ЛИТЕРАТУРА

1. **Хашин З.** Упругие модули неоднородных материалов // Прикл. механика.— 1962.— Т. 29, № 1.
2. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
3. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
4. **Хилл Р.** Упругие свойства составных сред; некоторые теоретические принципы // Механика: Сб. пер. иностр. лит.— 1964.— № 5.
5. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.
6. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
7. **Киселев С. П.** Упругопластическая модель деформирования пористого материала // Фильтрация многофазных систем.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1991.
8. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П.** и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах.— Новосибирск: Наука, 1992.
9. **Гарсон А. Л.** Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор. Ч. 1. Критерий текучести и законы течения для пористой пластической среды // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теорет. основы инж. расчетов.— 1977.— № 1.
10. **Соколовский В. В.** Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
11. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности.— М.: ГИТЛ, 1956.
12. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.
13. **Tvergaard V.** Numerical study of localization in a void-sheet // Int. J. Solids Structures.— 1989.— V. 25, N 10.

г. Новосибирск *Поступила 15/V 1992 г., в окончательном варианте — 20/I 1993 г.*

УДК 532

Б. Г. Кузнецов

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

1. Сравнение скоростей распространения возмущений при использовании моделей Эйлера и Навье — Стокса приводит к весьма странным выводам: в то время как в идеальном газе эта скорость в полном соответствии с опытом конечна и равна скорости звука, в вязком газе (т. е. в модели, призванной более аккуратно отражать свойства реальных газов) она бесконечна. Последнее, естественно, не может не вызывать некоторых сомнений в безусловной справедливости уравнений Навье — Стокса. Возникает желание разобраться в причинах данного парадокса и попытаться их устранить.

Рассмотрим в связи с этим сначала простейшую модель — модель баротропной среды с уравнением состояния $p = a^2\rho$, где $a = \mathrm{const}$ — скорость звука, p — давление, ρ — плотность. Уравнения, описывающие движение такой среды при отсутствии массовых сил, имеют вид

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v}) + \operatorname{grad} p = \operatorname{div}(2\mu D).$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость; D — тензор скоростей деформации; μ — коэффициент вязкости, равный нулю в случае идеального газа (второй вязкостью ради простоты пренебрегается). Уравнения характеристик (всюду в дальнейшем они будут приводиться для случая одномерного движения) при $\mu = 0$ следуют из соотношения [1]

$$\begin{vmatrix} \omega_t + u\omega_x, & \rho\omega_x \\ a^2\omega_x, & \rho(\omega_t + u\omega_x) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\omega(t, x) = \text{const}$ — семейство искомых характеристик; u — скорость в одномерном движении. Отсюда следует, что в случае идеального газа имеются два семейства характеристик, задаваемых уравнениями

$$\omega_t + u\omega_x = \pm a\omega_x.$$

Это означает, что возмущения (т. е. разрывы производных от плотности и скорости первого и более высоких порядков), если они возникают, распространяются по газу со скоростью звука a.

В случае одномерного движения вязкого газа характеристики задаются соотношением

$$\begin{vmatrix} \omega_t + u\omega_x, & 0 \\ a^2\omega_x, & -2\mu\omega_x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

из которого следует, что здесь возникает семейство сдвоенных характеристик $t = \text{const}$, т. е. распространение некоторых возмущений происходит мгновенно. Но это противоречит как отмеченному выше опытному факту о распространении возмущений со скоростью звука, так и общепринятому в настоящее время положению о невозможности мгновенного распространения любых возмущений, связанных с переносом энергии.

Таким образом, приходим к выводу о необходимости некоторого изменения уравнений, описывающих движение вязкого газа, которое привело бы к конечной скорости распространения возмущений.

