

**УСТОЙЧИВОСТЬ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ
В ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ**

А. Г. Петров

(Москва)

В [1,2] рассматривается стационарное движение пузыря в форме эллипсоида вращения. В [3] при помощи уравнений Лагранжа изучено стационарное движение и малые колебания эллипсоида вращения вблизи равновесия.

В данной работе исследуются возможные фигуры равновесия пузыря в форме трехосного эллипсоида. Для стационарного движения найдена зависимость разности давлений в точке торможения и внутри газового пузыря от его деформации.

Путем анализа потенциальной энергии в окрестности точки экстремума исследуется устойчивость фигур равновесия по отношению к малым возмущениям осей эллипсоида.

1. Функции Лагранжа и Рауса. В идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, движется газовый пузырь. Предполагается, что давление p газа внутри пузыря постоянно и является функцией объема пузыря V . Тогда функция Лагранжа, определяющая динамику пузыря, равна

$$L = T - \sigma S - p_{\infty} V + \int p(V) dV$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, S и V — площадь поверхности и объем пузыря. Кинетическая энергия жидкости T является квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + v \sum_i M_i \dot{q}_i + \sum_i \sum_j \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Здесь v — скорость поступательного смещения пузыря (для простоты предполагается, что отлична от нуля только одна компонента вектора скорости). Присоединенные массы M , M_i , M_{ij} являются функциями обобщенных координат q_i , определяющих объем и форму пузыря.

Вследствие однородности пространства динамической системы, справедлив закон сохранения импульса

$$(1.1) \quad P = \partial T / \partial v$$

Уравнения движения пузыря с заданным импульсом P могут быть получены из функции Рауса [4]

$$(1.2) \quad R = L - v P$$

Скорость v следует выразить через импульс P и обобщенные скорости \dot{q}_i при помощи уравнения сохранения импульса (1.1).

Функция Рауса (1.2) является функцией Лагранжа приведенной системы с позиционными обобщенными координатами q_i .

2. Потенциальная энергия системы. Второе слагаемое, взятое с обратным знаком, входящее в функцию Рауса (1.2), не зависит от обобщенных скоростей \dot{q}_i , является потенциалом Рауса и играет роль потенциальной энергии приведенной системы.

Потенциальная энергия U равна

$$(2.1) \quad U = P^2 / 2 M + \sigma S + p_{\infty} V - \int p(V) dV$$

Следуя [4], стационарным движением назовем движение, при котором координаты, определяющие объем и форму пузыря (позиционные координаты) сохраняют постоянные значения. Согласно данному определению стационарное движение есть стационарное движение пузыря в однородном потоке жидкости. Так как стационарному движению соответствует положение равновесия приведенной системы с функцией Лагранжа (1.2), то необходимое условие существования такого движения выражается в виде равенства нулю первой вариации потенциальной энергии $\delta U = 0$. Если система обладает конечным числом степеней свободы, то необходимое условие записывается в виде

$$\partial U / \partial q_i = 0$$

Если в качестве одной из обобщенных координат выбрать объем V , то это условие дает точное соотношение, для получения которого нужно учесть, что $M \sim V$, $S \sim V^{2/3}$

$$(2.2) \quad (p_0 - p_{\infty}) V_0 = 2/3 \sigma S_0 - 1/2 M v_0^2$$

Здесь и далее индекс 0 означает, что соответствующая величина относится к стационарному движению.

Достаточным условием устойчивости стационарного движения является положительная определенность второй вариации $\delta^2 U > 0$ или для системы с конечным числом степеней свободы должна быть положительно определенной квадратичная форма второго дифференциала потенциальной энергии.

Функции M , S , входящие в (2.1), можно выразить через безразмерные m , s , не зависящие от объема пузыря

$$(2.3) \quad M = 4/3 \pi \rho l^3 m, \quad S = 2/3 \pi l^2 s, \quad V = 4/3 \pi l^3$$

Здесь l — радиус сферы, объем которой совпадает с объемом пузыря.

