## ЛИТЕРАТУРА

1. **Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е.** Кинетическая природа прочности твердых тел. М., «Наука», 1974.
2. **Регель В. Р.** Кинетическая концепция прочности как научная основа для прогнозирования долговечности полимеров под нагрузкой.— «Механика полимеров», 1971, № 1.

---

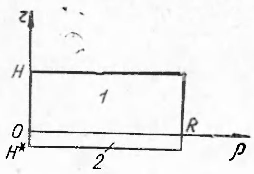
УДК 531.299 : 531.781

# ТЕРМОУПРУГАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

*Т. Г. Белейчева, К. К. Зилинг*

*(Новосибирск)*

Большинство приборов и устройств микроэлектроники представляют собой многослойные структуры, выполненные из материалов с различными коэффициентами термического расширения и упругими константами. Термические напряжения, возникающие в таких системах в результате изменения температуры при их изготовлении и эксплуатации, могут приводить к разрушению, пластической деформации или изменению физических свойств материалов. В то же время существующие расчетные модели не описывают напряженное состояние в реальных системах конечных размеров вследствие принятых упрощений. Так, расчеты [1—3] выполнены на основе технической теории балок, а в работах [4, 5] решение получено для бесконечной полосы на полупространстве.




Ф и г. 1

В данной работе в качестве математической модели реальной системы рассмотрен прямой круговой цилиндр радиуса $R$, разделенный плоскостью $z = 0$ на два слоя толщиной $H$ и $H^*$ (фиг. 1). Здесь и далее величины, относящиеся к слою *2*, отмечены звездочкой. Задача о деформации цилиндра при охлаждении от температуры $T_1$ до $T_2$ решена в рамках линейной теории термоупругости. Принято, что материал каждого слоя однороден и изотропен, температура не зависит от координат, а коэффициенты термического расширения $\alpha$ и $\alpha^*$ не зависят от $T$.

Задача рассмотрена в двух постановках:

1. Для произвольного соотношения $H$ и $H^*$ разностными методами решена задача, математически состоящая из уравнений Дюгамеля — Неймана [6], записанных в цилиндрических координатах, и граничных условий, соответствующих отсутствию нагрузок на внешних поверхностях тела:

$$\sigma_{\rho\rho}(R, z) = 0, \quad \sigma^*_{\rho\rho}(R, z) = 0; \tag{1}$$

$$\sigma_{zz}(\rho, H) = 0, \quad \sigma^*_{zz}(\rho, -H^*) = 0; \tag{2}$$

$$\tau_{\rho z}(R, z) = 0, \quad \tau^*_{\rho z}(R, z) = 0; \tag{3}$$

$$\tau_{\rho z}(\rho, H) = 0, \quad \tau^*_{\rho z}(\rho, -H^*) = 0. \tag{4}$$

При $\rho = 0$ выполняются условия осевой симметрии. Кроме того, на плоскости $z = 0$ слои жестко скреплены:

(5) $\sigma_{zz}(\rho, 0) = \overset{*}{\sigma}_{zz}(\rho, 0);$ (7) $u(\rho, 0) = u^*(\rho, 0);$

(6) $\tau_{\rho z}(\rho, 0) = \overset{*}{\tau}_{\rho z}(\rho, 0);$ (8) $w(\rho, 0) = w^*(\rho, 0).$

Здесь $\sigma_{ii}$ и $\tau_{ij}$ — нормальные и касательные напряжения; $u$ и $w$ — проекции смещения на оси $\rho$ и $z$ соответственно. Недеформированным считается состояние при $T_1$.