2. Понятно, что погрешность, приводящая к мгновенной передаче возмущений в вязком газе, кроется где-то в основных предположениях, основных аксиомах, используемых при выводе уравнений движения. Проанализируем в связи с этим вывод уравнений (1.1) из законов сохранения механики. При этом следует заметить, что строгого обоснования справедливости законов сохранения механики для сплошных (и, в частности, вязких) сред нет — по существу, эти законы только постулируются. Последнее означает, что их применимость не подвергается сомнению тогда и только тогда, когда следствия из этих законов не противоречат данным опыта. В нашем же случае как раз и возникает ситуация, когда следствие законов сохранения (бесконечная скорость распространения возмущений) противоречит опытному факту — распространению возмущений с конечной скоростью звука. Таким образом, при анализе вывода уравнений (1.1) следует обратить внимание на законы сохранения, особенно там, где проявляется вязкость (т. е. учитывается тепловое движение молекул).

Полезно напомнить рассуждения, приводящие к уравнениям (1.1). Введем подвижный объем τ, образ которого в лагранжевых переменных τ_0 постоянен. Законы сохранения массы и импульса имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho v dx = \int_{S} \sigma\cdot n dS. \tag{2.1}$$

Здесь σ — тензор напряжений: $\sigma = 2\mu D - pI$; S — поверхность, ограничивающая объем τ; n — нормаль к ней; I — единичный тензор. Пользуясь далее известными формулами Эйлера, произвольностью объема τ, получаем при соответствующей гладкости функций уравнения (1.1).

Обнаружить какие-либо изъяны в приведенных рассуждениях, предполагая справедливость соотношений (2.1), не удается, так что единственный путь, остающийся для «исправления» уравнений (1.1),— путь, связанный с изменением формулировки законов сохранения, а именно той их части, которая связана с тепловым движением молекул. Поэтому обратимся к рассмотрению еще более простой проблемы — теплопередаче в неподвижной среде. Согласно закону сохранения тепла, можно записать

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} W dx = \int_{S} \lambda \frac{\partial W}{\partial n} dS, \tag{2.2}$$

где W — количество тепла в единице объема; λ — коэффициент теплопроводности; τ — произвольный неподвижный объем. Из (2.2) следует известное уравнение теплопроводности:

$$W_t = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} W). \tag{2.3}$$

Здесь, как и в случае вязкого газа, распространение возмущений происходит мгновенно. Обратим внимание на то, что как в задаче теплопроводности, так и в задачах о движении вязкого газа бесконечная скорость распространения возмущений возникает там, где учитывается тепловое движение молекул. В связи с этим естественно предположить, что именно при толковании теплового движения молекул в законах сохранения механики и допускается некая погрешность, приводящая к парадоксу с бесконечной скоростью распространения возмущений.

Анализ простейшего соотношения (2.2) приводит к мысли, что единственная возможность получить уравнение, управляющее теплопередачей с конечной скоростью распространения возмущений, состоит в том, что правую и левую части соотношения (2.2) следует рассматривать в разные моменты времени. Иными словами, закон сохранения тепла нужно записывать в виде

$$\left[\frac{d}{dt}\int_\tau W dx\right]_{t+\alpha} = \left[\int_S \lambda \frac{\partial W}{\partial n} dS\right]_t, \tag{2.4}$$

где правая часть рассматривается в момент времени t, а левая — в момент $t+\alpha$ $(\alpha > 0)$. Последнее может быть результатом того, что процесс обмена энергией между молекулами во время соударений при тепловом движении происходит не мгновенно, а за некоторый конечный промежуток времени, что влечет за собой запаздывание в изменении W. Заметим, что системы с запаздыванием действия широко распространены в природе. Так, при гравитационном взаимодействии материальных тел сила взаимодействия определяется их положением с учетом времени прохождения сигнала от тела к телу, т. е. с запаздыванием, величина которого при небольших расстояниях между телами очень мала, но играет важную роль в небесной механике.

