

ДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ

С. А. Шестериков

(Москва)

1. В работе [1] был предложен метод для определения областей устойчивости прямого стержня при ползучести, основанный на исследовании поведения стержня после приложения весьма малого возмущения. Используя закон ползучести вида

$$\Phi(\dot{p}, p, \sigma) = 0 \quad (1.1)$$

где  $p$  — деформация ползучести,  $\dot{p}$  — скорость деформации,  $\sigma$  — напряжение, для стержня, сжатого продольной силой  $P$ , было получено уравнение движения, которое запишем в виде

$$\begin{aligned} & \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \\ & - \left\{ \exp \left[ - \int \frac{\mu}{v} dt \right] \right\} \int_0^t \frac{E\lambda}{v} \left\{ \exp \left[ \int \frac{\mu}{v} dt \right] \right\} \left( P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) dt = 0 \quad (1.2) \\ & \left( v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}}, \lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \mu = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \end{aligned}$$

где  $\rho$  — плотность,  $F$  — площадь поперечного сечения,  $y$  — прогиб,  $I$  — момент инерции,  $E$  — модуль упругости,  $t$  — время,  $x$  — текущая координата вдоль стержня, длина которого  $L$ . Предположим, что стержень шарнирно оперт, тогда можно разделить переменные, представив прогиб в виде

$$y = \tau(t) \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1.3)$$

Введем обозначения

$$P_* = \frac{\pi^2}{L^2} EI, \quad k = \frac{1}{P_*} \frac{L^2}{\pi^2} \rho F, \quad \beta = \frac{P}{P_*}$$

Подставив (1.3) в (1.2), для определения  $\tau$  получим уравнение

$$\tau(1 - \beta) + k\ddot{\tau} - \exp \left[ - \int_0^t \frac{\mu}{v} dt \right] \int_0^t \frac{E\lambda}{v} (k\ddot{\tau} - \beta\tau) \exp \left[ \int \frac{\mu}{v} dt \right] dt = 0 \quad (1.4)$$

В момент возмущения при  $t = 0$  имеем соотношение

$$\tau(0)(1 - \beta) + k\ddot{\tau}(0) = 0 \quad (1.5)$$

Из (1.4) можно получить дифференциальное уравнение

$$\ddot{\tau} + \frac{\mu - E\lambda}{v} \dot{\tau} + \frac{1}{k} (1 - \beta) \tau + \frac{1}{k v} [\mu + \beta E\lambda - \beta\mu] \tau = 0 \quad (1.6)$$

В работе [1] это уравнение исследовалось в предположении, что коэф-

коэффициенты можно считать постоянными; при этом решение записывается в виде

$$\tau = Ae^{st} \tag{1.7}$$

и область устойчивости определялась из условия ограниченности  $\tau$ , что соответствует неположительности действительных частей  $s$ . Это условие выполнено, если коэффициент при  $\tau$  в уравнении (1.6) больше нуля, так как остальные коэффициенты всегда положительны ( $\beta < 1$  — нагрузка меньше эйлеровой критической). Поэтому неравенство

$$\mu + \beta E\lambda - \mu\beta \geq 0 \tag{1.8}$$

определяет область устойчивости.

Отметим, что это заключение получено в предположении постоянства коэффициентов; решение вида (1.7) справедливо только в области, близкой к моменту возмущения; поэтому для ограниченности  $\tau$  при малых  $t$  условие (1.8) будет необходимым, но недостаточным.

Поэтому оценка, согласно неравенству (1.8), может дать весьма заниженное значение для критического времени. Действительно, для случая установившейся ползучести соотношение (1.1) представимо в виде

$$p - \varphi(\sigma) = 0 \quad \text{или} \quad \mu = 0, \quad \lambda = -\varphi' \tag{1.9}$$

и из неравенства (1.8) следует, что критическое время равно нулю. Аналогичный результат получается и по более расширенному критерию устойчивости при ползучести [2].

В этой работе дается другая оценка для критического времени.