Исходная задача сведена к эквивалентной вариационной на минимум потенциальной энергии $W$ системы. При этом граничные условия в напряжениях удовлетворяются точно при минимизации $W$. Выражение для $W$ при осесимметричной деформации взято из [7]. Вариационная задача $\delta W = 0$, записанная относительно непрерывных переменных $u$ и $w$, далее заменена вариационной задачей относительно дискретных значений $u_{ij}$ и $w_{ij}$. Использована двойная сетка и аппроксимация части функций и их производных из [7]. Кроме того, использована аппроксимация

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho u) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_1} + \frac{u_{i,j}}{\rho_j}$$

точности $0(h_1)$, где индексы $i$ и $j$ обозначают соответственно горизонтальные и вертикальные линии сетки ($i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$); $h_1$ — шаг сетки по направлению радиуса. Приближенное выражение $W(u_{i,j}, w_{i,j})$ получено суммированием по всем ячейкам. Разностные уравнения, аппроксимирующие исходные дифференциальные, получены из условия стационарности

$$(\partial W/\partial u)_{i,j} = 0, \ (\partial W/\partial w)_{i,j} = 0.$$

В частности, условие $(\partial W/\partial w)_{i,j} = 0$ для точки границы раздела слоев $(m, j)$ дает уравнение

$$\begin{gathered}
h_1(x^* - x)u_{m,j} + (j-1)\left(\frac{2h_1^2}{h_4}\psi^* + \frac{2h_1^2}{h_2}\psi + G^*h_4 + Gh_2\right)w_{m,j} + \\
+ h_1(x^*u_{m+1,j} - xu_{m-1,j}) - 2(j-1)h_1^2\frac{\psi^*}{h_4}w_{m+1,j} - \\
- 2(j-1)h_1^2\frac{\psi}{h_2}w_{m-1,j} - \frac{h_1}{4}\left[\frac{j(1-4\nu_*) + 2\nu_*}{1-2\nu_*}G^* - \frac{j(1-4\nu) + 2\nu}{1-2\nu}G\right]u_{m,j+1} + \\
+ \frac{G^*h_1(j-2\nu_*)}{4(1-2\nu_*)}u_{m+1,j+1} - \frac{Gh_1(j-2\nu)}{4(1-2\nu)}u_{m-1,j+1} - \frac{(2j-1)}{4}(G^*h_4 + Gh_2)w_{m,j+1} + \\
+ \frac{h_1}{4}\left[\frac{j(1-4\nu_*) - 2(1-3\nu_*)}{1-2\nu_*}G^* - \frac{j(1-4\nu) - 2(1-3\nu)}{1-2\nu}G\right]u_{m,j-1} + \\
+ \left[\frac{\psi^*h_1}{2} - \frac{jG^*h_1}{4(1-2\nu_*)}\right]u_{m+1,j-1} - \left[\frac{\psi h_1}{2} - \frac{jGh_1}{4(1-2\nu)}\right]u_{m-1,j-1} - \\
- \frac{(2j-3)}{4}(G^*h_4 + Gh_2)w_{m,j-1} = 2(j-1)(T_2 - T_1)h_1^2\left[\frac{G^*(1+\nu_*)\alpha_*}{1-2\nu_*} - \right. \\
\left. - \frac{G(1+\nu)\alpha}{1-2\nu}\right],
\end{gathered}$$

где

$$\psi = G(1-\nu)/(1-2\nu); \quad \psi^* = G^*(1-\nu_*)/(1-2\nu_*);$$
$$x = G\nu/(1-2\nu); \quad x^* = G^*\nu_*/(1-2\nu_*); \quad (j-1)h_1 = R.$$

Здесь $G$ — модуль сдвига; $\nu$ — коэффициент Пуассона. Из приведенного уравнения соответствующей заменой констант получены и уравнения для внутренних точек среды *1* и *2*.

Полученная схема девятиточечная. Все неизвестные были сгруппированы по линиям в вектор-столбцы типа

$$\eta_j = \begin{vmatrix} u_{1,j} \\ w_{1,j} \\ u_{2,j} \\ w_{2,j} \\ \dots \\ u_{p,j} \\ w_{p,j} \end{vmatrix}.$$

Поскольку каждый $\eta_j$ связан только с $\eta_{j-1}$ и $\eta_{j+1}$, матрица коэффициентов при неизвестных принимает блочно-тридиагональную форму. Это позволило при решении использовать метод последовательной верхней линейной релаксации по линиям [8] с параметром релаксации $\varphi = 1{,}8$ из [9]. Описанный выше алгоритм был запрограммирован для решения на ЭВМ БЭСМ. При этом учитывалось, что при $H \ll H^*$ или $H \gg H^*$ резкое различие шагов $h_2$ и $h_4$ в направлении оси $z$ для сред *1* и *2* может приводить к искажению граничных условий. В связи с этим у границы шаги взяты равными, а переход по шагу осуществляется в среде *1*.