Из закона сохранения (2.4) при малом α можно получить приближенное (с точностью до первой степени α включительно) уравнение

$$W_t + \alpha W_{tt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} W) \tag{2.5}$$

гиперболического типа, характеристики которого хорошо известны:

$$\omega_t = \pm\sqrt{\lambda/\alpha}\,\omega_x.$$

Таким образом, учет запаздывания результата действия в соотношении (2.4) позволил получить уравнение, описывающее процесс распространения тепла без мгновенной передачи возмущений.

Следует заметить, что вопрос о конечности скорости распространения тепла ставится не в первый раз. Еще в [2] обращалось внимание на необходимость рассмотрения в некоторых случаях конечной скорости теплообмена. Автор [3] высказал предположение об ограниченности скорости диффузии массы и теплоты и, развивая принцип Пригожина, получил обобщенную систему линейных уравнений Онзагера, из которой следовали гиперболические уравнения теплопроводности и диффузии, аналогичные полученному нами из уточненного закона сохранения (2.4) уравнению (2.5). По существу, при выводе гиперболических уравнений тепломассопереноса в [3] учитывалось время релаксации, т. е. также вводилось запаздывание. Для наших целей, заключающихся в выводе уточненных уравнений движения вязкого газа, более удобно воспользоваться рассуждениями, с помощью которых получено соотношение (2.4).

3. Итак, согласно изложенному выше, при выводе уравнений движения вязкого газа во всех случаях, когда учитывается тепловое движение молекул, в формулировке законов сохранения следует вводить запаздывание. В частности, закон сохранения импульса должен иметь вид

$$\left[\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau} \rho \mathrm{v} dx\right]_{t+\alpha} = \left[\int\limits_{S} \sigma\cdot \mathrm{n} dS\right]_t$$

или после обычных преобразований

$$\left[\int\limits_{\tau} \rho\frac{d\mathrm{v}}{dt}\, dx\right]_{t+\alpha} = \left[\int\limits_{\tau} \mathrm{div}\,\sigma dx\right]_t, \tag{3.1}$$

где, как обычно,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\mathrm{grad}.$$

Заметим, что в отличие от случая распространения тепла в неподвижной среде подвижный объем в (3.1) в моменты времени t и $t+\alpha$ может быть разным, поэтому, прежде чем переходить к дифференциальному уравнению, как это делалось в теплопередаче, необходимо сначала перейти к лагранжевым переменным ξ^i, вспомнив, что образ подвижного объема в лагранжевых переменных один и тот же для всех моментов времени. В результате получим

$$\left[\int\limits_{\tau_0} \rho\, \frac{d\mathrm{v}}{dt}\,\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)}\, d\xi\right]_{t+\alpha} = \left[\int\limits_{\tau_0} \frac{\partial(x)}{\partial(\xi)}\,\mathrm{div}\,\sigma d\xi\right]_t,$$

откуда в силу произвольности τ_0

$$\left[\rho\,\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right]_{t+\alpha} \frac{\partial\,[x\,(t+\alpha,\,\xi)]}{\partial\,(\xi)} = [\mathrm{div}\,\sigma\,]_t\,\frac{\partial\,[x\,(t,\,\xi)]}{\partial\,(\xi)},$$

или после очевидных преобразований

$$\left[\rho\,\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right]_{t+\alpha} \frac{\partial\,[x\,(t+\alpha,\,\xi)]}{\partial\,[x\,(t,\,\xi)]} = [\mathrm{div}\,\sigma\,]_t. \tag{3.2}$$

По определению лагранжевых координат

$$v^i = \frac{dx^i}{dt},$$

поэтому приближенно, с точностью до первых степеней α включительно,

$$x^i\,(t+\alpha,\,\xi) = x^i\,(t,\,\xi) + \alpha v^i\,(t,\,\xi),$$

так что с этой степенью точности имеем выражение

$$\frac{\partial\,[x\,(t+\alpha,\,\xi)]}{\partial\,[x\,(t,\,\xi)]} = 1 + \alpha\,\mathrm{div}\,\mathrm{v},$$

