Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 3

ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ТИПА КОССЕРА ДЛЯ АНАЛИЗА КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ ТЕЛ

УДК 539.370

Л. И. Шкутин

Вычислительный центр СО РАН,
660036 Красноярск

Работа содержит новые инвариантные формулировки обобщенных моделей анализа конечных деформаций оболочко- и стержнеобразных тел с независимыми полями конечных перемещений и поворотов материальных элементов. Они получены из новой инвариантной формулировки нелинейной модели Коши для трехмерного тела с явным выделением локальных поворотов. Двумерная обобщенная модель деформации оболочки — следствие допущения о жестко вращающихся поперечных волокнах. Три поступательные и две вращательные степени свободы волокна составляют систему пяти первичных неизвестных обобщенной модели. Отсутствие независимого поворота волокна относительно самого себя отличает ее от аксиоматической модели деформируемой поверхности Коссера. Одномерная обобщенная модель деформируемого стержня — следствие допущения о жестко вращающихся поперечных сечениях. Три поступательные и три вращательные степени свободы сечения составляют систему шести первичных неизвестных обобщенной модели. Установлена ее тождественность аксиоматической модели деформируемой линии Коссера при определенном соответствии силовых параметров. В дополнение к аксиоматическим формулировкам Коссера обобщенные модели включают в себя определяющие зависимости реального материала и уравнения для восстановления перемещений, деформаций и напряжений в объеме реального тела.

Термин *тонкие тела* объединяет оболочки, пластины и стержни. Такие тела разделим на две группы: *оболочкообразные* и *стержнеобразные*. К первой группе отнесем оболочки, пластины и при необходимости тонкостенные стержни, ко второй — балки и стержни с жесткими поперечными сечениями. Отличительное свойство тонкого тела — малая изгибная жесткость в направлении малого размера. Оно способно сильно изгибаться под нагрузкой, т. е. претерпевать деформацию с большими градиентами перемещений и поворотов материальных элементов.

Геометрические особенности тонких тел способствовали построению специальных математических моделей их деформирования, отличных от классической модели Коши. В научной литературе можно различить два подхода к моделированию деформаций тонких тел: *аксиоматический* (прямой) и *аппроксимационный*. Первый с самого начала трактует оболочку как *материальную поверхность* (двумерный объект), стержень — как *материальную линию* (одномерный объект) и устанавливает законы их деформирования под действием *обобщенных* внешних и внутренних сил, наделяя каждую материальную частицу-точку объекта не только *позиционными* (как в модели Коши), но и *ориентационными* степенями свободы. Аксиоматические формулировки уравнений деформации гибких нитей и стержней известны из работ Я. Бернулли и Л. Эйлера, обобщены и распространены на пластины и оболочки в [1, 2]. Работа [3] инициировала ряд публикаций по конструированию аксиоматических моделей деформации сред любой размерности с ориентационными степенями свободы. Обзор работ, имеющих отношение к тонким телам, можно найти в [4, 5].

В аппроксимационном подходе оболочка и стержень — трехмерные деформируемые объекты Коши. Уменьшение размерности достигается той или иной аппроксимацией объемного поля перемещений по «тонким» направлениям и применением метода моментов. Аппроксимационные формулировки уравнений деформации пластин и стержней известны из работ А. Коши, С. Пуассона и Г. Кирхгофа, на оболочки распространены Х. Ароном, А. Лявом, совершенствуются и обобщаются до настоящего времени [6].

Оба подхода в результате дают *моментные* модели деформации тонких тел, определенные в пространстве меньшего числа измерений, чем физическое. Оболочкообразным телам ставятся в соответствие двумерные модели, стержнеобразным — одномерные. Если аппроксимационные модели, будучи производными от модели Коши, оперируют обычно *перемещениями* как первичными неизвестными, то аксиоматические модели относят к первичным и *повороты* локальных элементов. Это исходное отличие затрудняет сравнительный анализ конкурирующих моделей в нелинейных формулировках.

Данная работа посвящена аппроксимационному моделированию конечных деформаций тонких тел и сопоставлению полученных *обобщенных* моделей с аксиоматическими моделями Коссера. При формулировке исходной трехмерной задачи деформации тонкого тела используется концепция явного выделения поля конечных поворотов в нелинейном *континууме Коши.* Концепция эта исходит от Г. Кирхгофа. В свое время он вышел за рамки линейной теории упругости, применив ее к малым призматическим объемам пластины и стержня, претерпевшим конечные повороты в результате деформации. На оболочки анализ Кирхгофа распространен А. Лявом, который сохранил допущение о линейном характере деформации призматического объема при его повороте. Последовательная нелинейная формулировка *варианта Кирхгофа — Лява* для оболочек с выделением конечных поворотов линейных элементов была дана в [7–9]. Более полная модель, учитывающая поперечные сдвиги при конечных поворотах, сформулирована в [10, 11]. Дополнительный эффект поперечного растяжения — сжатия введен в модель в [12, 13]. В [13] дан анализ разных вариантов выделения поля конечных поворотов и установлено, что вариант [10] наиболее близок по своей математической формулировке к *модели Коссера.* Там же аппроксимационным способом построена одномерная нелинейная модель пространственного изгиба стержня, в своей математической формулировке тождественная модели деформируемой *линии Коссера.*

Настоящая работа содержит новые инвариантные формулировки аппроксимационных моделей нелинейного изгиба оболочко- и стержнеобразных тел с явным выделением конечных поворотов материальных элементов. Они получены благодаря введению обобщенных силовых и деформационных тензоров, *индифферентных* к жестким поворотам и *энергетически сопряженных* в метрике вращающегося базиса.

1. Выделение локальных поворотов в деформируемом теле Коши. Пусть произвольное тело Коши в своем начальном (ненапряженном) состоянии занимает в физическом пространстве область-объем G с границей-поверхностью A_ν. Индекс ν служит символом ориентации поверхности локальным единичным нормальным вектором $\mathbf{e}_\nu$. Область G параметризуется тройкой пространственных координат t_I. Они же служат лагранжевыми координатами материальной частицы-точки тела. Положение такой точки задается позиционным вектором $\mathbf{g}(t_I)$ в начальном состоянии и вектором $\mathbf{g}^+(t_I)$ в деформированном. Тройка векторов $\mathbf{g}_I^+ \equiv \partial_I \mathbf{g}^+$ образует лагранжев (материальный) координатный базис $\mathbf{g}_I^+(\mathbf{g})$ с начальным значением $\mathbf{g}_I(\mathbf{g})$. Кроме того, в каждой точке вводится конвективный базис $\mathbf{a}_I^0(\mathbf{g})$ с начальным значением $\mathbf{a}_I(\mathbf{g})$, который поворачивается в точке как жесткое целое. Здесь и ниже все прописные латинские буквы в индексах пробегают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2; используется тензорное правило суммирования; возможная зависимость от времени явно не указывается; ∂_I — оператор частного дифференцирования по координате t_I.

