УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОЛОСТИ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. О. Ватульян, Н. О. Солуянов

Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону
E-mails: vatulyan@aaanet.ru, sol.nik@mail.ru

Рассмотрены прямая и обратная задачи об установившихся поперечных колебаниях цилиндрического стержня с дефектом в форме полости малого относительного размера. Предложен подход к определению местоположения и объема полости произвольной формы. Представлены результаты вычислительных экспериментов, проведен их анализ.

Ключевые слова: идентификация, колебания, полость, регуляризация, стержень.

В данной работе рассмотрена задача об установившихся поперечных колебаниях цилиндрического стержня, содержащего дефект в форме полости малого относительного размера. Выполнен анализ прямой задачи, в которой наличие полости моделируется зависимостью геометрических параметров задачи от координат. Область, занятая стержнем, разбивается на конечное число подобластей с постоянными характеристиками. Проводится численно-аналитическое исследование. Получены зависимости первых резонансных частот от характерных параметров полости (координаты центра, объема). Проведен анализ этих зависимостей и определены области изменения частот, в которых эти зависимости взаимно однозначны. Отметим, что подобные зависимости для случая продольных колебаний цилиндрического стержня исследованы в работе [1], асимптотический анализ смещения резонансных частот для малых полостей выполнен в [2, 3]. На основе полученной информации сформулированы обратные задачи о реконструкции полостей малого относительного размера.

В настоящей работе рассмотрена наиболее важная для практики обратная задача, заключающаяся в определении местоположения и объема полости независимо от формы ее поверхности. Отметим, что алгоритм решения подобных обратных задач представлен в работе [4]. На основе предложенной схемы проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции полостей различного вида. Представлены результаты этих экспериментов, свидетельствующие о достаточно высокой эффективности предлагаемого подхода.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

1.1. Постановка прямой задачи. Рассмотрим установившиеся поперечные колебания стержня длиной l с полостью произвольной формы. Будем считать, что один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, а к другому ($x = l$) приложена периодическая во времени сила $P(t) = P_0 \exp(-i\omega t)$. Наличие полости моделируется зависимостью площади F и момента инерции J поперечного сечения от продольной координаты x. Размеры полости

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00734).

будем считать малыми по сравнению с характерным геометрическим размером поперечного сечения стержня. Требуется определить смещение незакрепленного торца стержня (как функцию частоты колебаний) и первые резонансные частоты.

В предположении малости размеров полости используем уравнение поперечных колебаний стержня переменного поперечного сечения [5]. В случае установившихся колебаний получаем следующую краевую задачу для дифференциального оператора четвертого порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}(J(x)w''(x))'' - k^2F(x)w(x) = 0,\\ w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad E(J(x)w''(x))'(l) = P_0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $k^2 = \rho\omega^2/E$; ρ — плотность; ω — частота колебаний; E — модуль Юнга.

Задача (1.1) для произвольных переменных коэффициентов дифференциального оператора не может быть решена аналитически, поэтому для построения ее общего решения следует использовать численные методы [6]. В работе [3] решение аналогичной прямой задачи сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

1.2. Численный алгоритм решения прямой задачи. При моделировании локализованного дефекта принимается следующий закон изменения площади поперечного сечения:

$$F(x) = F_0(1 - \eta(x)) \tag{1.2}$$

(функция $\eta(x)$ отлична от нуля в интервале $[a, b] \subset [0, l]$). Выполним неравномерное разбиение отрезка $[0, l]$ на n частей:

$$x_0 = 0, \qquad x_i = a + \frac{b-a}{n-2}\,(i-1), \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad x_n = l.$$

При этом сетка сгущается в окрестности полости. Будем считать, что в i-м интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функции $F(x)$ и $J(x)$ имеют постоянные значения: $F_i = F((x_{i-1} + x_i)/2)$, $J_i = J((x_{i-1} + x_i)/2)$. В этом случае функции смещения $w_i(x)$ в i-м интервале удовлетворяют уравнениям четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$w_i^{(\mathrm{IV})}(x) - \lambda_i^4 w_i(x) = 0, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.3}$$