подставляя которое в (3.2) и представляя с точностью до α (как и всюду ниже) величину $\rho\,[t+\alpha,\,\xi]$ в виде

$$\rho\,[t+\alpha,\,\xi] = \rho\,(t,\,\xi) + \alpha\,\frac{d\rho}{dt},$$

получим из (3.2) с указанной точностью

$$\rho\,(t,\,x)\left[\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right]_{t+\alpha} = [\mathrm{div}\,\sigma\,]_t, \tag{3.3}$$

или, что то же,

$$\rho\left[\frac{d\mathrm{v}}{dt} + \alpha\,\frac{d^2\mathrm{v}}{dt^2}\right] = \mathrm{div}\,\sigma.$$

Здесь правая и левая части уравнения рассматриваются для одного и того же момента времени. Таким образом, полная уточненная система уравнений, описывающая движение рассматриваемого газа при отсутствии массовых сил, примет вид

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \alpha \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right] = \operatorname{div} \sigma, \tag{3.4}$$

$$\sigma = 2\mu D - pI, \quad p = a^2\rho, \quad \mu = \mu(\alpha, \rho).$$

Уравнения характеристик в одномерном случае следуют из соотношения

$$\begin{vmatrix} \omega_t + u\omega_x, & 0 \\ a^2\omega_x - 2\dfrac{d\mu}{d\rho} u_x\omega_x, & \alpha\rho(\omega_t + u\omega_x)^2 - 2\mu\omega_x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

так что здесь имеются три семейства характеристик:

$$\omega_t + u\omega_x = 0, \quad \omega_t + u\omega_x = \pm \sqrt{2\mu/\alpha\rho}\,\omega_x.$$

Полагая

$$2\mu = \alpha\rho a^2, \tag{3.5}$$

получим, что и для вязкого газа распространение возмущений относительно движущегося газа будет происходить с конечной скоростью — скоростью звука. Очевидно, что при стремлении α к нулю уравнения (3.4) при условии (3.5) переходят в уравнение (1.1) для $\mu = 0$.

Рассмотрим вопросы постановки простейших начально-краевых задач для одномерных уравнений. Естественно потребовать, чтобы задачи для уравнений (3.4) при стремлении α к нулю переходили в соответствующие задачи для уравнений (1.1). Легко видеть, что в том и другом случае имеются два режима течений, отличающихся постановками начально-краевых задач: дозвуковой и сверхзвуковой. Мы ограничимся постановкой задачи только для сверхзвукового потока. В качестве области, где ищется решение, рассмотрим множество точек плоскости t, x, задаваемых неравенствами $0 < t < T$, $0 < x < l$. В этом случае начально-краевая задача для одномерного течения газа при $u > a$ для уравнений (1.1) может быть поставлена так:

$$\begin{aligned} &u = \varphi(x) > 0, \quad \rho = \psi(x) > 0, \quad t = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ &u = U(t) > 0, \quad \rho = V(t) > 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad x = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для уравнений (3.4) число условий на границе, естественно, должно быть увеличено, но добавочные условия надо сформулировать так, чтобы при стремлении α к нулю они были следствием условий (3.6) и уравнений (1.1). Последнее можно обеспечить, если дополнительные условия задать в виде

$$u_t = f(\alpha, x) - \varphi\varphi_x - a^2\psi_x/\psi, \quad t = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l;$$

$$U_t(t)\, u_x = F(\alpha, t) - \frac{dU}{dt} - a^2\rho_x/V(t), \quad 0 < t < T, \quad x = 0.$$

При этом функции $f(\alpha, x)$, $F(\alpha, t)$ должны удовлетворять требованиям

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha, x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad \lim_{\alpha\to 0} F(\alpha, t) = 0, \quad 0 < t < T.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае начально-краевая задача для уравнений (3.4) при стремлении α к нулю переходит в задачу для уравнений (1.1). Можно ожидать, что и решение задачи о течении вязкого газа перейдет в решение задачи о течении идеального газа.