Деформация тела Коши в лагранжевом описании представляется отображением

$$\mathbf{g} \to \mathbf{g}^+, \qquad \mathbf{g}_I \to \mathbf{g}_I^+, \qquad \mathbf{g}^+ = \mathbf{g} + \mathbf{w}, \qquad \mathbf{g}_I^+ \equiv \partial_I \mathbf{g}^+, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{g})$ — вектор локального перемещения. В своем деформированном (мгновенном) состоянии тело подвержено воздействию внешних сил, распределенных по его поверхности и объему. Объемные внешние силы вместе с инерционными задаются вектором плотности $\mathbf{p}^0(\mathbf{g})$ на единицу начального объема, поверхностные — вектором плотности $\mathbf{p}_\nu^0(\mathbf{g} \in A_\nu)$ на единицу начальной площади. Поле внутренних напряжений вводится первым тензором Пиолы $\mathbf{Z}_1(\mathbf{g})$.

Баланс внешних и внутренних сил в мгновенном состоянии тела Коши может быть выражен уравнением виртуальной работы (слабая формулировка):

$$\int\limits_G (\mathbf{p}^0 \cdot \delta\mathbf{g}^+ - \partial W^0)\, dG + \int\limits_{A_\nu} \mathbf{p}_\nu^0 \cdot \delta\mathbf{g}^+ dA_\nu = 0. \tag{1.2}$$

Здесь dG и dA_ν — дифференциалы объема и поверхности; δ — оператор абсолютной вариации; ∂W^0 — плотность виртуальной энергии деформации на единицу начального объема, определяемая равенством

$$\partial W^0 = \mathbf{z}^I \cdot \delta\mathbf{g}_I^+ \quad (\mathbf{z}^I = \mathbf{g}^I \cdot \mathbf{Z}_1). \tag{1.3}$$

Тройка контравариантных векторов напряжения $\mathbf{z}^I(\mathbf{g})$ подчинена локальному уравнению баланса моментов

$$\mathbf{z}^I \times \mathbf{g}_I^+ = 0. \tag{1.4}$$

Конвективный базис $\mathbf{a}_I^0(\mathbf{g})$ вводится ортогональным отображением

$$\mathbf{a}_I^0 = \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{\Theta}, \qquad \mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}^I \mathbf{a}_I^0, \qquad \overline{\mathbf{\Theta}} \cdot \mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{1}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{\Theta}(\mathbf{g})$ и $\overline{\mathbf{\Theta}}(\mathbf{g})$ — взаимно транспонированные тензоры конечного поворота (ротаторы); $\mathbf{1}$ — единичный тензор. Дифференцирование векторов конвективного базиса может быть выражено преобразованием

$$\partial_I \mathbf{a}_J^0 = -\mathbf{a}_J^0 \cdot \mathbf{C}_I^0, \qquad -\overline{\mathbf{C}}_I^0 = \mathbf{C}_I^0 = \mathbf{1} \times \mathbf{c}_I^0 = \mathbf{c}_I^0 \times \mathbf{1}. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{C}_I^0(\mathbf{g})$ и $\mathbf{c}_I^0(\mathbf{g})$ — антисимметричный тензор и сопутствующий вектор кривизны-кручения координатной линии t_I с начальными значениями $\mathbf{C}_I(\mathbf{g})$ и $\mathbf{c}_I(\mathbf{g})$ соответственно. Справедливы следующие правила варьирования:

$$\delta\mathbf{\Theta} = -\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}, \qquad \delta\mathbf{a}_I^0 = -\mathbf{a}_I^0 \cdot \mathbf{\Omega}, \qquad -\overline{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega} = \mathbf{1} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{1}. \tag{1.7}$$

Они вводят спин $\mathbf{\Omega}(\mathbf{g})$ и вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{g})$ виртуального поворота.

Второе из равенств (1.7) позволяет ввести оператор коротационной вариации δ_0 такой, что

$$\delta_0 \mathbf{a}_I^0 \equiv \delta\mathbf{a}_I^0 + \mathbf{a}_I^0 \cdot \mathbf{\Omega} \equiv 0. \tag{1.8}$$

Его применение к вектору $\mathbf{g}_I^+$ дает взаимообратимые равенства

$$\delta_0\mathbf{g}_I^+ = \delta\mathbf{g}_I^+ + \mathbf{g}_I^+ \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \delta\mathbf{g}_I^+ = \delta_0\mathbf{g}_I^+ - \mathbf{g}_I^+ \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.9}$$

справедливые для любого вектора, заданного в конвективном базисе. Замена в (1.3) вектора $\delta\mathbf{g}_I^+$ его значением (1.9) приводит с привлечением уравнения (1.4) к следующей формуле для виртуальной энергии деформации:

$$\partial W^0 = \mathbf{z}^I \cdot \delta_0\mathbf{g}_I^+. \tag{1.10}$$

Она подсказывает конструктивное представление материального базиса локальным преобразованием

$$\mathbf{g}_I^+ = \mathbf{a}_I^0 \cdot \mathbf{G}^+, \qquad \mathbf{G}^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{g}_I^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J G_{IJ}^+, \qquad G_{IJ}^+ \equiv \mathbf{g}_I^+ \cdot \mathbf{a}_J^0 \tag{1.11}$$

с неизвестным тензором искажения $\mathbf{G}^+(\mathbf{g})$, который не является метрическим тензором материального базиса.

Аддитивное разложение

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^0 + \mathbf{W}, \quad \mathbf{G}^0 \equiv \overline{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J G_{IJ}, \quad G_{IJ} \equiv \mathbf{g}_I \cdot \mathbf{a}_J \tag{1.12}$$

вводит тензор девиации

$$\mathbf{W} = \mathbf{G}^+ - \mathbf{G}^0 \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J W_{IJ}, \qquad W_{IJ} \equiv G_{IJ}^+ - G_{IJ} \tag{1.13}$$

с конвективными компонентами $W_{IJ}(\mathbf{g})$ и с нулевым значением в начальном состоянии. Эквивалентные (1.13) равенства

$$\mathbf{W} = \mathbf{a}_0^I\mathbf{w}_I, \qquad \mathbf{w}_I \equiv \mathbf{a}_0^J W_{IJ} = \mathbf{g}_I^+ - \mathbf{g}_I \cdot \boldsymbol{\Theta} \tag{1.14}$$

дают диадное разложение тензора девиации и определяют его через вектор перемещения и тензор поворота; $\mathbf{w}_I(\mathbf{g})$ — три вектора девиации.