где $\lambda_i^4 = k^2F_i/J_i$. Общее решение i-го уравнения в (1.3) имеет вид

$$w_i(x) = C_{1i}(\operatorname{ch}(\lambda_i x) + \operatorname{sh}(\lambda_i x)) + C_{2i}\sin(\lambda_i x) + C_{3i}\cos(\lambda_i x) + C_{4i}(\operatorname{ch}(\lambda_i x) - \operatorname{sh}(\lambda_i x)).$$

Постоянные C_{ji} находятся из граничных условий и условий сопряжения

$$\begin{aligned} w_1(0) &= 0, & w_1'(0) &= 0,\\ w_i(x_i) &= w_{i+1}(x_i), & w_i'(x_i) &= w_{i+1}'(x_i),\\ J_iw_i''(x_i) &= J_{i+1}w_{i+1}''(x_i), & J_iw_i'''(x_i) &= J_{i+1}w_{i+1}'''(x_i),\\ w_n''(l) &= 0, & w_n'''(l) &= p,\end{aligned}$$

где $p = P_0/(EJ_0)$. Очевидно, что искомой функцией смещения свободного торца стержня является функция $w_n(l) = f(\omega)$, зависящая от частоты колебаний. Отметим, что сгущение сетки в окрестности полости позволяет значительно повысить точность решения прямой задачи. Очевидно, что с увеличением n точность решения возрастает. Предложенный алгоритм тестировался на задаче о цилиндрическом стержне длиной $l = 1$ и радиусом $r_0 = l/5$ без полости. Функция смещения однородного стержня известна и определяется выражением