Возникает вопрос: когда следует вместо обычных уравнений (1.1) пользоваться уточненными уравнениями (3.4)? Для ответа на него произведем, как обычно, переход к безразмерным переменным, введя характерный размер l, характерную скорость — скорость звука a — и характерное время θ, задающее частоту, с которой необходимо получать информацию о процессе. В результате в безразмерных переменных уравнения (3.4) представим в форме

$$\rho_t + B\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{3.7}$$

$$\rho\left[\frac{dv}{dt} + A\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right] + B\,\mathrm{grad}\,\rho = AB^2\,\mathrm{div}\,(\rho D),$$

где безразмерные параметры A, B имеют вид

$$A = \alpha/\theta, \quad B = a\theta/l,$$

при этом

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + B\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}.$$

Из анализа уравнений (3.7) видно, что обычными уравнениями можно пользоваться, когда $A \ll 1$, но $B \gg 1$, так что величина AB^2 становится существенной. Иными словами, уравнениями (1.1) можно пользоваться в тех случаях, когда частота, с которой необходимо выдавать информацию, мала ($\theta \gg \alpha$), а скорость звука велика по сравнению с величиной l/θ. Однако и при выполнении этих условий уточненные уравнения позволяют выявить некоторые интересные свойства течений вязкого газа. Рассмотрим в связи с этим вопрос о диссипации механической энергии. Удобства ради будем помечать величины, вычисленные в момент времени $t + \alpha$, звездочкой внизу, оставляя для величин, вычисляемых в момент t, обычные обозначения. Из закона сохранения импульса (3.3) после умножения на v_* получим

$$\rho\left[\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right]_* = \mathbf{v}_*\cdot\mathrm{div}\,\sigma = (\mathbf{v}\cdot\mathrm{div}\,\sigma) + \alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathrm{div}\,\sigma,$$

или, что то же, с точностью до величин порядка α включительно

$$\rho\left[\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right]_* = \mathrm{div}\,(\sigma\cdot\mathbf{v}) - \sigma : D + \alpha\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{3.8}$$

После очевидных преобразований его можно переписать как

$$\rho\left[\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right]_* = \alpha\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} - 2\mu D : D + \mathrm{div}\,(2\mu D\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,p.$$

Таким образом, здесь к диссипативной функции Рэлея добавляется новая величина противоположного знака. В связи с этим вполне возможно, что в некоторых точках области течения, где возникают большие ускорения, величина

$$\Phi = \rho\alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} - 2\mu D : D$$

может быть положительной. С точки зрения обычных уравнений последнее можно истолковать как проявление отрицательной вязкости [4].

Возможно, что появление таких областей течения, в которых $\Phi > 0$, существенно влияет на устойчивость течения и может быть причиной возникновения турбулентности.

4. Удобно здесь же привести уточненные уравнения движения вязкого газа в самом общем случае при произвольной связи между напряжениями и деформациями и произвольном уравнении состояния. Уравнения сохранения массы и импульса из (3.4) справедливы и в самом общем случае, если в уравнение сохранения импульса добавить массовые силы. Таким образом, достаточно получить только уточненное уравнение энергии. Обозначая через ε внутреннюю энергию единицы массы газа, можно записать закон сохранения энергии в подвижном объеме с учетом запаздывания при отсутствии внешних сил в следующем виде:

$$\left[\frac{d}{dt}\int_{\tau}\rho\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)dx\right]_{*}=\int_{S}\mathbf{v}\cdot\sigma\cdot\mathbf{n}dS. \tag{4.1}$$

Здесь звездочкой помечены величины, вычисленные в момент времени $t+\alpha$. После проведения рассуждений, аналогичных описанным при выводе уравнений сохранения импульса, получим

$$\rho\left[\frac{d}{dt}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\right]_{*}=\operatorname{div}(\sigma\cdot\mathbf{v}).$$