Следствием (1.11)–(1.14) являются равенства

$$\delta_0\mathbf{g}_I^+ = \mathbf{a}_I^0 \cdot \delta_0\mathbf{G}^+ = \mathbf{a}_I^0 \cdot \delta_0\mathbf{W} = \delta_0\mathbf{w}_I, \tag{1.15}$$

где величины

$$\delta_0\mathbf{G}^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J \delta G_{IJ}^+, \qquad \delta_0\mathbf{W} \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J \delta W_{IJ} \tag{1.16}$$

имеют смысл коротационных вариаций тензоров. Их компоненты вычисляются по формуле

$$\delta W_{IJ} = \delta G_{IJ}^+ = \mathbf{a}_J^0 \cdot \delta_0\mathbf{g}_I^+ = \mathbf{a}_J^0 \cdot (\delta\mathbf{g}_I^+ + \mathbf{g}_I^+ \times \boldsymbol{\omega}). \tag{1.17}$$

Подстановка (1.15) в (1.10) позволяет представить величину ∂W^0 равенствами

$$\partial W^0 = \mathbf{z}^I \cdot \delta_0\mathbf{w}_I = \overline{\mathbf{Z}} \cdot\cdot\, \delta_0\mathbf{W} = Z^{IJ}\delta W_{IJ} \tag{1.18}$$

с новым тензором напряжений

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{a}_I^0\mathbf{z}^I \equiv \mathbf{a}_I^0\mathbf{a}_J^0 Z^{IJ}, \qquad Z^{IJ} \equiv \mathbf{z}^I \cdot \mathbf{a}_0^J, \tag{1.19}$$

который связан с тензором Пиолы преобразованием

$$\mathbf{Z} = \overline{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{Z}_1. \tag{1.20}$$

Согласно (1.18), тензор $\mathbf{W}$ может служить мерой деформации, энергетически сопряженной с тензором напряжений $\mathbf{Z}$. Но предварительно следует устранить произвол, заложенный в определении тензора $\mathbf{W}$. Ортогональное отображение (1.5) вводит в модель

Коши произвольный ротатор $\mathbf{\Theta}$, который подобно вектору имеет три степени свободы. Преобразование (1.11), в отличие от полярного разложения позиционного градиента, определяет тензор искажения с ротационным произволом. Такой произвол может быть устранен дополнительным требованием симметрии тензора девиации

$$W_{JI} \equiv W_{IJ}. \qquad (1.21а)$$

В этом случае преобразование (1.11) эквивалентно полярному разложению. Симметричный тензор содержит шесть независимых компонент, столько же у треугольного тензора. Поэтому вместо (1.21а) могут быть использованы альтернативные варианты

$$W_{32} \equiv W_{31} \equiv W_{21} \equiv 0; \qquad (1.21б)$$

$$W_{23} \equiv W_{13} \equiv W_{12} \equiv 0. \qquad (1.21в)$$

Первому из них отвечает тензор с верхней треугольной матрицей компонент, второму — с нижней. Если в варианте (1.21а) преобразования (1.5) и (1.11) выделяют некоторый осредненный поворот мгновенного базиса относительно начального, то в вариантах (1.21б) и (1.21в) они совмещают направления отдельных базисных векторов: $\mathbf{a}_3^0$ с $\mathbf{g}_3^+$ или $\mathbf{a}_1^0$ с $\mathbf{g}_1^+$. При выделении локальных поворотов у тонких тел варианты (1.21б) и (1.21в) предпочтительнее варианта (1.21а).

После подчинения ротатора одному из вариантов кинематических связей (1.21) тензор $\mathbf{W}$, определяемый равенством (1.13), обретает смысл тензора деформаций, энергетически сопряженного с тензором напряжений (1.20). Оба эти тензора по определению индифферентны к жестким поворотам.

Полученные кинематические и динамические уравнения необходимо дополнить формулировкой зависимостей, выражающих деформативные свойства материала. В частности, чисто механические процессы упругого и упругопластического деформирования многих конструкционных материалов выражаются линейной *инкрементальной* зависимостью

$$\delta_0 \mathbf{Z} = \mathbf{D} \cdot \cdot \delta_0 \mathbf{W} \qquad (1.22)$$

с тензором свойств $\mathbf{D}$ (четвертого ранга), который может учитывать влияние предыстории нагружения. Приращения деформаций вычисляются через приращения векторов перемещения и поворота по формуле вида (1.17). Зависимость (1.22) должна быть подчинена условию (1.4), которое обеспечивает симметрию тензора напряжений Коши.

Расширение предложенной формулировки на деформируемое тело Коссера выражается слабым уравнением [5]

$$\int\limits_G (\mathbf{p}^0 \cdot \delta\mathbf{w} + \mathbf{q}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} - \partial W^0) dG + \int\limits_{A_\nu} (\mathbf{p}_\nu^0 \cdot \delta\mathbf{w} + \mathbf{q}_\nu^0 \cdot \boldsymbol{\omega}) dA_\nu = 0 \qquad (1.23)$$

с плотностью виртуальной энергии деформации

$$\partial W^0 = \overline{\mathbf{Z}} \cdot \cdot \delta_0 \mathbf{W} + \overline{\mathbf{Y}} \cdot \cdot \delta_0 \mathbf{V} = Z^{IJ} \delta W_{IJ} + Y^{IJ} \delta V_{IJ}. \qquad (1.24)$$

В (1.23) и (1.24) $\mathbf{q}^0(\mathbf{g})$ — вектор объемных внешних и инерционных моментов; $\mathbf{q}_\nu^0(\mathbf{g} \in A_\nu)$ — вектор поверхностных внешних моментов; $\mathbf{W}(\mathbf{g})$ — тензор метрических деформаций (1.13); $\mathbf{Z}(\mathbf{g})$ — тензор внутренних напряжений (1.19); $\mathbf{Y}(\mathbf{g})$ — тензор внутренних моментов; $\mathbf{V}(\mathbf{g})$ — тензор изгибаний такой, что

$$\delta_0 \mathbf{V} \equiv \mathbf{a}_0^I \mathbf{a}_0^J \delta V_{IJ}, \qquad \delta V_{IJ} \equiv \mathbf{a}_I^0 \cdot \partial_I \boldsymbol{\omega}. \qquad (1.25)$$

Уравнения (1.23)–(1.25) содержат в качестве первичных неизвестных вектор перемещения $\mathbf{w}(\mathbf{g})$ и тензор поворота $\Theta(\mathbf{g})$, который подобно вектору имеет три скалярные степени свободы. Сравнение (1.23) и (1.24) с (1.2) и (1.18) показывает, что данная выше формулировка модели тела Коши является вырожденной по отношению к модели Коссера, когда в последней все внешние и внутренние моменты полагаются отсутствующими, а тензор поворота связывается с вектором перемещения условиями вида (1.21).

2. Модель типа Коссера для оболочкообразного тела. Пространственная система координат связывается с базовой поверхностью A оболочки, так что t_1 и t_2 — внутренние параметры поверхности, t_3 — поперечная координата. Объем, занимаемый оболочкой, обычно ограничен кромочной A_3 и двумя лицевыми A_n поверхностями. Последние задаются уравнением $t_3 = h_n$, так что $h_1 \leqslant t_3 \leqslant h_2$ (h_1 и h_2 — известные функции поверхностной точки или постоянные числа). Поверхность A_N ориентируется нормальным ортом $\mathbf{e}_N(\mathbf{g} \in A_N)$. Дифференциалы объема и поверхностей определяются равенствами

$$dG \equiv J dt_3 dA, \quad dA \equiv a dt_1 dt_2, \quad J \equiv g/a, \quad dA_n \equiv j_n dA, \quad dA_3 \equiv j_3 dt_3 dC, \tag{2.1}$$

где $g(\mathbf{g})$ и $a(\mathbf{a})$ — объемный и поверхностный якобианы координатной сетки; $j_N(\mathbf{g} \in A_N)$ — метрические параметры поверхностей; dC — дифференциал граничного контура базовой поверхности.