2. Рассмотрим случай установившейся ползучести. Тогда при данном  $\sigma$  коэффициенты в уравнении (1.6) будут постоянными. Ищем частное решение в форме (1.7). Характеристическое уравнение уравнения (1.6) получено в виде

$$u^3 + u^2 + k_1(1 - \beta)u - \beta k_1 = 0, \tag{2.1}$$

Здесь

$$s = -E\lambda u, \quad k_1^{-1} = k(E\lambda)^2, \quad \theta = -E\lambda t$$

Так как  $\beta k_1 > 0$ , то имеется один действительный положительный корень  $u_1$ . Два других корня определяются соотношением

$$u_{2,3} = -\frac{1+u_1}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left( D = \frac{(1-u_1)^2}{4} - k_2, \quad k_2 = \frac{k_1}{1+u_1} \right) \tag{2.2}$$

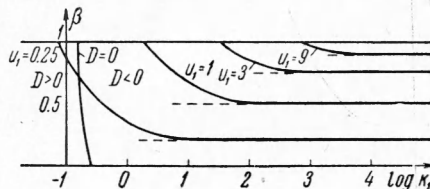
Очевидно, что  $u_2$  и  $u_3$  имеют отрицательные действительные части. На фиг. 1 представлены характерные области изменения параметров  $\beta$  и  $k_1$ . Существуют три случая, определяемых значением  $D$ .

1°. В случае  $D > 0$  корни  $u_2$  и  $u_3$  будут действительными разными отрицательными и решение уравнения (1.6) имеет вид

$$\tau = A_1 e^{u_1 \theta} + A_2 e^{u_2 \theta} + A_3 e^{u_3 \theta} \tag{2.3}$$

2°. В случае  $D = 0$  имеем  $u_2 = u_3 = -\frac{1}{2}(1+u_1)$  и решение уравнения (1.6) примет вид

$$\tau = A_1 e^{u_1 \theta} + (A_2 + A_3 \theta) \exp\left(-\frac{1+u_1}{2} \theta\right) \tag{2.4}$$



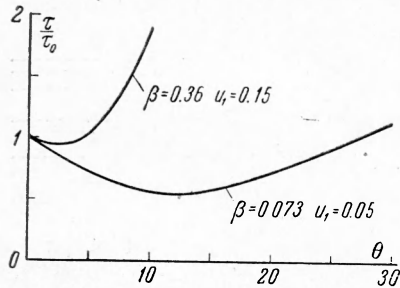
Фиг. 1. Кривые  $u_1 = \text{const}$ ; штриховыми линиями показаны асимптотические значения  $\beta = u_1/(1+u_1)$

3°. В случае  $D < 0$  корни  $u_2$  и  $u_3$  будут сопряженными и решение запишется в форме

$$\tau = A_1 e^{u_1 \theta} + [A_2 \sin \sqrt{-D} \theta + A_3 \cos(\sqrt{-D} \theta)] \exp\left(-\frac{1+u_1}{2} \theta\right) \quad (2.5)$$

Для определения  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  имеем при  $t = 0$  начальные условия  $\tau = \tau_0$ ,  $\dot{\tau} = \dot{\tau}_0$  и условие (1.5).

Рассмотрим сначала отдельно два крайних случая задания начальных данных



Фиг. 2. Зависимость  $\tau/\tau_0$  от  $\theta$  при  $k_1 = 0.1$  ( $D > 0$ )

$$\tau(0) = \tau_0 \neq 0, \quad \dot{\tau}(0) = 0$$

1°. Если  $D > 0$ , для (2.3) имеем

$$A_1 = \frac{u_1(1+u_1)}{2u_1(1+u_1)+k_2} \tau_0 \quad (2.6)$$

$$A_2 = -\frac{u_1(u_1-1)-2k_2-2u_1\sqrt{D}}{(3u_1+1-2\sqrt{D})2\sqrt{D}} \tau_0$$

$$A_3 = \frac{u_1(u_1-1)-2k_2+2u_1\sqrt{D}}{(3u_1+1+2\sqrt{D})2\sqrt{D}} \tau_0$$

Характерный график зависимости  $\tau$  от  $t$  представлен на фиг. 2. Критическое состояние определяется из условия

$$\begin{aligned} & (u_1^2 + u_1^3) \sqrt{D} \left\{ 2 \exp(\theta u_1) - \exp\left[\left(-\frac{1+u_1}{2} + \sqrt{D}\right) \theta\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[\left(-\frac{1+u_1}{2} - \sqrt{D}\right) \theta\right] \right\} = \left\{ \frac{u_1^2 - u_1^4}{2} + (2u_1 + u_1^2) k_2 + k_2^2 \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp\left[\left(-\frac{1+u_1}{2} + \sqrt{D}\right) \theta\right] - \exp\left[\left(-\frac{1+u_1}{2} - \sqrt{D}\right) \theta\right] \right\} \quad (2.7) \end{aligned}$$

Это уравнение в общем виде решить нельзя, но при заданных  $k_2$  и  $u_1$  его можно решить численно. Для оценки решения можно воспользоваться приближенным условием

$$\theta = -2 \frac{\psi'(0)}{\psi''(0)} \quad (2.8)$$

где  $\tau = \psi(\theta)$ . Из (2.8) получим

$$\theta = 2 \frac{k_2^2 + (2u_1 + u_1^2) k_2 - 2u_1^3(1+u_1)}{[2u_1(1+u_1) + k_2](1+u_1)k_2} \quad (2.9)$$

В числовом примере для случая  $\beta = 1/2$ ,  $k = 25/256$  ( $u_1 = 1/4$ ) значение  $\theta = 0.341$  найдено из (2.7) и  $\theta = 0.343$  из (2.9). С физической точки зрения рассмотренный случай соответствует стержням из очень вязкого материала.