$$w_0(x) = -(p/\lambda^3)[U_1V_4(\lambda x) + U_2V_3(\lambda x)], \tag{1.4}$$

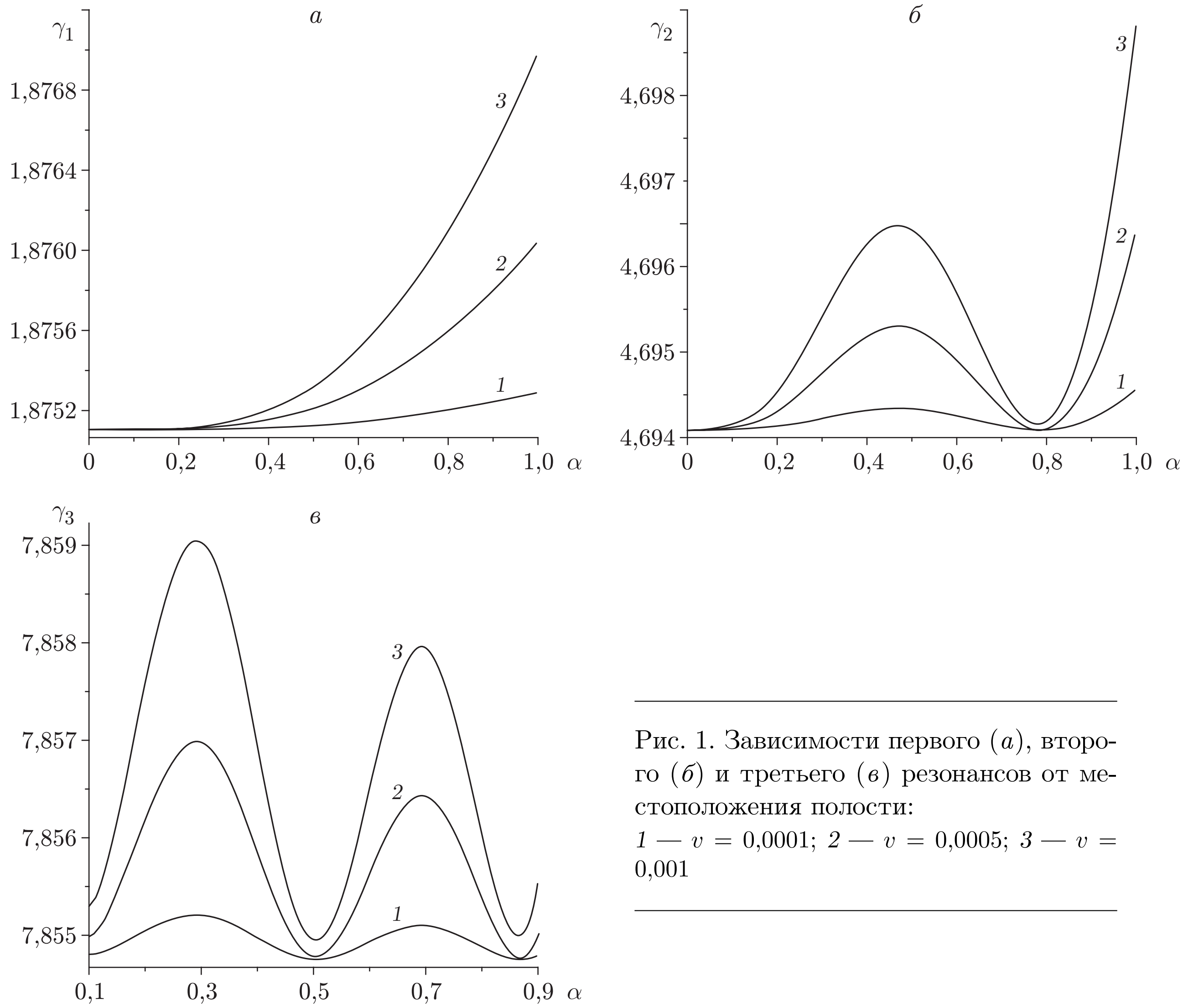

Рис. 1. Зависимости первого (*а*), второго (*б*) и третьего (*в*) резонансов от местоположения полости:
1 — $v = 0{,}0001$; *2* — $v = 0{,}0005$; *3* — $v = 0{,}001$

где $\lambda^4 = k^2F_0/J_0$; $U_1 = V_1(\lambda l)/U$; $U_2 = -V_2(\lambda l)/U$; $U = V_1^2(\lambda l) - V_2(\lambda l)V_4(\lambda l)$; V_1, V_2, V_3, V_4 — известные функции Крылова [5]. На всех интервалах изменения параметра λ, не содержащих резонансных частот, относительная погрешность приближенного решения не превышает 1 %, поэтому предлагаемый численный алгоритм можно использовать при решении задач подобного рода.

Для исследования зависимости первых резонансных частот от параметров полости введем безразмерные величины $\gamma_i = \lambda_i^r l$, $\alpha = c/l$ и v (λ_i^r — параметр λ, вычисленный по i-й резонансной частоте; c — координата центра полости на оси стержня; v — относительный объем полости). На рис. 1 представлены зависимости $\gamma_i(\alpha)$ для первых трех резонансов. Видно, что взаимно однозначное соответствие между резонансной частотой и положением полости имеет место только в случае первого резонанса.

На рис. 2 представлена зависимость $\psi_i = \gamma_i(v)/\gamma_i^0$ для первых трех резонансов (γ_i^0 соответствует i-му резонансу однородного стержня; $\alpha = 0{,}5$). Видно, что для всех трех резонансов имеет место взаимно однозначная зависимость между резонансной частотой и объемом полости. Подобные зависимости имеют место для всех значений α в интервале $(0, l)$.