Как объемное тело оболочка задается уравнением $\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_3\mathbf{a}_3$, которое выражает объемный позиционный вектор $\mathbf{g}(t_I)$ через два поверхностных: позиционный $\mathbf{a}(t_i)$ и ориентационный (нормальный) $\mathbf{a}_3(t_i)$. В начальном состоянии вводится два локальных базиса: объемный $\mathbf{g}_I(\mathbf{g})$ и поверхностный $\mathbf{a}_I(\mathbf{a})$. Они связаны преобразованием переноса

$$\begin{gathered} \mathbf{g}^I = \mathbf{a}^I \cdot \mathbf{G}, \quad \mathbf{G} \equiv \mathbf{a}^I \mathbf{g}_I \equiv \mathbf{a}^I \mathbf{a}^J G_{IJ} = \mathbf{A} + t_3 \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{a}^I \mathbf{a}_I \equiv \mathbf{a}^I \mathbf{a}^J A_{IJ}, \\ A_{IJ} \equiv \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{a}_i \equiv \partial_i \mathbf{a}, \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{a}^i \mathbf{b}_i \equiv \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j B_{ij}, \quad B_{ij} \equiv \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{b}_i \equiv \partial_i \mathbf{a}_3. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Поверхностные тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ определяют метрику и кривизну пространства в окрестности базовой поверхности.

Деформация оболочкообразного тела изучается в рамках модели Коши и выражается локальным преобразованием (1.1). Объемные внешние и инерционные силы задаются вектором плотности $\mathbf{p}^0(\mathbf{g})$. Поле поверхностных сил расчленяется на три поля, заданных на кромочной и лицевых поверхностях векторами плотности $\mathbf{p}_N^0(\mathbf{g} \in A_N)$. Виртуальное динамическое уравнение (1.2), обеспечивающее баланс внешних и внутренних сил в мгновенном состоянии, формулируется в виде

$$\int_A \left[\int_{h_1}^{h_2} (\mathbf{p}^0 \cdot \delta \mathbf{w} - \partial W^0) J dt_3 \right] dA + \int_A \mathbf{p}_n^0 \cdot \delta \mathbf{w}^{(n)} j_n dA + \int_C \left(\int_{h_1}^{h_2} \mathbf{p}_3^0 \cdot \delta \mathbf{w} j_3 dt_3 \right) dC = 0 \tag{2.3}$$

(∂W^0 — объемная плотность виртуальной энергии деформации, $\delta \mathbf{w}^{(n)}$ — значение вектора $\delta \mathbf{w}$ на поверхности A_n).

Вместе с оболочкой деформируются базовая поверхность и ее базис: $\mathbf{a} \to \mathbf{a}^+(\mathbf{a})$, $\mathbf{a}_I \to \mathbf{a}_I^+(\mathbf{a})$. Локальным преобразованием

$$\mathbf{a}_I^0 = \mathbf{a}_I \cdot \Theta, \qquad \Theta \equiv \mathbf{a}^I \mathbf{a}_I^0, \qquad \partial_3 \Theta \equiv 0 \tag{2.4}$$

с тензором-ротатором $\Theta(\mathbf{a})$ на деформированной поверхности вводится конвективный базис $\mathbf{a}_I^0(\mathbf{a})$ с начальным значением $\mathbf{a}_I(\mathbf{a})$.

В предположении, что оболочка остается тонким телом, ее мгновенное состояние представляется уравнением

$$\mathbf{g}^+ = \mathbf{a}^+ + t_3\mathbf{a}_3^+, \quad \mathbf{a}_3^+ \equiv \mathbf{a}_3^0. \tag{2.5}$$

Ему отвечает линейная аппроксимация объемного поля перемещений относительно поперечной координаты

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + t_3\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u} \equiv \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}, \qquad \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}_3^0 - \mathbf{a}_3. \tag{2.6}$$

Эта зависимость задает движение поперечного материального волокна оболочки как жесткого целого с трансляционным перемещением $\mathbf{u}(\mathbf{a})$ и ротационным $t_3\mathbf{v}(\mathbf{a})$.

Изменение объемного базиса вследствие перемещения (2.6) выразим преобразованием

$$\mathbf{g}_I^+ = \mathbf{a}_I^0 \cdot \mathbf{G}^+, \quad \mathbf{G}^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{g}_I^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J G_{IJ}^+ = \mathbf{A}^+ + t_3\mathbf{B}^+, \tag{2.7}$$

в котором поверхностные тензоры $\mathbf{A}^+(\mathbf{a})$ и $\mathbf{B}^+(\mathbf{a})$ определены равенствами

$$\begin{gathered} \mathbf{A}^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_I^+ \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J A_{IJ}^+, \qquad A_{IJ}^+ \equiv \mathbf{a}_I^+ \cdot \mathbf{a}_J^0, \qquad \mathbf{a}_i^+ \equiv \partial_i\mathbf{a}^+, \\ \mathbf{B}^+ \equiv \mathbf{a}_0^i\mathbf{b}_i \equiv \mathbf{a}_0^i\mathbf{a}_0^j B_{ij}^+, \qquad B_{ij}^+ \equiv \mathbf{b}_i^+ \cdot \mathbf{a}_j^0, \qquad \mathbf{b}_i^+ \equiv \partial_i\mathbf{a}_3^0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Формулы (1.13), (2.2) и (2.7) позволяют представить тензор деформаций оболочки линейной зависимостью от поперечной координаты:

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{G}^+ - \overline{\mathbf{\Theta}} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}_0^I\mathbf{a}_0^J W_{IJ} = \mathbf{U} + t_3\mathbf{V}. \tag{2.9}$$

Она вводит поверхностные тензоры $\mathbf{U}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{a})$ метрических и изгибно-крутильных деформаций:

$$\begin{gathered} \mathbf{U} \equiv \mathbf{A}^+ - \overline{\mathbf{\Theta}} \cdot \mathbf{A} \cdot \Theta \equiv \mathbf{a}_0^i\mathbf{a}_0^J U_{iJ}, \quad U_{iJ} \equiv A_{iJ}^+ - A_{iJ}, \\ \mathbf{V} \equiv \mathbf{B}^+ - \overline{\mathbf{\Theta}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}_0^i\mathbf{a}_0^j V_{ij}, \quad V_{ij} \equiv B_{ij}^+ - B_{ij}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Оба они вырожденные в пространстве конвективного базиса.