Значения компонент напряжения в точке получены как средние взвешенные значения тех же компонент, взятых по площади всех ячеек, содержащих эту точку. Использованы те же аппроксимации, что и при получении разностной схемы. В частности, для внутренних точек среды *1* напряжения рассчитывались по формулам

$$\sigma_{\rho\rho}|_{i,j} = \frac{2G}{1-2\nu}\left\{\nu \frac{u_{i,j}}{(j-1)h_1} + (1-\nu)\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2h_1} + \nu\frac{w_{i-1,j}-w_{i+1,j}}{2h_2} - \right.$$
$$\left. - (1+\nu)\alpha(T_2-T_1)\right\},$$
$$\tau_{\rho z}|_{i,j} = G\left\{\frac{u_{i-1,j}-u_{i+1,j}}{2h_2} + \frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2h_1}\right\}.$$

Аналогичные выражения для среды *2* получаются соответствующей заменой констант. Полученные разностные выражения аппроксимируют дифференциальные выражения в законе Гука с точностью $0(h^2)$. Для точек границ формулы изменяются и имеют точность аппроксимации $0(h)$. В частности, на границе $\rho = R$ в среде *1*

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{2G}{1-2\nu}\left\{\nu\frac{u_{i,q}}{(q-1)h_1} + (1-\nu)\frac{(u_{i,q}-u_{i,q-1})}{h_1} + \right.$$
$$\left. + \nu\frac{(w_{i-1,q}-w_{i+1,q})}{2h_2} - (1+\nu)\alpha(T_2-T_1)\right\},$$
$$\tau_{\rho z} = G\frac{(u_{i-1,q}-u_{i+1,q})}{2h_2} + G\frac{(w_{i,q}-w_{i,q-1})}{h_1}.$$

При отработке программы проведен ряд тестов для упрощенных математических и физических моделей. Так, для однородного цилиндра было найдено, что точность «нулей» напряжений составляла $\sim 10^{-4}$ кг/мм$^2$, а смещения соответствовали случаю свободного сжатия. В качестве характеристики точности найденных значений напряжений применялась величина

$$\delta = (|\sigma_h - \sigma_{2h}|)/|\sigma_h|,$$

где $\sigma_h$ и $\sigma_{2h}$ — решения разностной задачи, полученные при шагах $h_1$, $h_2$, $h_4$ и $2h_1$, $2h_2$, $2h_4$ соответственно.

2. Для случая $H^* \ll H$, $H^* \ll R$ задача может быть упрощена. Действительно, пренебрегая изгибной жесткостью слоя *2*, полагая в (5) $\sigma_{zz}(\rho, 0) = 0$ и заменяя в (6) для этого слоя действие касательных нагрузок действием массовых сил $q(\rho)$

$$\tau_{\rho z}(\rho, 0) = H^* q(\rho), \tag{9}$$

для $u^*(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho^2 \frac{d^2 u^*(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{du^*(\rho)}{d\rho} - u^*(\rho) = -q(\rho) \frac{1-\nu_*^2}{E_*} \rho^2 \tag{10}$$

с граничными условиями в виде

$$\left.\frac{du^*(\rho)}{d\rho} - \frac{u^*(\rho)}{\rho}\right|_{\rho=0} = 0, \quad \left.\frac{du^*(\rho)}{d\rho} + \nu^* \frac{u^*(\rho)}{\rho}\right|_{\rho=R} = (\alpha^* - \alpha)\,\Delta T\,(1+\nu_*) \tag{11}$$

(E — модуль Юнга). Для простоты принято, что коэффициент термического расширения слоя *2* равен ($\alpha^* - \alpha$), а слоя *1* — нулю.