Подставляя сюда из (3.8) выражение для $\rho\left[\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2}\right]_{*}$ и приводя подобные, представим уравнение сохранения энергии в форме

$$\rho\left[\frac{d\varepsilon}{dt}\right]_{*}=\sigma:D-\rho\alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Таким образом, в самом общем случае уточненные уравнения движения газа запишем как

$$\rho_t+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0,\quad \rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\alpha\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right)=\operatorname{div}\sigma, \tag{4.2}$$

$$\rho\left(\frac{d\varepsilon}{dt}+\alpha\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right)=\sigma:D-\rho\alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

К этим уравнениям для замыкания следует добавить калорическое уравнение состояния, т. е. связь между термодинамическими характеристиками среды, и определяющее уравнение, задающее связь между напряжениями и деформациями, учитывающую тепловое движение молекул и вязкость.

Покажем, что скорость распространения возмущений в случае уравнений (4.2) при разумном выборе замыкающих уравнений будет конечной. Уравнение состояния простой среды удобно представить в виде

$$p=p(\varepsilon,\rho),$$

а связь между напряжениями и деформациями зададим соотношением

$$\sigma=2\mu D+(\zeta\operatorname{div}\mathbf{v}-p)I,$$

где ζ — вторая вязкость. Уравнения одномерного движения такого газа при отсутствии массовых сил запишем в форме

$$\rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0, \tag{4.3}$$

$$\rho\left[\frac{du}{dt}+\alpha\frac{d^2u}{dt^2}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[(2\mu+\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial p}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

$$\rho\left[\frac{d\varepsilon}{dt}+\alpha\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right]=(2\mu+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-p\frac{\partial u}{\partial x}-\rho\alpha\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x},\quad (2\mu+\zeta)=\alpha f(\varepsilon,\rho).$$

Характеристики этой системы уравнений задаются соотношением

$$\begin{vmatrix} \omega_t + u\omega_x, & 0, & 0 \\ \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho} + \alpha \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\omega_x, & \alpha\rho\,(\omega_t + u\omega_x)^2 - (2\mu + \zeta)\,\omega_x^2, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha\rho\,(\omega_t + u\omega_x)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что здесь имеются трехкратная характеристика

$$\omega_t + u\omega_x = 0 \tag{4.4}$$

и две характеристики, определяемые уравнениями

$$\omega_t + u\omega_x = \pm\sqrt{(2\mu + \zeta)/\rho\alpha}\,\omega_x. \tag{4.5}$$

Полагая

$$2\mu + \zeta = \alpha\rho a^2\,(\varepsilon, \rho),$$

получим, что в силу (4.5) возмущения здесь распространяются с конечной скоростью — скоростью звука a.

В случае идеального газа, т. е. при $\alpha = 0$, уравнения одномерного движения (при произвольном уравнении состояния) имеют характеристики, определяемые уравнениями

$$\omega_t + u\omega_x = \pm\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}}\;\omega_x,$$

и однократную характеристику вида (4.4), так что в вязком газе в отличие от идеального добавляется еще сдвоенная характеристика (4.4).

Начально-краевая задача для одномерного движения идеального газа с произвольным уравнением состояния при отсутствии сильных разрывов ставится точно так же, как и для баротропного газа с добавлением очевидных условий, позволяющих определить внутреннюю энергию газа. В случае же вязкого газа (т. е. при $\alpha \neq 0$) следует добавить еще дополнительные условия вида

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\,(\varepsilon, \rho)\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha A\,(x), \quad t = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{4.6}$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + p\,(\varepsilon, \rho)\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha B\,(t), \quad x = 0, \quad 0 < t < T;$$

$$\rho(u_t + uu_x) + a^2\rho_x = \alpha f\,(x), \quad t = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l;$$

$$\rho(u_t + uu_x) + a^2\rho_x = \alpha F\,(t), \quad x = 0, \quad 0 < t < T,$$

где ρ, u, ε и их производные вдоль соответствующей границы вычисляются по условиям (3.6).