Подстановка аппроксимаций (2.6) и (2.9) в (2.3) и (1.18) и интегрирование по поперечной координате приводят к двумерной формулировке уравнения виртуальной работы

$$\int_A [\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\omega} - \partial W]dA + \int_C [\mathbf{p}_3 \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{q}_3) \cdot \boldsymbol{\omega}]dC = 0 \tag{2.11}$$

с поверхностной плотностью виртуальной энергии деформации

$$\partial W \equiv \int_{h_1}^{h_2} \partial W^0 J dt_3 = \mathbf{x}^i \cdot \delta_0\mathbf{a}_i^+ + \mathbf{y}^i \cdot \delta_0\mathbf{b}_i^+ = \overline{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \delta_0\mathbf{U} + \overline{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, \delta_0\mathbf{V} = X^{iJ}\delta U_{iJ} + Y^{ij}\delta V_{ij}, \tag{2.12}$$

с тензорами обобщенных внутренних сил и моментов

$$\mathbf{X} \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{Z} J dt_3 \equiv \mathbf{a}_I^0\mathbf{a}_J^0 X^{IJ}, \ \mathbf{x}^i \equiv \mathbf{a}_0^i \cdot \mathbf{X}, \ \mathbf{Y} \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{Z} J t_3 dt_3 \equiv \mathbf{a}_I^0\mathbf{a}_J^0 Y^{IJ}, \ \mathbf{y}^i \equiv \mathbf{a}_0^i \cdot \mathbf{Y} \tag{2.13}$$

и с векторами обобщенных внешних сил и моментов

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_n^0 j_n + \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{p}^0 J dt_3, \ \mathbf{p}_3 \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{p}_3^0 j_3 dt_3, \ \mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_n^0 j_n h_n + \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{p}^0 J t_3 dt_3, \ \mathbf{q}_3 \equiv \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{q}_3^0 j_3 t_3 dt_3. \tag{2.14}$$

Варьирование кинематических переменных в (2.11) и (2.12) осуществляется по формулам

$$\begin{gathered}\delta_0\mathbf{U} = \mathbf{a}_0^i\mathbf{a}_0^J\delta U_{iJ}, \qquad \delta U_{iJ} = \mathbf{a}_J^0\cdot\delta_0\mathbf{a}_i^+, \qquad \delta_0\mathbf{V} = \mathbf{a}_0^i\mathbf{a}_0^j\delta V_{ij},\\ \delta V_{ij} = \mathbf{a}_j^0\cdot\delta_0\mathbf{b}_i^+, \qquad \delta_0\mathbf{a}_i^+ = \delta\mathbf{a}_i^+ + \mathbf{a}_i^+\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \delta_0\mathbf{b}_i^+ = \partial_i\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_3^0,\\ \delta_0\mathbf{c}_i^0 = \partial_i\boldsymbol{\omega}, \qquad \delta\mathbf{a}_i^+ = \partial_i\delta\mathbf{u}, \qquad \delta\mathbf{a}_3^+ = \delta\mathbf{a}_3^0 = \delta\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_3^0.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Для вычисления производных от базисных векторов используется формула (1.6).

В (2.7) содержится равенство $\mathbf{g}_3^+ = \mathbf{a}_3^0$, которое ориентирует конвективный вектор $\mathbf{a}_3^0$ в направлении материального вектора $\mathbf{g}_3^{\div}$. Благодаря (2.4) и (2.6) это равенство формулируется в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_3\cdot\boldsymbol{\Theta} - \mathbf{a}_3. \tag{2.16}$$

Такая связь однозначно выражает независимый вектор ротационного перемещения $\mathbf{v}(\mathbf{a})$ через введенный тензор-ротатор $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{a})$. Последний же не определяется вполне зависимостью (2.16). Это очевидно, поскольку равенство $\mathbf{a}_3^0 = \mathbf{g}_3^+$ не ориентирует однозначно конвективный базис: оно оставляет свободным *«сверлящий»* поворот базиса относительно вектора $\mathbf{g}_3^{\div}$. Отмеченная недоопределенность отчетливо проявляется в виртуальной формулировке связи (2.16):

$$\delta\mathbf{v} = -\mathbf{a}_3^0\cdot\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_3^0. \tag{2.17}$$

Данное равенство выполняется при произвольном значении «сверлящей» компоненты $\omega_3 \equiv \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}_3^0 = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{g}_3^{\div}$ вектора поворота. Оставаясь в рамках модели Коши, надо устранить эту ротационную степень свободы, например, тривиальным условием

$$\omega_3 \equiv \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}_3^0 \equiv 0. \tag{2.18}$$

Оно наиболее естественно согласуется с уравнением (2.11), в котором внешние силы не совершают работы на виртуальном повороте ω_3.

Во всех тех случаях, когда известна явная зависимость тензора напряжений (1.19) от объемного тензора деформаций (1.13), формулы (2.13) обретают смысл обобщенных определяющих уравнений. При наличии инкрементальных зависимостей (1.22) эти формулы дают обобщенные уравнения

$$\delta_0\mathbf{X} = \mathbf{D}_1\cdot\cdot\delta_0\mathbf{U} + \mathbf{D}_2\cdot\cdot\delta_0\mathbf{V}, \quad \delta_0\mathbf{Y} = \mathbf{D}_2\cdot\cdot\delta_0\mathbf{U} + \mathbf{D}_3\cdot\cdot\delta_0\mathbf{V}, \mathbf{D}_N \equiv \int\limits_{h_1}^{h_2}\mathbf{D}Jt_3^{N-1}dt_3.$$

Тензоры $\delta_0\mathbf{U}$ и $\delta_0\mathbf{V}$ вычисляются через независимые инкрементальные векторы $\delta\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ по формулам вида (2.15).

Для достаточно гладких силовых полей виртуальное уравнение (2.11) может быть преобразовано к форме Галеркина

$$\begin{gathered}\int\limits_A\{(\mathbf{p}+\nabla_i\mathbf{x}^i)\cdot\delta\mathbf{u} + [\mathbf{a}_3^0\times\mathbf{q} + \mathbf{a}_i^+\times\mathbf{x}^i + \nabla_i(\mathbf{a}_3^0\times\mathbf{y}^i)]\cdot\boldsymbol{\omega}\}dA+\\ +\int\limits_C[(\mathbf{p}_3 - e_{3i}\mathbf{x}^i)\cdot\delta\mathbf{u} + (\mathbf{q}_3 - e_{3i}\mathbf{y}^i)\cdot\delta\mathbf{v}]dC = 0,\end{gathered} \tag{2.19}$$

где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования на начальной базовой поверхности; $e_{3i} \equiv \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{a}_i$ — компоненты орта, нормального к поверхности A_3 и контуру C. Глобальное равенство (2.19) порождает локальные динамические уравнения, справедливые во внутренних точках базовой поверхности, и граничные условия на ее контуре. Как видно из равенства (2.17), вектор $\delta \mathbf{v}$ имеет лишь две компоненты в конвективном базисе. Поэтому контурный интеграл в (2.19) порождает пять скалярных условий на контуре (кинематических или динамических). Векторы $\delta \mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ ортогональны и при условии (2.18) взаимозаменяемы.

