

## УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ С ДИСПЕРСИЕЙ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построена гиперболическая модель течения мелкой воды с учетом нелинейных и дисперсионных эффектов. Модель описывает солитонообразные решения в определенном диапазоне скоростей волн, а также предсказывает обрушение гладких волн при достижении ими предельной амплитуды. Адекватность модели установлена сравнением с экспериментальными данными по эволюции волнового пакета, генерируемого подвижной торцевой стенкой канала.

**Введение.** Характерным свойством нелинейной диспергирующей среды без диссипации является существование уединенных волн. В таких средах тенденция к опрокидыванию волны, вызванная нелинейностью уравнений, уравнивается дисперсией, что обеспечивает существование волн неизменной формы. Другое отличительное свойство — наличие дополнительного закона сохранения энергии — приводит к отсутствию среди решений структур, т. е. бегущих волн с разными пределами на бесконечности. В ряде случаев среды с дисперсией описываются уравнениями механики сплошной среды, в которых уравнение состояния связывает давление не только с термодинамическими переменными, но и с их производными. Такие уравнения, например, возникают в теории длинных волн на поверхности жидкости [1] и в моделях двухфазных сред [2], вариационный принцип их получения обсуждается в [3].

Если в уравнение состояния входят производные от искомым функций по пространственным переменным, то система уравнений, описывающая движение, не является гиперболической. К этому классу систем относятся различные варианты уравнений Буссинеска и Кортвега — де Фриза, возникающие во втором приближении мелкой воды [1].

Однако движения диспергирующей среды могут задаваться и гиперболической системой в случае, когда в уравнение состояния входят только производные от внутренних параметров среды, вычисленные вдоль траектории частиц. Так, для односкоростной модели пузырьковой жидкости система уравнений Иорданского — Когарко [4] для сжимаемой несущей фазы является гиперболической. Более общая гиперболическая модель двухфазной среды получена в [5].

Основное отличие гиперболических систем первого порядка, описывающих среды с дисперсией, от систем более высокого порядка состоит в том, что гладкие солитонообразные решения в первом случае существуют только в определенном диапазоне. При распространении нелинейной волны со скоростью, превышающей скорость длинных волн, возникает структура типа прыжок — волна, т. е. в гиперболических моделях солитоны после достижения предельной амплитуды разрушаются.

Проблема разрушения волн при достижении предельной амплитуды представляет особый интерес в теории гравитационных волн. Хотя точная теория позволяет получить

предельную амплитуду и скорость распространения волн в задаче Коши — Пуассона, во втором приближении уравнений мелкой воды амплитуда солитонов может быть произвольной [1, 6]. Возникающие в некоторых моделях верхние границы скорости распространения солитонов не являются внутренними для данной модели, а привносятся из точной постановки задачи. Так, в [6] скорость солитонов, распространяющихся в покоящейся жидкости с глубиной  $h$  и ускорением силы тяжести  $g$  в рамках второго приближения, не превышает величины  $c = \sqrt{2gh}$ . Эта оценка получена из формы волны, определяемой из второго приближения, и интеграла Бернулли, взятого из точной постановки задачи.

Цель данной работы — построение простейшей гиперболической модели течения мелкой воды с дисперсией, в которой наряду с обычной критической скоростью длинных волн  $c_1 = \sqrt{gh}$  присутствует и вторая критическая скорость  $c_2 = \beta\sqrt{gh}$  ( $\beta > 1$ ), соответствующая скорости распространения волн предельной амплитуды. Экспериментальному определению скорости  $c_2$  посвящены работы [7, 8], где показано, что переход от гладких к обрушивающимся волнам при достижении критической скорости распространения  $c_2$  наблюдается не только для уединенных волн, но и для боров, распространяющихся по невозмущенной жидкости.

Так как построенная модель не содержит эмпирических констант, кроме множителя  $\alpha$ , характеризующего отношение вертикального и горизонтального масштабов движения, то адекватность модели установлена сравнением с конкретными экспериментальными данными по эволюции волнового пакета, генерируемого подвижной торцевой стенкой [8].