Представляет интерес рассмотреть ситуацию, когда в газе возникают сильные разрывы (в нашем случае это разрывы функций и некоторых первых производных). Уравнения движения газа с произвольными уравнениями состояния перепишем в дивергентном виде

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\mathbf{v} + \alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\right) + \operatorname{div}\left(\rho\mathbf{v}\left(\mathbf{v} + \alpha\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \sigma\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \alpha\rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right) + \operatorname{div}\left(\rho\mathbf{v}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \alpha\frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma\right) = 0.$$

Отсюда следует, что законы сохранения на сильном разрыве (условия совместности) можно представить в виде

$$n^0 [\rho] + n^i [\rho v_i] = 0, \tag{4.8}$$

$$n^0 \left[\rho\left(v_j + \alpha \frac{dv_j}{dt}\right)\right] + n^i \left[\rho v_i \left(v_j + \alpha \frac{dv_j}{dt}\right) - \sigma_{ij}\right] = 0,$$

$$n^0 \left[\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \alpha\rho \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right] + n^i \left[\rho v_i \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \alpha \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right) - v^j\sigma_{ij}\right] = 0,$$

где символ [. . .], как обычно,— разрыв соответствующих величин на скачке; n^0 — косинус нормали к поверхности разрыва с осью времени; n^i — косинусы нормали с пространственными осями; v_i — компоненты скорости. Очевидно, что при $\alpha = 0$ уравнения (4.7) перейдут в соответствующие дивергентные уравнения для идеального газа, а соотношения (4.8) — в обычные условия совместности.

В случае одномерного движения вязкого газа с определяющим уравнением

$$\sigma = 2\mu D + (\zeta \operatorname{div} \mathrm{v} - p) I; \quad (2\mu + \zeta) = \rho\alpha a^2 (\varepsilon, \rho)$$

условия совместности (4.8) примут вид

$$[\rho D_*] = 0, \quad [p - \rho u D_*] = \left[\alpha\rho\left(a^2 u_x + D_* \frac{du}{dt}\right)\right], \tag{4.9}$$

$$\left[pu - \rho D_* \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right] = \left[\alpha\rho\left(a^2 u u_x + D_* \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right)\right].$$

Здесь D_*—скорость перемещения ударной волны относительно газа:

$$D_* = dx/dt - u.$$

Можно привести примеры точного решения уравнений движения вязкого газа при наличии сильного разрыва. В качестве одного из них укажем известное решение о движении поршня в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью. В этом случае с момента начала движения в покоящемся газе распространяется сильный разрыв, причем до него газ покоится, а после движется с постоянной скоростью — скоростью поршня. Это означает, что на обеих сторонах разрыва производные функций ε, u тождественно равны нулю, т. е. условия совместности (4.9) будут удовлетворены, если функции ρ, u, ε взять из известного решения этой задачи для идеального газа.

Вопросы постановки и разрешимости задач для уравнений (4.3) в многомерном случае здесь не рассматриваются.

Аналогичным образом можно получить гиперболические уравнения движения вязкого газа с учетом теплопроводности и диффузии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.— Т. 4.
2. **Vernotte P.** Les paradoxes de la théorie continue de léquation de la chaleur // C. r. acad. sci. Paris.— 1958.— V. 246, N 22.— P. 3154—3155.
3. **Лыков А. В.** Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепломассообмена // ИФЖ.— 1965.— Т. 9, № 3.— С. 287—304.
4. **Новиков В. А., Яненко Н. Н.** Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости // ЧМСС.— 1973.— Т. 4, № 2.— С. 142—147.

г. Новосибирск *Поступила 17/XI 1992 г.*