Двумерные уравнения (2.4), (2.8), (2.10)–(2.18) образуют слабую формулировку задачи деформации базовой поверхности с независимыми полями конечных перемещений и поворотов ее материальных частиц-точек. Равенства (2.6) и (2.9) позволяют восстановить объемные поля перемещений и деформаций оболочки. Поле напряжений вычисляется по объемным определяющим зависимостям (1.22) или иным. Расширенная система уравнений (2.4)–(2.18) формулирует обобщенную модель деформации оболочкообразного тела с жесткими поперечными волокнами и с выделенным полем их конечных поворотов. Виртуальное равенство (2.11) может быть представлено в форме (2.19) и заменено локальными динамическими уравнениями. В такой чисто механической формулировке обобщенная модель содержит пять первичных кинематических параметров: три компоненты поступательного перемещения и две компоненты поворота, которые связаны системой дифференциальных уравнений десятого порядка по поверхностным координатам.

Модель деформации поверхности Коссера формулируется слабым уравнением

$$\int\limits_A (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \delta u + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \omega - \partial W) dA + \int\limits_C (\tilde{\mathbf{p}}_3 \cdot \delta \mathrm{u} + \tilde{\mathbf{q}}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}) dC = 0$$

с поверхностной плотностью виртуальной энергии деформации

$$\partial W = \tilde{\mathbf{x}}^i \cdot \delta_0 \mathbf{a}_i^+ + \tilde{\mathbf{y}}^i \cdot \partial_i \boldsymbol{\omega}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор виртуального поворота с тремя степенями свободы. Необходимые и достаточные условия трансформации модели Коссера в модель оболочки с жесткими поперечными волокнами выражаются равенствами

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p},\ \tilde{\mathbf{p}}_3 = \mathbf{p}_3,\ \tilde{\mathbf{x}}^i = \mathbf{x}^i,\ \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{q},\ \tilde{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{q}_3,\ \tilde{\mathbf{y}}^i = \mathbf{a}_3^0 \times \mathbf{y}^i. \tag{2.20}$$

Они показывают, что обобщенная модель оболочки, в отличие от модели Коссера, исключает поперечные компоненты у векторов внешних и внутренних моментов. Эти дополнительные параметры, свойственные модели Коссера, представляют собой полярные реакции деформируемой поверхности на «сверлящие» микроповороты. В оболочке как теле Коши независимые микровращения невозможны и соответствующие реакции отсутствуют.

3. Модель типа Коссера для стержнеобразного тела. Пространственная система координат связывается с базовой линией (контуром) C_3 стержня, так что t_3 — внутренний параметр линии, t_1 и t_2 — поперечные координаты. Объем, занимаемый стержнем, обычно ограничен трубчатой A_3 и двумя торцевыми A_n поверхностями. Последние задаются уравнением $t_3 = l_n$, так что $l_1 \leqslant t_3 \leqslant l_2$ (l_1 и l_2 — постоянные числа). Поверхность A_N ориентируется нормальным ортом $\mathbf{e}_N(\mathbf{g} \in A_N)$. Дифференциалы объема и поверхностей определяются равенствами

$$dG \equiv J dt_3 dA, \quad dA_n \equiv dA \equiv dt_1 dt_2, \quad dA_3 \equiv j_3 dt_3 dC, \tag{3.1}$$

где $J(\mathbf{g})$ — якобиан координатной сетки; $j_3(\mathbf{g} \in A_3)$ — метрический параметр трубчатой поверхности; A — произвольное поперечное сечение; C — его контур.

Как объемное тело стержень задается уравнением $\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_i\mathbf{a}_i$, которое выражает объемный позиционный вектор $\mathbf{g}(t_I)$ через три контурных: позиционный $\mathbf{a}(t_3)$ и два ориентационных $\mathbf{a}_i(t_3)$, нормальных к базовой линии и ее касательному вектору $\mathbf{a}_3 \equiv \partial_3\mathbf{a}$. В начальном состоянии вводится два локальных базиса: объемный $\mathbf{g}_I(\mathbf{g})$ и контурный (ортогональный) $\mathbf{a}_I(\mathbf{a})$, связанных друг с другом преобразованием переноса:

$$\begin{gathered}\mathbf{g}_I = \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{G}, \quad \mathbf{G} \equiv \mathbf{a}^I\mathbf{g}_I \equiv \mathbf{a}^I\mathbf{a}^J G_{IJ} = \mathbf{A} + t_i\mathbf{B}_i, \mathbf{A} \equiv \mathbf{a}^I\mathbf{a}_I \equiv \mathbf{a}^I\mathbf{a}^J A_{IJ}, \\ A_{IJ} \equiv \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{a}_3 \equiv \partial_3\mathbf{a}, \quad \mathbf{B}_i \equiv \mathbf{a}^3\mathbf{b}_i \equiv \mathbf{a}^3\mathbf{a}^J B_{iJ}, \quad B_{iJ} \equiv \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{b}_i \equiv \partial_3\mathbf{a}_i.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Контурные тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{B}_i(\mathbf{a})$ определяют метрику и кривизну пространства в окрестности базовой линии.

Деформация стержнеобразного тела изучается в рамках модели Коши и выражается локальным преобразованием (1.1). Объемные внешние и инерционные силы задаются вектором плотности $\mathbf{p}^0(\mathbf{g})$. Поле поверхностных сил расчленяется на три поля, заданных на трубчатой и торцевых поверхностях векторами плотности $\mathbf{p}^0_N(\mathbf{g} \in A_N)$. Уравнение виртуальной работы (1.2) формулируется в виде

$$\int\limits_{C_3}\Big[\int\limits_{A}(\mathbf{p}^0 \cdot \delta\mathbf{w} - \partial W^0)J dA\Big]dt_3 + \int\limits_{C_3}\Big(\int\limits_{C}\mathbf{p}^0_3 \cdot \delta\mathbf{w} j_3 dC\Big)dt_3 + \int\limits_{A_n}\mathbf{p}^0_n \cdot \delta\mathbf{w}^{(n)}dA = 0. \tag{3.3}$$

Здесь ∂W^0 — объемная плотность виртуальной энергии деформации; $\delta\mathbf{w}^{(n)}$ — значение вектора $\delta\mathbf{w}$ на торце A_n.

Вместе со стержнем деформируются базовая линия и ее базис: $\mathbf{a} \to \mathbf{a}^+(\mathbf{a})$, $\mathbf{a}_I \to \mathbf{a}^+_I(\mathbf{a})$. Локальным преобразованием

$$\mathbf{a}^0_I = \mathbf{a}_I \cdot \mathbf{\Theta}, \quad \mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}^I\mathbf{a}^0_I, \quad \partial_i\mathbf{\Theta} \equiv 0 \tag{3.4}$$

с тензором-ротатором $\mathbf{\Theta}(\mathbf{a})$ на деформированной линии вводится конвективный базис $\mathbf{a}^0_I(\mathbf{a})$ с начальным значением $\mathbf{a}_I(\mathbf{a})$. В предположении, что стержень остается тонким телом, его мгновенное состояние представляется уравнением

$$\mathbf{g}^+ = \mathbf{a}^+ + t_i\mathbf{a}^+_i, \quad \mathbf{a}^+_i \equiv \mathbf{a}^0_i, \tag{3.5}$$

которому отвечает линейная аппроксимация объемного поля перемещений относительно поперечных координат:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + t_i\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}_i \equiv \mathbf{a}^0_i - \mathbf{a}_i. \tag{3.6}$$

Эта зависимость задает движение поперечного материального сечения стержня как жесткого целого с трансляционным перемещением $\mathbf{u}(\mathbf{a})$ и ротационным $t_i\mathbf{v}_i(\mathbf{a})$.