Решение уравнения (10) с граничными условиями (11) имеет вид

$$u^*(\rho) = \rho\left[(\alpha^* - \alpha)\,\Delta T + \frac{1-\nu_*^2}{2E_*}\int_\rho^R q(\rho)\,d\rho + \frac{1-\nu_*^2}{2RE_*}\int_0^R \rho^2 q(\rho)\,d\rho\right] + \frac{1-\nu_*^2}{2E_*\rho}\int_0^\rho \rho^2 q(\rho)\,d\rho.$$

Разлагая $q(\rho)$ в ряд

$$q(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k J_1(\mu_k \rho),$$

имеем вместо (7)

$$u(\rho) = \frac{1-\nu_*^2}{E_*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{\mu_k^2} J_1(\mu_k\rho) + \rho\,[\alpha^* - \alpha]\,\Delta T - \frac{1-\nu_*}{E_*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{\mu_k} J_0(\mu_k R).$$

Решение задачи для слоя *1* сводится [10] к отысканию бигармонической функции напряжений $\Phi(\rho, z)$, значения которой на поверхности тела заданы граничными условиями. Используя метод решения, предложенный в [11], $\Phi(\rho, z)$ ищем в виде

$$\Phi(\rho, z) = z(A\rho^2 + Bz^2) + \sum_{k=1}^{\infty}[E_k I_0(\lambda_k\rho) + G_k\lambda_k\rho I_1(\lambda_k\rho)]\sin\lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \operatorname{sh}\mu_k z + B_k \operatorname{ch}\mu_k z + C_k\mu_k z \operatorname{sh}\mu_k z + D_k\mu_k z \operatorname{ch}\mu_k z]\,J_0(\mu_k\rho),$$

где $\mu_k$ — корни уравнения $J_1(\mu_k R) = 0$; $\lambda_k = k\pi/H$. В этом случае условия при $\rho = 0$ выполняются автоматически. Используя граничные условия (1)—(5), (9), имеем

(12)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}\right]_{\rho=R} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]_{z=0} = H^*\sum_{k=1}^{\infty} S_k J_1(\mu_k\rho),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]_{z=0} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]_{z=H} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]_{z=H} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(1-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]_{\rho=R} = 0.$$

Для определения неизвестных коэффициентов $S_k$ дополнительно имеем условие

$$(13)\quad -\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{1-\nu_*^2}{\mathrm{E}_*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{\mu_k^2} + \rho\left[(\alpha^*-\alpha)\,\Delta T - \frac{1-\nu_*}{\mathrm{E}_*}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{\mu_k}\times\right.$$
$$\left.\times J_0(\mu_k R)\right].$$

Исключая из (12), (13) коэффициенты $A$, $B$, $A_k$, $B_k$, $E_k$ и вводя новые переменные

$$X_k = \lambda_k^4 H I_1(\lambda_k R)\,[2(1-\nu)+\varepsilon_k]\,G_k,$$

$$Y_k = \mu_k^4 R J_0(\mu_k R)\,\mathrm{sh}\,\mu_k H\left(C_k\,\mathrm{cth}\,\frac{\mu_k H}{2} + D_k\right),$$

$$Z_k = \mu_k^4 R J_0(\mu_k R)\,\mathrm{sh}\,\mu_k H\left(C_k\,\mathrm{th}\,\frac{\mu_k H}{2} + D_k\right),$$

$$T_k = \mu_k R H^* J_0(\mu_k R)\,S_k,$$

получаем совокупность бесконечных систем линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}(M_{pk}T_k + N_{pk}Y_k) = X_p\ (p = 1, 3, 5, \ldots),\quad \sum_{k=1}^{\infty}(M_{pk}T_k - N_{pk}Z_k) =$$
$$= X_p\ (p = 2, 4, 6, \ldots),$$

$$(14)\qquad \beta_k Y_k - \sum_{p=1,3,5,\ldots} L_{pk}X_p = T_k,\quad -\gamma_k Z_k - \sum_{p=2,4,6,\ldots} Q_{pk}X_p = T_k,$$

$$\omega_k T_k + \sum_{p=1}^{\infty}\varphi_{pk}X_p - P_k Z_k + F_k Y_k = -\sum_{p=1}^{\infty}\delta_p T_p + (\alpha^*-\alpha)\,\Delta T,$$

