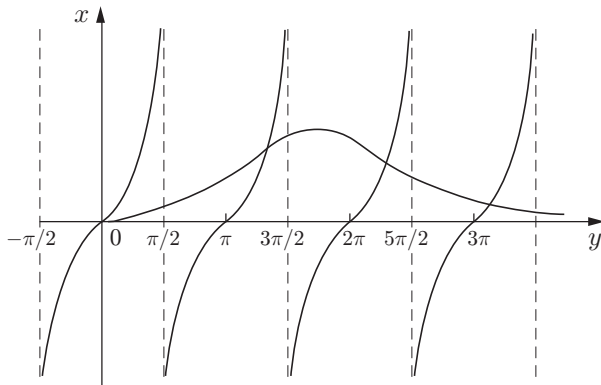


Рис. 1

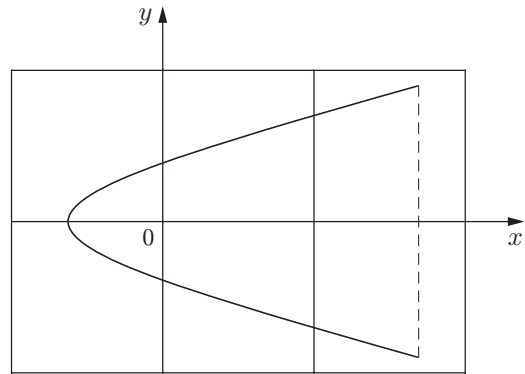


Рис. 2

Рис. 1. Графический способ определения корней уравнения (12)

Рис. 2. Контур области, в которой применяется принцип аргумента

указанных интервалов меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Эти нули (вычисляемые как действительные корни уравнения  $f_0(-y^2) + f_1(-y^2)(y \operatorname{ctg}(y) - 1) = 0$ ) определяют быстроубывающие решения без колебаний ( $H$  — отрицательное действительное число). Последнее уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} y = \frac{y f_1(-y^2)}{f_0(-y^2) - f_1(-y^2)}, \tag{12}$$

откуда следует, что в интервале  $n\pi < y_n < (n + 1)\pi$  характеристическое уравнение имеет бесконечное число действительных корней. На рис. 1 показан качественный вид кривых, описываемых левой и правой частями уравнения (12), для случая  $f_0(H) = H^2 + A^2$ ,  $f_1(H) = \varepsilon H$ ,  $A = \sqrt{3\gamma N}$ ,  $\varepsilon = 3(\gamma - 1)$  в задаче о колебаниях достаточно крупного пузырька при учете неоднородностей температуры внутри него.

Возникает вопрос о наличии других нулей (при этом нули могут появиться и на отрицательной части прямой). Особый интерес представляют нули с положительной действительной частью (неустойчивости). Рассмотрим область, ограниченную прямой  $y \leq \pi(n + 1/4)$  при  $\sqrt{H} = x + iy$ . В плоскости  $H$  эта область ограничена параболой (рис. 2):

$$\operatorname{Re} H \geq \left( \frac{\operatorname{Im} H}{2\pi(n + 1/4)} \right)^2 - \pi^2(n + 1/4)^2.$$

Поскольку согласно лемме на границе области и в бесконечности  $|\operatorname{cth}(x + iy)| = 1$ , при больших  $H$  имеет место неравенство  $|f_0(H)| > |f_1(H)|$ . Следовательно, вдоль границы рассматриваемой области аргумент функции  $f(H)$  изменяется так же, как аргумент функции  $f_0(H)$ . Из принципа аргумента [4] следует, что при достаточно большом  $n$  разность количества нулей и полюсов в этой области равна  $N - P = \operatorname{deg}(f_0)$ . В частности, для указанной выше характеристической функции помимо действительных нулей имеется пара комплексно-сопряженных нулей. Это свойство имеет место для любой правильной характеристической функции (все комплексные нули входят в пары комплексно-сопряженных чисел).