Пусть l_0 , m_0 — значения l , m в положении равновесия, v_0 — скорость стационарного движения пузыря, p_0 — давления газа внутри пузыря в положении равновесия, когда объем пузыря равен V_0 . Пусть z — безразмерный параметр, определяющий отклонение объема пузыря от равновесного значения

$$(2.4) \quad l = l_0 (1 + z)$$

Тогда, подставляя (2.3), (2.4) в (2.1) и опуская постоянный размерный множитель $4/3 \pi \rho l_0^3 v_0^2$, можно получить выражение потенциальной энергии через безразмерные функции

$$(2.5) \quad U = (1 - 3z + 6z^2) \frac{m_0^2}{2m} + \frac{1}{W} \left[(1 + 2z + z^2) s + \pi_{\infty} (3z + 3z^2) - \right. \\ \left. - \pi_0 \left(3z + \frac{3}{2} (2 - 3\gamma) z^2 \right) \right] \\ W = \frac{2l_0 \rho v_0^2}{\sigma}, \quad \pi_{\infty} = \frac{p_{\infty} 2l_0}{\sigma}, \quad \pi_0 = \frac{p_0 2l_0}{\sigma} \\ \gamma = - \frac{V_0}{p_0} \frac{dp}{dV} \Big|_{V=V_0}$$

Выражение для U (2.5) написано с точностью до малых z второго порядка, что необходимо для исследования устойчивости. В случае политропического процесса γ совпадает с показателем политропы.

Для пузыря в форме трехосного эллипсоида с полуосями l_x, l_y, l_z , скорость v которого направлена параллельно полуоси l_z , функции m и s могут быть вычислены явным образом. Трехосный эллипсоид можно задать при помощи параметра l , определяющего объем, и двух других безразмерных параметров x, y

$$(2.6) \quad \begin{aligned} l_x &= \sqrt{a} l, \quad l_y = \sqrt{b} l, \quad l_z = \sqrt{c} l \\ a &= (1-x)^{-2/3} (1-y)^{1/3}, \quad b = (1-x)^{1/3} (1-y)^{-2/3} \\ c &= (1-x)^{1/3} (1-y)^{1/3} \end{aligned}$$

Функции $m(x, y)$ и $s(x, y)$ равны [5]

$$(2.7) \quad \begin{aligned} m &= I / (2 - J), \quad s = 3(c + \varphi / \sqrt{c}) \\ I &= \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}}, \quad \varphi = \int_0^1 \frac{(1-x\lambda^2)d\lambda}{\sqrt{(1-x\lambda^2)(1-y\lambda^2)}} \end{aligned}$$

Для осесимметричного эллипсоида $x = y$ функции I и φ , а следовательно, и m, s и потенциальная энергия U выражаются через элементарные функции

$$(2.8) \quad \begin{aligned} I(x, x) &= \frac{2}{x} \left(1 - \sqrt{\frac{1-x}{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \right) \\ \varphi(x, x) &= x + \frac{1-x}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

В случае малой деформации осесимметричного эллипсоида ($x \ll 1$)

$$(2.9) \quad m(x, x) = \frac{1}{2} (1 + \frac{3}{5} x + \frac{81}{175} x^2), \quad s(x, x) = 6 (1 + \frac{2}{45} x^2)$$

3. Условия равновесия. Формула (2.4) совместно с (2.5) и (2.6) определяет зависимость потенциальной энергии от параметров трехосного эллипсоида $U(x, y, z)$. Принимая параметры x, y, z за обобщенные координаты, можно получить уравнения, определяющие стационарное движение

$$(3.1) \quad \partial U / \partial x = 0, \quad \partial U / \partial y = 0, \quad \partial U / \partial z = 0 \quad \text{при } z = 0$$

Первые два уравнения определяют фигуру равновесия в зависимости от значения числа Вебера. Исключая число Вебера W из этих уравнений, можно найти кривую, определяющую серию фигур равновесия

$$(3.2) \quad \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\partial m}{\partial x} = 0$$

Уравнение (3.2) определяет серию осесимметричных фигур равновесия $x = y$. Численный анализ уравнения (3.2) показывает, что, кроме этой серии, других фигур равновесия не существует.