где

$$M_{pk} = \frac{2\,[2(1-\nu)+\varepsilon_p]}{R^2\,[\varkappa_k + 2(1+\nu)/(\lambda_k R)^2]\,(\lambda_p^2+\mu_k^2)};\quad N_{pk} = M_{pk}\frac{2}{(\lambda_p^2+\mu_k^2)};$$

$$L_{pk} = \frac{8\mu_k^3}{H\,\mathrm{th}\,\frac{\mu_k H}{2}\,[2(1-\nu)+\varepsilon_p]\,(\lambda_p^2+\mu_k^2)};\quad Q_{pk} = L_{pk}\,\mathrm{th}^2\frac{\mu_k H}{2};$$

$$\varphi_{pk} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\mu_k^2}{RH}\frac{1}{\lambda_p^2(\lambda_p^2+\mu_k^2)}; \quad \delta_p = \left(\frac{1-\nu_*}{E_* H^*} - \frac{1-\nu}{EH}\right)\frac{1}{\mu_p^2 R};$$

$$\beta_k = \frac{\operatorname{sh}\mu_k H - \mu_k H}{\operatorname{sh}\mu_k H}; \quad \gamma_k = \frac{\operatorname{sh}\mu_k H + \mu_k H}{\operatorname{sh}\mu_k H}; \quad \omega_k = \frac{1-\nu_*^2}{2E_* H^* \mu_k^2 R};$$

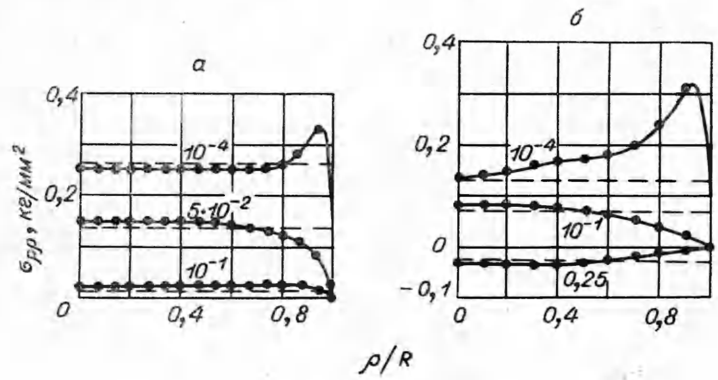
$$P_k = \frac{1-\nu^2}{2E}\frac{\operatorname{cth}\frac{\mu_k H}{2}}{\mu_k R}; \quad F_k = P_k \operatorname{th}^2\frac{\mu_k H}{2};$$

$$\varkappa_k = \frac{I_0(\lambda_k R)\, I_2(\lambda_k R)}{I_1^2(\lambda_k R)} - 1 + \frac{2 I_2(\lambda_k R)}{\lambda_k R I_1(\lambda_k R)}; \quad \varepsilon_k = \lambda_k R \frac{I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)}.$$

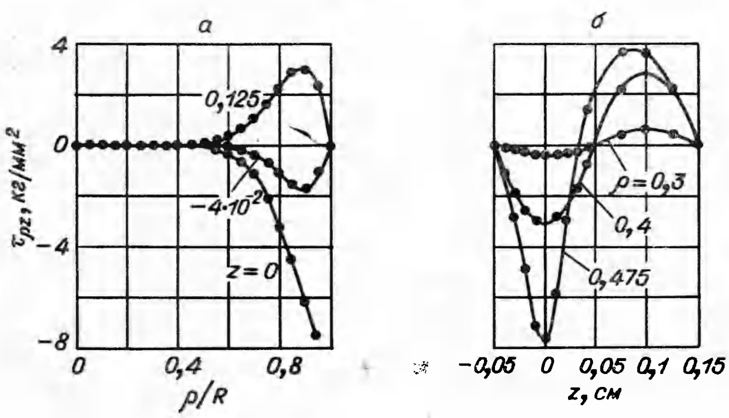
Кроме рядов Дини и Фурье, использованных в [11], при получении совокупности уравнений (14) использовано разложение в ряд Фурье — Бесселя функций $\rho$, $I_0(\lambda_k\rho)$ и $\lambda_k\rho I_1(\lambda_k\rho)$. Вычисление искомых коэффициентов и значений напряжений и смещений проведено на ЭВМ.