Изменение объемного базиса вследствие перемещения (3.6) выразим преобразованием

$$\mathbf{g}^+_I = \mathbf{a}^0_I \cdot \mathbf{G}^+, \quad \mathbf{G}^+ \equiv \mathbf{a}^I_0\mathbf{g}^+_I \equiv \mathbf{a}^I_0\mathbf{a}^J_0 G^+_{IJ} = \mathbf{A}^+ + t_i\mathbf{B}^+_i, \tag{3.7}$$

в котором контурные тензоры $\mathbf{A}^+(\mathbf{a})$ и $\mathbf{B}^+_i(\mathbf{a})$ определены равенствами

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^+ \equiv \mathbf{a}^I_0\mathbf{a}^+_I \equiv \mathbf{a}^I_0\mathbf{a}^J_0 A^+_{IJ}, \quad A^+_{IJ} \equiv \mathbf{a}^+_I \cdot \mathbf{a}^0_J, \quad \mathbf{a}^+_3 \equiv \partial_3\mathbf{a}^+, \\ \mathbf{B}^+_i \equiv \mathbf{a}^3_0\mathbf{b}^+_i \equiv \mathbf{a}^3_0\mathbf{a}^J_0 B^+_{iJ}, \quad B^+_{iJ} \equiv \mathbf{b}^+_i \cdot \mathbf{a}^0_J, \quad \mathbf{b}^+_i \equiv \partial_3\mathbf{a}^0_i.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Формулы (1.13), (3.2) и (3.7) позволяют представить тензор деформаций стержня линейной зависимостью от поперечных координат:

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{G}^+ - \mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}_0^3\mathbf{a}_0^J W_{3J} = \mathbf{U} + t_i\mathbf{V}_i. \tag{3.9}$$

Она вводит контурные тензоры $\mathbf{U}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{V}_i(\mathbf{a})$ метрических и изгибно-крутильных деформаций:

$$\begin{aligned} &\mathbf{U} \equiv \mathbf{A}^+ - \mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}_0^3\mathbf{a}_0^J U_{3J}, \qquad U_{3J} \equiv A_{3J}^+ - A_{3J},\\ &\mathbf{V}_i \equiv \mathbf{B}_i^+ - \mathbf{\Theta}\cdot\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{\Theta} \equiv \mathbf{a}_0^3\mathbf{a}_0^J V_{iJ}, \qquad V_{iJ} \equiv B_{iJ}^+ - B_{iJ}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Оба они вырожденные в пространстве конвективного базиса.

Подстановка аппроксимаций (3.6) и (3.9) в (3.3) и (1.18) и интегрирование по поперечному сечению приводят к одномерной формулировке уравнения виртуальной работы

$$\int\limits_{C_3} (\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{u} + \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\omega} - \partial W)dt_3 + \mathbf{p}_n\cdot\delta\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{q}_n\cdot\boldsymbol{\omega}^{(n)} = 0 \tag{3.11}$$

с контурной плотностью виртуальной энергии деформации

$$\begin{aligned} \partial W \equiv \int\limits_A \partial W^0 J dA &= \mathbf{x}^3\cdot\delta_0\mathbf{a}_3^+ + \mathbf{y}_i^3\cdot\delta_0\mathbf{b}_i^+ = \\ &= \overline{\mathbf{X}}\cdot\cdot\delta_0\mathbf{U} + \overline{\mathbf{Y}}_i\cdot\cdot\delta_0\mathbf{V}_i = X^{3J}\delta U_{3J} + Y_i^{3J}\delta V_{iJ}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

с тензорами обобщенных внутренних сил и моментов

$$\mathbf{X} \equiv \int\limits_A \mathbf{Z}JdA \equiv \mathbf{a}_I^0\mathbf{a}_J^0 X^{IJ},\ \mathbf{x}^3 \equiv \mathbf{a}_0^3\cdot\mathbf{X},\ \mathbf{Y}_i \equiv \int\limits_A \mathbf{Z}Jt_i dA \equiv \mathbf{a}_I^0\mathbf{a}_J^0 Y^{IJ},\ \mathbf{y}_i^3 \equiv \mathbf{a}_0^3\cdot\mathbf{Y}_i \tag{3.13}$$

и с векторами обобщенных внешних сил и моментов

$$\begin{aligned} &\mathbf{p} \equiv \int\limits_A \mathbf{p}^0 J dA + \int\limits_C \mathbf{p}_3^0 j_3 dC, \qquad \mathbf{q}_n \equiv \mathbf{a}_i^0 \times \int\limits_{A_n} \mathbf{p}_n^0 t_i dA,\\ &\mathbf{p}_n \equiv \int\limits_{A_n} \mathbf{p}_n^0 dA, \qquad \mathbf{q} \equiv \mathbf{a}_i^0 \times \Big(\int\limits_A \mathbf{p}^0 J t_i dA + \int\limits_C \mathbf{p}_3^0 j_3 t_i dC\Big). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Варьирование кинематических переменных в (3.11) и (3.12) осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} &\delta_0\mathbf{U} = \mathbf{a}_0^3\mathbf{a}_0^J\delta U_{3J}, \quad \delta U_{3J} = \mathbf{a}_J^0\cdot\delta_0\mathbf{a}_3^+, \quad \delta_0\mathbf{V}_i = \mathbf{a}_0^3\mathbf{a}_0^J\delta V_{iJ}, \quad \delta V_{iJ} = \mathbf{a}_J^0\cdot\delta_0\mathbf{b}_i^+,\\ &\delta_0\mathbf{a}_3^+ = \delta\mathbf{a}_3^+ + \mathbf{a}_3^+\times\boldsymbol{\omega}, \quad \delta_0\mathbf{b}_i^+ = \partial_3\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_i^0, \quad \delta_0\mathbf{c}_i^0 = \partial_3\boldsymbol{\omega},\\ &\delta\mathbf{a}_3^+ = \partial_3\delta\mathbf{u}, \quad \delta\mathbf{a}_i^+ = \delta\mathbf{a}_i^0 = \delta\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}_i^0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Как видно, вариации метрических и изгибно-крутильных деформаций однозначно выражаются через два независимых виртуальных вектора: $\delta\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$. Их компоненты составляют шесть степеней свободы деформации базовой линии стержня.