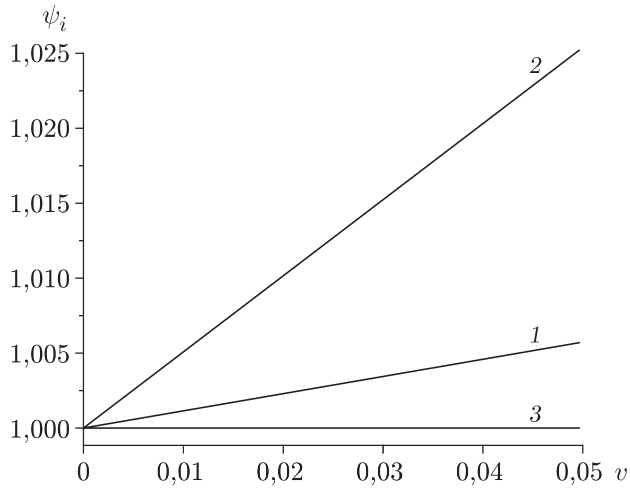

Рис. 2. Зависимость первых трех резонансов от объема полости:
1 — первый резонанс; *2* — второй резонанс; *3* — третий резонанс

Следует отметить, что обратные зависимости первой резонансной частоты от положения и объема полости являются однозначными функциями и могут служить в качестве входной информации при определении параметров полости.

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

2.1. Постановка обратной задачи. В обратной задаче функция смещения свободного торца стержня $f(\omega)$ считается заданной в некотором диапазоне значений частоты $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Требуется определить местоположение и объем полости.

Рассмотрим краевую задачу (1.1). В предположении малости параметров полости применим процедуру линеаризации. Положим

$$w(x) = w_0(x) + \varepsilon w_1(x), \qquad F(x) = F_0(1 - \varepsilon\eta(x)), \qquad J(x) = J_0(1 - \varepsilon^2 q\eta^2(x)) \tag{2.1}$$

(ε — формальный малый параметр). Функция $\eta(x)$, моделирующая наличие полости, удовлетворяет условиям

$$\eta(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, l], \qquad \|\eta(x)\|_{L_2[0,l]} \ll 1.$$

Подставляя выражения (2.1) в дифференциальное уравнение задачи (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, в соответствии с [2] получаем

$$\varepsilon^0: \quad w_0^{(\mathrm{IV})} - \lambda^4 w_0 = 0; \tag{2.2}$$

$$\varepsilon^1: \quad w_1^{(\mathrm{IV})} - \lambda^4 w_1 + \eta\lambda^4 w_0 = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) умножим на w_1, а уравнение (2.3) — на w_0 и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Приравняв интегралы в полученных выражениях, имеем уравнение

$$\lambda^4 \int\limits_0^l \eta w_0^2\, dx + \Big(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\, w_0 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\, \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\, \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - w_1\, \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\Big)\Big|_0^l = 0.$$

С учетом граничных условий

$$w_0(0) = 0, \qquad w_0'(0) = 0, \qquad w_0''(l) = 0, \qquad w_0'''(l) = p,$$
$$w_1(0) = 0, \qquad w_1'(0) = 0, \qquad w_1''(l) = 0, \qquad w_1'''(l) = 0$$

и равенства $f(\omega) = w_0(l) + w_1(l)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода [7] относительно функции $\eta(x)$:

$$\lambda^4 \int\limits_0^l \eta(x) w_0^2(x)\, dx = p[f(\omega) - w_0(l)], \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \tag{2.4}$$

Отметим, что в силу гладкости ядра интегрального уравнения построение решения интегрального уравнения (2.4) является некорректной задачей, поэтому необходима регуляризация [8].

2.2. Регуляризация обратной задачи. Поставленную задачу определения местоположения и объема полости можно решать в классе цилиндрических полостей, представляющем собой компакт в пространстве $L_2[0, l]$. Поэтому при решении интегрального уравнения (2.4) применим метод регуляризации на компактных множествах [9]. Положим, что закон изменения площади поперечного сечения стержня в зависимости от продольной координаты x имеет вид (1.2). В случае стержня кругового поперечного сечения $F_0 = \pi r_0^2$ и функция $\eta(x)$ представляется в виде

$$\eta(x) = (r/r_0)^2 H(h^2 - (x - c)^2), \tag{2.5}$$

где H — функция Хевисайда; c — координата центра полости; r, $2h$ — радиус и высота цилиндра соответственно. Введем обозначение $r_1 = (r/r_0)^2$. С учетом (2.5) уравнение (2.4) принимает вид

$$\lambda^4 r_1^2 \int\limits_{c-h}^{c+h} w_0^2(x)\, dx = p[f(\omega) - w_0(l)], \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \tag{2.6}$$