2°. Если  $D = 0$ ,  $k_2$  выражается через  $\beta$  и  $u_1$  и имеет место зависимость между  $u_1$  и  $\beta$ . В этом случае

$$A_1 = \frac{4}{3} \frac{u_1(1+u_1)}{(1+3u_1)^2} \tau_0, \quad A_2 = \frac{5u_1^2 + 2u_1 + 1}{(1+3u_1)^2} \tau_0, \quad A_3 = \frac{1-u_1^2}{2(1+3u_1)} \tau_0 \quad (2.10)$$

Условие  $\dot{\tau} = 0$  имеет вид

$$e^x = \frac{(1+u_1)^2}{8u_1} x + 1, \quad x = \frac{\theta(3u_1+1)}{2} \quad (2.11)$$

Решение имеет те же особенности, что и в предыдущем случае.

3°. Перейдем к наиболее интересному случаю  $D < 0$ . Для обычных стержней из металлов практически  $k \gg 1$ . Для упрощения записи вве-

дем обозначения

$$-D = \omega^2 = k_2 - \frac{(1-u_1)^2}{4} \quad (2.12)$$

$$\omega_1 = -E\lambda\omega \quad (2.13)$$

Коэффициенты в уравнении (2.5) запишутся в следующем виде

$$A_1 = \frac{u_1(1+u_1)}{2u_1(1+u_1)+k_2} \tau_0 \quad (2.14)$$

$$A_2 = -\frac{u_1(1+u_1)+k_2}{2u_1(1+u_1)+k_2} \tau_0$$

$$2\omega A_3 = (1+u_1) \frac{u_1(1+u_1^2)+k_2}{2u_1(1+u_1)+k_2} \tau_0$$

Здесь имеем несколько различных случаев. При малых значениях  $k_1$  (порядка единиц) вид зависимости  $\tau$  от  $t$  принципиально не отличается от вышерассмотренного. При дальнейшем увеличении начинают сказываться тригонометрические члены и при достаточно больших  $k_1$  (порядка 1000 и более) график имеет вид, представленный на фиг. 3. Последний случай наиболее интересен с практической точки зрения. Очевидно, что условие  $\dot{\tau} = 0$  имеет большое количество корней. Наиболее простой оценкой является  $\theta_{\max}$  из всех  $\theta$ , отвечающих решению уравнения.

Однако при достаточно больших  $k_1$  может оказаться, что  $\theta_{\max}$  будет в области, где  $\tau \gg \tau_0$ . Поэтому для области больших  $k_1$  (порядка  $10^4$  и больших) дадим другую оценку. Так как в этом случае имеет место условие  $A_3 \ll A_2$ , то выражение

$$\tau_1 = A_1 \exp(\theta u_1) + A_2 \exp\left(-\frac{1+u_1}{2} \theta\right) \quad (2.15)$$

представляет верхнюю границу для  $\tau$ . Второе слагаемое соответствует амплитуде колебаний, поэтому кратко условие  $\dot{\tau}_1 = 0$  будем называть оценкой по амплитуде. Из (2.15) для условия  $\dot{\tau}_1 = 0$  получим

$$\theta = \frac{2}{1+3u_1} \ln \frac{\omega^2}{2u_1^2} \quad (2.16)$$

Это условие получено в предположении  $k_1 \gg u_1^3$ . Для сравнения укажем, что

$$\theta_{\max} \approx \frac{2}{1+3u_1} \ln \frac{\omega^3}{u_1^2(1+u_1)} \quad (2.17)$$

Отметим, что при больших  $k_1$  имеют место оценки

$$u_1 \approx \frac{\beta}{1-\beta}, \quad \omega^2 \approx k_2$$

Рассмотрим второй предельный случай для начальных данных

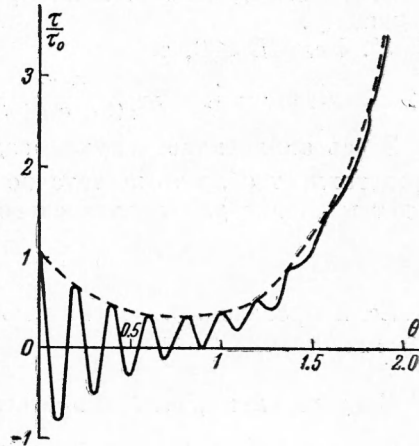
$$\tau(0)=0, \quad \dot{\tau}(0) = \dot{\tau}_0 \neq 0, \quad \ddot{\tau}(0) = 0$$

последнее вытекает из условия (1.5).