В качестве примера произведен расчет напряжений и смещений для системы кремний (слой *1*) — двуокись кремния (слой *2*) со следующими физическими параметрами: $E = 1{,}7\cdot10^4$ кг/мм²; $E_* = 0{,}6\cdot10^4$ кг/мм²; $\nu = 0{,}28$; $\nu_* = 0{,}17$; $(\alpha^* - \alpha)\Delta T = 4{,}2\cdot10^{-3}$.

На фиг. 2 представлена зависимость $\sigma_{\rho\rho}$ в слое *1* от величины $\rho/R$ для систем со следующими геометрическими размерами: $H^* = 4\cdot10^{-4}$ см;




Фиг. 2




Фиг. 3

$H = 0{,}15$ см; $R = 0{,}75$ см (фиг. 2, *а*); $H^* = 4 \cdot 10^{-4}$ см; $H = 0{,}3$ см; $R = 0{,}5$ см (фиг. 2, *б*). Цифры на кривых соответствуют координате $z$, см. Видно, что для области вблизи центра диска результаты точного решения достаточно хорошо совпадают с расчетами по «биметаллической» модели (штриховые кривые). В то же время вблизи краев диска точное решение дает зависимость $\sigma_{\rho\rho}$ от $\rho$, особенно существенную для случая $(H + H^*)/R \sim 1$ (см. фиг. 2, *б*). При этом наибольшая концентрация напряжений наблюдается вблизи края диска в плоскости $z = 0$.

На фиг. 3 для системы с $H^* = 5 \cdot 10^{-2}$ см, $H = 0{,}15$ см и $R = 0{,}5$ см показаны результаты расчета зависимости $\tau_{\rho z}$ от $\rho$ (фиг. 3, *а*) и от $z$ (фиг. 3, *б*) в слоях *1* и *2* (максимальная величина $\delta \sim 0{,}03$). Видно, что касательные напряжения возрастают по абсолютной величине по мере приближения к краю диска, причем наиболее интенсивный рост, как и в предыдущем случае, наблюдается в плоскости $z = 0$.

Таким образом, в отличие от балочного приближения решение в точной постановке дает зависимость величины внутренних напряжений от координаты $\rho$ и позволяет вычислить касательные напряжения на площадках с $z = \text{const}$.

Вследствие этого полученное решение дает возможность предсказывать изменение физических свойств по радиусу диска, а также оценивать требования к адгезивным свойствам материалов для конкретных двухслойных систем.

*Поступила 12 I 1977*

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П.** Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971
2. **Brotherton S. D., Read T. G., Lamb D. R., Willoughly A. F.** Surface charge and stress in the Si — $SiO_2$ system.— «Solid State Electronics», 1973, vol. 16, N 12, p. 1367.
3. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Теория многослойного термостата.— «Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук», 1963, т. 10, вып. 3, с. 49.
4. **Aleck B. J.** Thermal stresses in a rectangular plate fastened along its edge.— «J. Appl. Mech.», 1949, vol. 16, N 2, p. 118.
5. **Zeyfang R.** Stresses and strains into the plate fastened on a substrate: semiconductor devices.— «Solid State Electronics», 1975, vol. 14, N 10, p. 1035.
6. **Лейбензон Л. С.** Краткий курс теории упругости. М.—Л., Изд-во техн.-теор. лит., 1942.
7. **Гриффин Д. С., Келлог Р. Б.** Численное решение осесимметричных и плоских задач упругости.— Сб. пер. Механика, 1968, № 12, с. 111.
8. **Вазов В., Форсайт Дж.** Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1963.
9. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука», 1973.
10. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
11. **Абрамян Б. Л.** К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.— «Докл. АН АрмССР», 1954, т. 19.