Подставив в выражение (2.6) решение однородной задачи (1.4), получим функциональное уравнение относительно трех параметров полости:

$$\begin{gathered} r_1^2[U_1^2 R_1(c, h, \lambda) + 2U_1U_2R_{12}(c, h, \lambda) + U_2^2 R_2(c, h, \lambda)] = (4\lambda^2/p)[f(\omega) - w_0(l)], \\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{1,2}(c, h, \lambda) &= h \pm h + (2\lambda)^{-1}[\operatorname{ch}(2\lambda c) \operatorname{sh}(2\lambda h) \pm \cos(2\lambda c) \sin(2\lambda h)] - \\ &\quad - (2/\lambda)\{\cos(\lambda c) \operatorname{ch}(\lambda c)[\sin(\lambda h) \operatorname{ch}(\lambda h) \pm \cos(\lambda h) \operatorname{sh}(\lambda h)] + \\ &\quad + \sin(\lambda c) \operatorname{sh}(\lambda c)[\cos(\lambda h) \operatorname{sh}(\lambda h) \mp \sin(\lambda h) \operatorname{ch}(\lambda h)]\}, \\ R_{12}(c, h, \lambda) &= (2\lambda)^{-1}[\operatorname{sh}(2\lambda c) \operatorname{sh}(2\lambda h) + \sin(2\lambda c) \sin(2\lambda h)] - \\ &\quad - (2/\lambda)[\cos(\lambda c) \operatorname{sh}(\lambda c) \sin(\lambda h) \operatorname{ch}(\lambda h) + \sin(\lambda c) \operatorname{ch}(\lambda c) \cos(\lambda h) \operatorname{sh}(\lambda h)]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Учитывая, что параметр h мал, к интегралу в уравнении (2.6) применим теорему о среднем. В результате получим

$$\int\limits_{c-h}^{c+h} w_0^2(x)\, dx = 2h w_0^2(c) + o(h^2). \tag{2.9}$$

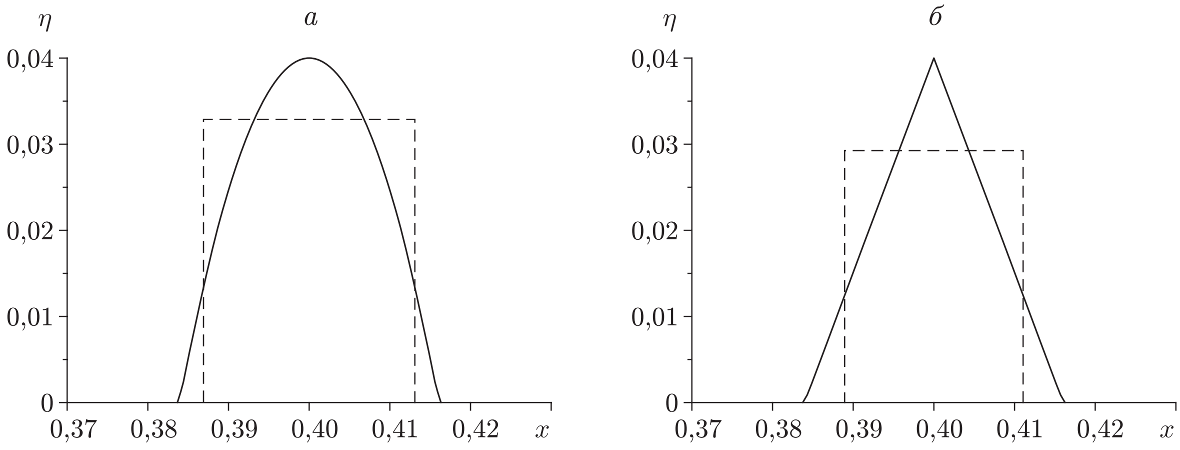

Рис. 3. Восстановление эллипсоидальной ($\varepsilon_v = 0{,}82$) (*а*) и конической ($\varepsilon_v = 0{,}79$) (*б*) полостей в классе цилиндрических полостей:
сплошная линия — исходная полость; штриховая — восстановленная полость