1°. Если  $D > 0$ , то

$$A_1 = \frac{1+u_1}{2(1+u_1)u_1+k_2} \tau_{00}, \quad A_2 = \frac{1-u_1+2\sqrt{D}}{2\sqrt{D}[2\sqrt{D}-1-3u_1]} \tau_{00} \quad (2.18)$$

$$A_3 = \frac{1-u_1-2\sqrt{D}}{2\sqrt{D}[2\sqrt{D}+1+3u_1]} \tau_{00} \quad \left(\tau_{00} = \frac{\dot{\tau}_0}{-E\lambda}\right)$$



Фиг. 3. Зависимость  $\tau/\tau_0$  от  $\theta$  при  $u_1=3$ ;  $\beta=0.75$ ;  $k_2=1000$ . Пунктиром показана оценка по «амплитуде»

Здесь при  $\beta \ll 1$  может иметь место выполнение равенства  $\dot{\tau} = 0$  при  $\beta$  больших, условием критического состояния можно считать  $\ddot{\tau} = 0$ .

2°. Если  $D = 0$ , то

$$A_2 = -A_1 = \frac{4(1+u_1)}{(1+3u_1)^2} \tau_{00}, \quad A_3 = \frac{1-u_1}{1+3u_1} \tau_{00} \quad (2.19)$$

Здесь вывод относительно критического состояния аналогичен предыдущему.

3°. Если  $D < 0$ , то

$$A_1 = -A_2 = \frac{1+u_1}{2u_1(1+u_1)+k_2} \tau_{00}, \quad A_3 = \frac{u_1^2-1+k_2}{2u_1(1+u_1)+k_2} \frac{\tau_{00}}{2\omega} \quad (2.20)$$

Здесь аналогично случаю задания  $\tau_0$  опять наибольший интерес представляет область достаточно больших  $k_1$ . Тогда условие  $\dot{\tau} = 0$  приведет к оценке для критического времени в виде

$$\theta = \frac{2}{1+3u_1} \ln \frac{\omega^2}{u_1(1+u_1)} \quad (2.21)$$

Если производить оценку по амплитуде, то в противоположность случаю задания  $\tau_0$  здесь

$$A_2 \ll A_3 \quad (2.22)$$

Следовательно, если  $\tau$  представить в виде

$$\frac{\tau}{\tau_{00}} = (1+u_1) \exp(u_1\theta) + \frac{k_2}{\omega} \exp\left(-\frac{1+u_1}{2}\theta\right) \quad (2.23)$$

то условие  $\dot{\tau} = 0$  даст единственный корень

$$\theta = \frac{2}{3u_1+1} \ln \frac{\omega}{2u_1} \quad (2.24)$$

Очевидно, что  $\theta$ , определяемое из соотношения (2.24), меньше  $\theta$  из выражения (2.21).

Перейдем к общему случаю, когда в начальный момент задаются  $\tau_0$  и  $\dot{\tau}_0$  (еще раз подчеркиваем, что  $\dot{\tau}_0$  не задается, а получается из условия (1.5)). В силу линейности уравнений для  $A_i$  легко получить их значения простым суммированием двух частных решений для всех трех рассматриваемых случаев значения параметра  $D$ .

Общего исследования проводить не будем. Оно мало отличается от предыдущих исследований, а остановимся только на случае, когда  $k_1$  достаточно большое и, следовательно,  $D < 0$ . Тогда можно написать выражения для  $A_i$ , в которых сохранены только главные члены

$$A_1 = \frac{u_1(1+u_1)}{\omega^2} \tau_0 + \frac{1+u_1}{\omega^2} \tau_{00} \\ A_2 = \tau_0 - \frac{1+u_1}{\omega^2} \tau_{00}, \quad A_3 = \frac{1+u_1}{2\omega} \tau_0 + \frac{\tau_{00}}{\omega} \quad (2.25)$$

Рассмотрим возможные варианты.