Когда известна явная зависимость тензора напряжений (1.19) от объемного тензора деформаций (1.13), формулы (3.13) обретают смысл обобщенных определяющих уравнений. В частности, инкрементальные зависимости (1.22) превращаются с помощью (3.13) в обобщенные уравнения

$$\delta_0\mathbf{X} = \mathbf{D}_0\cdot\cdot\delta_0\mathbf{U} + \mathbf{D}_j\cdot\cdot\delta_0\mathbf{V}_j, \quad \delta_0\mathbf{Y}_i = \mathbf{D}_i\cdot\cdot\delta_0\mathbf{U} + \mathbf{D}_{ij}\cdot\cdot\delta_0\mathbf{V}_j,$$

$$\mathbf{D}_0 \equiv \int_A \mathbf{D}J dA, \quad \mathbf{D}_i \equiv \int_A \mathbf{D}Jt_i dA, \quad \mathbf{D}_{ij} \equiv \int_A \mathbf{D}Jt_it_j dA.$$

Тензоры $\delta_0\mathbf{U}$ и $\delta_0\mathbf{V}_i$ вычисляются через независимые инкрементальные векторы $\delta\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ по формулам вида (3.15).

Для достаточно гладких силовых полей виртуальное уравнение (3.11) преобразуется к форме Галеркина

$$\int_{C_3}[(\mathbf{p} + \partial_3\mathbf{x}^3)\cdot\delta\mathbf{u} + (\mathbf{q} + \mathbf{a}_3^+ \times \mathbf{x}^3 + \partial_3\mathbf{y}^3)\cdot\boldsymbol{\omega}]dt_3 +$$

$$+ [(\mathbf{p}_n - e_{n3}\mathbf{x}^3)\cdot\delta\mathbf{u} + (\mathbf{q}_n - e_{n3}\mathbf{y}^3)\cdot\boldsymbol{\omega}]_{t_3=l_n} = 0, \quad \mathbf{y}^3 \equiv \mathbf{a}_i^0 \times \mathbf{y}_i^3, \tag{3.16}$$

где $e_{n3} \equiv \mathbf{e}_n\cdot\mathbf{a}_3$ — компоненты орта, нормального к торцевой поверхности A_n. Глобальное равенство (3.16) порождает локальные динамические уравнения, справедливые во внутренних точках базовой линии, и условия в граничных точках.

Одномерные уравнения (3.4), (3.8), (3.10)–(3.15) дают слабую формулировку задачи деформации базовой линии с независимыми полями конечных перемещений и поворотов ее материальных частиц-точек. Равенства (3.6) и (3.9) восстанавливают объемные поля перемещений и деформаций стержня. Поле напряжений вычисляется по объемным определяющим зависимостям (1.22) или иным. Расширенная система уравнений (3.4)–(3.15) формулирует обобщенную модель деформации стержнеобразного тела с жесткими поперечными сечениями и с выделенным полем их конечных поворотов. Виртуальное равенство (3.11) может быть представлено в форме (3.16) и заменено локальными динамическими уравнениями. В такой чисто механической формулировке обобщенная модель содержит шесть первичных кинематических параметров: три компоненты поступательного перемещения и три компоненты поворота, которые связаны системой дифференциальных уравнений двенадцатого порядка по контурной координате.

Модель деформации *линии Коссера* формулируется слабым уравнением [5]

$$\int_{C_3}(\tilde{\mathbf{p}}\cdot\delta\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\omega} - \partial W)dt_3 + \tilde{\mathbf{p}}_n\cdot\delta\mathbf{u}^{(n)} + \tilde{\mathbf{q}}_n\cdot\boldsymbol{\omega}^{(n)} = 0$$

с контурной плотностью виртуальной энергии деформации

$$\partial W = \tilde{\mathbf{x}}^3\cdot\delta_0\mathbf{a}_3^+ + \tilde{\mathbf{y}}^3\cdot\partial_3\boldsymbol{\omega}.$$

Условия трансформации модели Коссера в модель стержня с жесткими поперечными сечениями выражаются равенствами

$$\tilde{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_n \equiv \mathbf{p}_n, \quad \tilde{\mathbf{x}}^3 \equiv \mathbf{x}^3, \quad \tilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}, \quad \tilde{\mathbf{q}}_n \equiv \mathbf{q}_n, \quad \tilde{\mathbf{y}}^3 \equiv \mathbf{a}_i^0 \times \mathbf{y}_i^3. \tag{3.17}$$

Они раскрывают смысл аксиоматических силовых параметров модели Коссера применительно к стержнеобразному телу.

Приведенные инвариантные формулировки уравнений деформации оболочко- и стержнеобразных тел Коши — это обобщенные модели *типа Коссера*. В дополнение к аксиоматическим моделям Коссера они дают алгоритм построения обобщенных (дву- и одномерных) определяющих зависимостей, согласованных с локальными свойствами материала, образующего тело, и содержат уравнения для восстановления объемных полей перемещений, деформаций и напряжений в тонком теле.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Cosserat E., Cosserat F.** Theory des corps deformables // Chwolson's Traitė Physique: 2nd ed. Paris, 1909. Appendix. P. 953–1173.
2. **Кутилин Д. И.** Теория конечных деформаций. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
3. **Ericksen J. L., Truesdell C.** Exact theory of stress and strain in rods and shells // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. V. 1, N 4. P. 295–323.
4. **Pietraszkiewicz W.** Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells // Advances in Mechanics. 1989. V. 12, N 1. P. 51–130.
5. **Шкутин Л. И.** Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988.
6. **Modelling** of Shells with Nonlinear Behaviour // Extended Abstracts of Euromech. Colloquium 292. Germany, 1992. Munich: TU, 1992.
7. **Алумяэ Н. А.** О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек // ПММ. 1956. Т. 20, № 1. С. 136–139.
8. **Pietraszkiewicz W.** Finite Rotations and Lagrangian Description in the Nonlinear Theory of Shells. Warszawa; Poznań: Polish Scientific Publishers, 1979.
9. **Шкутин Л. И.** Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек. В 3 ч. // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. гос. ун-т. 1977. Вып. 7. С. 3–9; 1978. Вып. 8. С. 38–43; 1978. Вып. 9. С. 19–25.
10. **Simmonds J. G., Danielson D. A.** Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors // Trans. ASME. 1972. V. E-39, N 4. P. 1085–1090.
11. **Альтенбах Х., Жилин П. А.** Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. 1988. Т. 11, № 5. С. 107–148.
12. **Wempner G.** Finite rotations in the approximation of shells // Finite Rotations in Structural Mechanics: Proc. Euromech. Colloquium 197. Poland, 1985. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 357–368.
13. **Shkutin L. I.** Nonlinear models of deformed thin bodies with separation of the finite rotation field // Ibid. P. 272–285.
14. **Biot M. A.** Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // Philosophical Magazine. Ser. 7. 1939. V. 27, N 183. P. 486–489.
15. **Шамина В. А.** Об определении вектора перемещения по компонентам тензора деформаций в нелинейной механике сплошной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 14–22.

Поступила в редакцию 10/IV 1995 г.