Относительные погрешности ε_v и ε_α

Форма полости	$v = 0{,}0002$			$v = 0{,}0015$		
	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}9$
Цилиндрическая	$\varepsilon_\alpha = 0{,}31$ $\varepsilon_v = 0{,}72$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}03$ $\varepsilon_v = 0{,}07$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}02$ $\varepsilon_v = 0{,}01$	$\varepsilon_\alpha = 1{,}21$ $\varepsilon_v = 2{,}82$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}13$ $\varepsilon_v = 0{,}29$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}09$ $\varepsilon_v = 0{,}06$
Эллипсоидальная	$\varepsilon_\alpha = 0{,}27$ $\varepsilon_v = 0{,}72$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}02$ $\varepsilon_v = 0{,}04$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}04$ $\varepsilon_v = 0{,}05$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}75$ $\varepsilon_v = 1{,}80$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}08$ $\varepsilon_v = 0{,}17$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}06$ $\varepsilon_v = 0{,}04$
Коническая	$\varepsilon_\alpha = 0{,}14$ $\varepsilon_v = 0{,}33$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}02$ $\varepsilon_v = 0{,}03$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}01$ $\varepsilon_v = 0{,}01$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}60$ $\varepsilon_v = 1{,}40$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}07$ $\varepsilon_v = 0{,}14$	$\varepsilon_\alpha = 0{,}04$ $\varepsilon_v = 0{,}03$

С учетом (2.9) уравнение (2.6) сводится к соотношению

$$vw_0^2(c) = p[f(\omega) - w_0(l)]/(\lambda^4 l), \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \tag{2.10}$$

где $v = 2hr_1^2/l$ — относительный объем полости. Отметим, что аналогичный результат получается при разложении выражений (2.8) в ряд Тейлора по параметру h в окрестности нуля.

Таким образом, задача о реконструкции полости малого относительного размера сводится к определению двух параметров полости из функционального уравнения (2.10).

На основе предложенного подхода проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции полостей различного вида. Решение уравнения (2.7) позволяет восстанавливать любые полости в классе цилиндрических полостей. На рис. 3 представлены результаты реконструкции эллипсоидальных и конических полостей ($\varepsilon_v = (|v_{\text{ист}} - v_{\text{восст}}|/v_{\text{ист}}) \times 100$ % — относительная погрешность, с которой восстанавливается объем полости).

Решение уравнения (2.10) позволяет поэтапно восстанавливать местоположение и относительный объем произвольной полости, зная смещения свободного торца стержня лишь на двух частотах. Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице ($\varepsilon_\alpha = (|\alpha_{\text{ист}} - \alpha_{\text{восст}}|/\alpha_{\text{ист}}) \cdot 100$ % — относительная погрешность, с которой восстанавливается координата центра полости).

Представленные в работе данные свидетельствуют об эффективности предложенного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ватульян А. О., Солуянов Н. О.** Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44–56.
2. **Ватульян А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007.
3. **Бочарова О. В., Ватульян А. О., Жарков Р. С.** Реконструкция малых полостей в упругих стержнях // Изв. вузов Сев.-Кавк. региона. Естеств. науки. 2006. № 2. С. 28–32.
4. **Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н.** Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычисл. технологии. 2006. № 3. С. 14–25.
5. **Филиппов А. П.** Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970.
6. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М.: Лаб. базовых знаний, 2002.
7. **Краснов М. Л.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
8. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.
9. **Тихонов А. Н.** Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 13/XI 2007 г.