Если  $\tau_0 \gg \tau_{00}$ , то справедливо решение, когда  $\tau_{00} = 0$ . Если  $\tau_0$  одного порядка с  $\tau_{00}$ , то еще сохраняет справедливость решение при  $\dot{\tau}_0 = 0$ , но в  $A_1$  вносится поправка. Если  $\omega\tau_0$  одного порядка с  $\tau_{00}$ , то  $A_2$  и  $A_3$  одного порядка и можно использовать решения при условии  $\tau_0 = 0$ , так как  $A_1$  полностью определяется  $\tau_{00}$ . Наконец, если  $\tau_{00} \gg \omega\tau_0$ , то решение полностью определяется случаем  $\tau_0 = 0$ .

При исследовании двух случаев  $\dot{\tau}_0 = 0$  и  $\tau_0 = 0$  получены нижние оценки для  $\theta$  (2.24) и (2.16), из которых видно, что минимальное время определяется соотношением (2.24). Так как рассмотрение общего случая не вносит существенных поправок в окончательный результат, то критическое время определяется из наиболее неблагоприятного соотношения, а оно соответствует (2.24). Следовательно, зависимость (2.24) дает оценку для критического времени. Этот же результат можно определить из исследования изменения амплитуды, определяемой выражениями (2.25)

при произвольном отношении  $\tau_0$  к  $\tau_{00}$ , и затем определить минимальное значение  $\theta$  в зависимости от этого отношения.

Таким образом, критическое время для стержня с достаточно большим  $k_1$ , определяемое как момент, определяющий область уменьшения амплитуды прогиба от области, где амплитуда возрастает, имеет вид

$$t_* = \frac{1}{-E\lambda} \frac{2}{1+3u_1} \ln \frac{\omega}{2u_1} \quad (2.26)$$

где  $t_*$  — критическое время.

Для больших  $k_1$  имеем простые приближенные зависимости

$$u_1 = \frac{\beta}{1-\beta}, \quad \omega = \sqrt{k_1(1-\beta)} \quad (2.27)$$

Тогда (2.26) запишется в виде

$$t_* = \frac{1}{-E\lambda} \frac{1-\beta}{1+2\beta} \ln \frac{k_1(1-\beta)^3}{4\beta^2} \quad (2.28)$$

Отметим одно весьма существенное обстоятельство. Все исследование проведено для линеаризированной задачи и поэтому необходимо, чтобы колебания имели малую амплитуду. Это ограничение полностью снимается, если имеем дело с вязкоупругим материалом, для которого уравнение состояния можно записать в форме

$$\dot{p} = -\lambda \sigma \quad (2.29)$$

3. Рассмотрим случай неустановившейся ползучести. Простейшей моделью неустановившейся ползучести является линейное вязкоупругое тело. Рассмотрим стержень, для материала которого

$$\dot{p} + Hp + \lambda \sigma = 0 \quad (\lambda < 0) \quad (3.1)$$

Для него уравнение (2.1) примет вид

$$u^3 + u^2 + k_1(1-\beta)u - k_1(\beta-\gamma) = 0 \quad \left(\gamma = \frac{H}{H-E\lambda} < 1\right) \quad (3.2)$$

Очевидно, что здесь область задания параметра  $\beta$  распадается на две.

Первая, когда  $\beta < \gamma$ . В этом случае все корни имеют отрицательные действительные части и стержень всегда устойчив.

Вторая, когда  $\beta > \gamma$ . Здесь меняется только уравнение для определения  $u_1$ , все остальное исследование полностью сохраняет силу, так как  $u_2$  и  $u_3$  выражаются через  $u_1$  прежними формулами (2.2).

В случае достаточно больших  $k_1$  и при  $\beta > \gamma$  для  $u_1$  можно использовать приближенное выражение

$$u_1 = \frac{\beta-\gamma}{1-\beta} \quad (3.3)$$

Подставив его в (2.24), легко получим критическое значение  $t_*$ .

В случае, когда  $H$  и  $\lambda$  зависят от накопленной пластической деформации, исследование в общем виде провести не удастся. Оценка критического времени может быть проведена следующим образом. При временах, меньших  $t_1$ , определяемого из условия

$$\mu + \beta E\lambda - \beta\mu = 0 \quad (3.4)$$

согласно квазистатическому критерию стержень всегда устойчив. При  $t > t_1$  коэффициенты  $\mu$  и  $\lambda$  меняются достаточно медленно и поэтому можно оценку проводить, принимая их среднее значение.

Московский государственный университет

Поступила 24 I 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3, стр. 406—412.
2. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6, стр. 1101—1106.