Для осесимметричной серии эллипсоидов уравнения (3.1) позволяют определить зависимость чисел W и $\Delta\pi = \pi_0 - \pi_\infty$ от степени деформации эллипсоида. Поскольку при $x = y$ частные производные по x и y равны половине полной производной по x от соответствующих функций, то эти зависимости могут быть найдены при помощи (2.8) по формуле

$$(3.3) \quad W = 2 \frac{ds}{dx} / \frac{dm}{dx}, \quad \Delta\pi = \frac{2}{3} s - \frac{1}{2} mW$$

Первая зависимость была определена в [1-3] (фиг. 1, кривая 1) График второй зависимости от степени деформации эллипсоида $\chi = l_x / l_z$ изображен на фиг. 1, кривая 2 ($3\Delta\pi(\chi)$).

Представляет интерес зависимость $3\Delta\pi' = 6(p_0 - p_*) l / \sigma$ (p_* — давление в точке торможения). Из интеграла Бернулли следует, что $\Delta\pi' = \Delta\pi - 1/2 W$. График этой зависимости также изображен на фиг. 1 (кривая 3). Обращение в нуль функции $\Delta\pi'$ в точке $\chi = 4.83$ физически означает, что кривизна поверхности пузыря в точке, находящейся на оси вращения, обращается в нуль, а при больших χ поверхность пузыря в этой точке становится вогнутой.

В [6] рассматривалась соответствующая плоская задача. Зависимости $W(\chi)$, $\Delta\pi(\chi)$, найденные в этой работе на основе точного численного

решения, качественно совпадают с (3.3).

Для малых деформаций ($W \ll 1$) при помощи (2.9) могут быть найдены разложения по малым x или малым W в формулах (3.3)

$$(3.4) \quad W = \frac{32}{9} x (1 + \frac{8}{105} x) \\ \Delta\pi = 4 - \frac{1}{4} W - \frac{9}{320} W^2$$

4. Условия устойчивости.

Анализируя функцию (2.5), можно найти критерий устойчивости фигуры равновесия относительно малых, не обязательно

осесимметричных возмущений формы и объема пузыря. Эти возмущения задаются отклонениями x, y, z от положения равновесия.

Для устойчивого положения равновесия достаточно, чтобы в точке равновесия потенциальная энергия U достигала наименьшего значения или

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{vmatrix} > 0$$

При раскрытии определителей можно пользоваться тем, что в положении равновесия $x = y, z = 0$

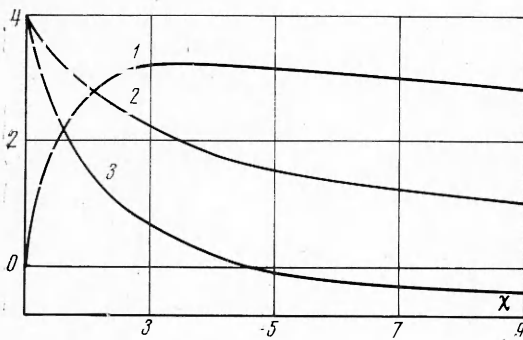
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dx^2}$$

Условия (4.1) приводятся к виду

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \frac{d^2 U}{dx^2} > 0 \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{d^2 U}{dx^2} - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] > 0$$

Первые два условия эквивалентны следующим:

$$(4.3) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) U > 0$$



Фиг. 1

С учетом (4.3) последнее условие (4.2) принимает вид

$$(4.4) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{d^2 U}{dx^2} - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 > 0$$

Совместное выполнение условий (4.3), (4.4) эквивалентно условиям (4.2).

Расчеты существенно упрощаются, если воспользоваться следующими соотношениями в точке $x = y$:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) I = \frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} I(x, x) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Phi = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4} \frac{d^2 \Phi(x, x)}{dx^2} \end{cases}$$

Эти соотношения могут быть доказаны непосредственным дифференцированием под знаком интеграла функций (2.7). Первое соотношение (4.5) можно доказать исходя из того, что I и все частные производные от I по x и y являются однородными функциями a, b, c .