В рассмотренном примере функция  $f_1(H)$  имеет малый множитель. В этом случае в отсутствие кратных корней у функции  $f_0(H) = 0$  поиск нетривиальных нулей характеристической функции сводится к следующей итерационной процедуре. Пусть  $H_0$  — некото-

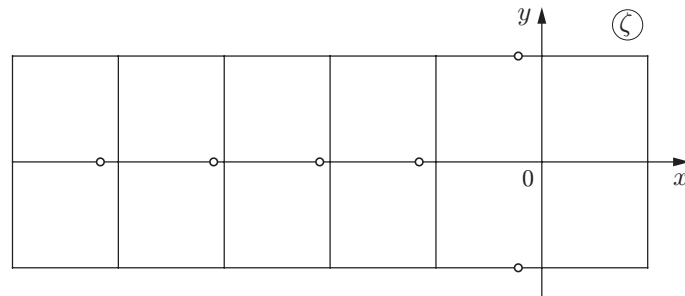


Рис. 3. Положение корней характеристического уравнения (10) на плоскости  $\zeta$

рый нуль  $f_0(H)$ , тогда  $H_{k+1} = f_0^{-1}(-f_1(H_k) \text{Kh}(H_k))$  ( $f_0^{-1}$  — локальная обратная функция вблизи соответствующего нуля функции  $f_0(H)$ ).

Вычислим корни характеристической функции  $H^2 + A^2 + \varepsilon H(H^{1/2} \text{cth}(H^{1/2}) - 1) = 0$  в первом приближении по  $\varepsilon$ :

$$H \approx iA\sqrt{1 + (\varepsilon i/A) \text{Kh}(iA)} \approx iA - (\varepsilon/2) \text{Kh}(iA). \quad (13)$$

Вводя  $a = \sqrt{2A}$  и учитывая, что  $H^{1/2} = a(1+i)/2$ , с использованием леммы получаем выражение

$$\text{Kh}(iA) = \frac{a(1+i)}{2} \frac{\text{sh } a - i \sin a}{\text{ch } a - \cos a} - 1 = \frac{a(\text{sh } a + \sin a)}{2(\text{ch } a - \cos a)} - 1 + i \frac{a(\text{sh } a - \sin a)}{2(\text{ch } a - \cos a)}.$$

Подставляя это выражение в формулу (13), находим приближенные значения двух сопряженных корней

$$H \approx \pm iA \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\text{sh } a - \sin a}{\text{ch } a - \cos a} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{(a/2)(\text{sh } a + \sin a) - \text{ch } a + \cos a}{\text{ch } a - \cos a} \right).$$

Следует отметить, что выражение в квадратных скобках всегда положительно, поэтому действительная часть корней отрицательна. При этом все действительные корни по абсолютной величине превышают действительную часть комплексных корней (рис. 3).

Нетрудно показать, что

$$0 < \frac{\text{sh } a - \sin a}{2a(\text{ch } a - \cos a)} < \frac{1}{6}.$$

Из этих неравенств следует, что при увеличении  $\varepsilon$  от нуля частота колебаний незначительно уменьшается. Путем дифференцирования легко установить, что у последней дроби положителен не только знаменатель, но и числитель. Это означает, что соответствующие решения являются более устойчивыми. Однако в реальных ситуациях эти решения убывают (колеблясь) существенно медленнее даже наиболее медленно затухающего (без колебаний) решения (значение  $\varepsilon$  мало). Ранее принцип аргумента использовался в работе [5] при исследовании структуры корней дисперсионного уравнения. Обзор работ по данной тематике приведен в [6].

Таким образом, доказано, что все корни характеристического уравнения, кроме двух комплексно-сопряженных, имеющих отрицательную действительную часть, являются отрицательными действительными числами и по абсолютной величине превышают действительную часть комплексных корней, т. е. быстро затухают и не вносят существенного вклада в общее решение. Следует отметить, что корни с положительной действительной частью, вызывающие неустойчивость, отсутствуют. Это свидетельствует о корректности результатов работ [1, 3], в которых характеристические трансцендентные уравнения

решались численно, при этом находились лишь комплексно-сопряженные корни и на их основе вычислялся декремент затухания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Chapman R. B., Plesset M. S.** Thermal effects in the free oscillations of gas bubbles // Trans. ASME. Ser. D. 1971. V. 93, N 3. P. 373.
2. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2.
3. **Nigmatulin R. I., Khabeev N. S., Nagiev F. B.** Dynamics, heat and mass transfer of gas-vapour bubbles in liquids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1981. V. 24, N 6. P. 1033–1044.
4. **Mathews J. H.** Complex analysis for mathematics and engineering / J. H. Mathews, R. W. Howell. L.: Jones and Bartlett, 2006.
5. **Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш.** Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена // ПМТФ. 1977. № 3. С. 67–74.
6. **Bubble** and particle dynamics in acoustic fields. Modern trends and applications / Ed. by A. A. Doinikov. Kerala (India): Res. Singpost, 2005.

*Поступила в редакцию 29/IX 2008 г.*

---