Левые части неравенств (4.3), (4.4) определяются из (2.5) — (2.7), а с учетом (4.5) задача сводится к дифференцированию элементарных функций (2.8).

Первое неравенство (4.3) удовлетворяется при всех значениях числа W и означает условие устойчивости стационарного движения эллипсоида вращения относительно осесимметричных возмущений при постоянном объеме. Этот результат получен в [3].

Расчет показывает, что второе условие (4.3) также всегда выполняется. Выполнение обоих условий (4.3) означает, что любое стационарное движение устойчиво относительно возмущений осей трехосного эллипсоида при постоянном объеме.

Последнее неравенство (4.4) является условием устойчивости стационарного движения относительно малого возмущения объема и осесимметричного возмущения формы. Условие устойчивости относительно только малого возмущения объема сводится к неравенству

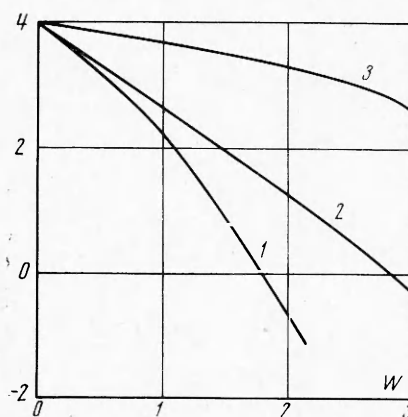
$$(4.6) \quad \partial^2 U / \partial z^2 > 0$$

При помощи (2.5) — (2.8) условия (4.4), (4.6) преобразуются к виду

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \pi_\infty > \frac{1}{\gamma} f - \Delta \pi, \quad \pi_\infty > \frac{1}{\gamma} f_1 - \Delta \pi \\ f_1 = \frac{2}{9} s - mW, \quad f = f_1 + W \left(\frac{5}{6} \frac{dm}{dx} \right)^2 / \frac{d^2 U}{dx^2} \end{aligned}$$

Эти условия определяют критическое значение давления жидкости на бесконечности, меньше которого не существует устойчивого стационарного движения. Из (2.7), (2.8), (3.4) и (4.7) можно найти разложения функций f и f_1 по малым числам W с точностью до членов порядка W^2

$$(4.8) \quad f_1 = 4/3 - 1/2 W - 51/640 W^2, \quad f = 4/3 - 1/2 W + 3/80 W^2$$



Фиг. 2

На фиг. 2 изображены зависимости $3f_1(W)$, $3f(W)$, $\Delta\pi(W)$ (кривые 1, 3 соответственно).

5. Модель сферического пузыря. Анализ условий равновесия и устойчивости стационарного движения можно провести при помощи модели сферы. В этом случае пузырь имеет лишь одну степень свободы, определяющую объем пузыря. В соответствующей формуле для U (2.5), следует положить $s = 6$, $m = 1/2$.

Потенциальная функция $U(z)$ зависит только от z .

Условие равновесия определяет зависимость

$$(5.1) \quad \Delta\pi = 4 - \frac{1}{4}W$$

Условие устойчивости $d^2U/dz^2 > 0$ имеет вид

$$(5.2) \quad \pi_\infty > \frac{1}{\gamma}f - \Delta\pi, \quad f = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}W$$

Сравнение формул (5.1) и (3.4), (5.2) и (4.8) показывает, что модель сферы дает правильную асимптотическую зависимость $\Delta\pi(W)$, $f(W)$ при малых числах Вебера. При $W = 0$ формулы (5.1), (5.2) дают точные соотношения для устойчивого равновесия сферического пузыря под действием сил давления газа и жидкости и силы поверхностного натяжения

$$p_0 = p_\infty = \frac{2\sigma}{l}, \quad l > \frac{\sigma}{p_\infty} \left(\frac{2}{3\gamma} - 2 \right)$$

Поступила 17 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М. Определение формы газового пузыря в осесимметричном потоке жидкости. ПМТФ, 1963, № 3.
2. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech, 1965, vol. 23, pt 4.
3. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1970, № 3.
4. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
6. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.