**1. Математическая модель.** Уравнения мелкой воды выводятся для средней глубины  $h(t, x)$  и скорости  $u(t, x)$  в предположении гидростатичности распределения давления в слое жидкости. Учет негидростатичности может быть осуществлен введением новой искомой переменной  $\eta$ , характеризующей мгновенное значение глубины слоя, которое может отличаться от среднего значения  $h$ . Поэтому полное давление  $P$  в уравнениях движения рассматривается как функция переменных  $h$  и  $\eta$ . Для определения новой переменной  $\eta$  используется дополнительное уравнение энергии, в котором внутренняя энергия  $\varepsilon$  зависит от переменных  $h$ ,  $\eta$  и скорости

$$v = \eta_t + u\eta_x, \quad (1.1)$$

причем  $\varepsilon_h(h, \eta, v) = P/h^2$ .

Законы сохранения массы, импульса и энергии для одномерного движения однородного слоя несжимаемой жидкости в поле силы тяжести имеют вид

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, & (hu)_t + (hu^2 + P)_x &= 0, \\ (h(u^2/2 + \varepsilon))_t + (hu(u^2/2 + \varepsilon) + Pu)_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее рассматриваются течения, в которых распределение давления в слое жидкости мало отличается от гидростатического, т. е.  $|\eta - h|/h \ll 1$ . Поэтому конкретный вид зависимости  $P(\eta, h)$  не является важным. Важно только правильно задать поведение этой функции в окрестности равновесного состояния  $\eta = h$ .

Выберем конкретные зависимости

$$P = \frac{1}{2}gh^2 \left( \frac{h}{\eta} \right), \quad \varepsilon = \frac{1}{4}g \frac{h^2}{\eta} + \frac{1}{4}g\eta + \alpha v^2, \quad (1.3)$$

обеспечивающие гидростатическое распределение давления в равновесном потоке при  $h \equiv \eta$ .

Выбор уравнений состояния (1.3), конечно, не является однозначным, но из размерности входящих величин при заданной зависимости  $P(h, \eta)$  вид функции  $\varepsilon(h, \eta, v)$  находится с точностью до постоянного множителя  $\alpha$ . Значение  $\alpha$  также не существенно, так как из системы (1.1)–(1.3) параметр  $\alpha$  может быть исключен растяжением переменных, используемым при моделировании длинноволновых течений:  $x \rightarrow x, t \rightarrow \varepsilon^{-1/2}t, h \rightarrow \varepsilon h, \eta \rightarrow \varepsilon\eta$ .

Следствием системы (1.1)–(1.3) является аналог уравнений Рэлея для колебаний пузырьков в жидкости [9]:

$$v_t + uv_x = (g/8\alpha)(h^2/\eta^2 - 1).$$

Поэтому равновесной моделью ( $h \equiv \eta, v \equiv 0$ ) для полученной системы будут обычные уравнения мелкой воды, т. е. первые два уравнения в (1.2) с  $P = (1/2)gh^2$  и равновесными характеристиками  $\lambda_e^\pm = u \pm \sqrt{gh}$ . Характеристики системы (1.1)–(1.3) на равновесном течении ( $h = \eta$ ) представляются в виде  $\lambda_f^\pm = u \pm \sqrt{1,5gh}$ . Кроме того, есть кратная контактная характеристика  $\lambda_f^0 = u$ .

Таким образом, мы имеем дело с классической ситуацией, когда характеристики равновесной и исходной модели чередуются, т. е.  $\lambda_f^- < \lambda_e^- < \lambda_f^0 < \lambda_e^+ < \lambda_f^+$ . Поэтому гладкие бегущие волны для полной системы существуют в диапазоне скоростей  $\lambda_e^+ < D < \lambda_f^+$  или  $\lambda_f^- < D < \lambda_e^-$  (см. [1]).

**2. Бегущие волны системы (1.1)–(1.3).** Рассматриваются решения (1.1)–(1.3), зависящие от переменной  $\xi = x - Dt$  ( $D > 0$ ), причем при  $\xi \rightarrow \infty$  решение стремится к равновесному состоянию ( $h = \eta = h_0, v = 0, u = 0$ ). Единственным безразмерным параметром, определяющим структуру волны, является число Фруда  $Fr = D/\sqrt{gh_0}$ . Переходя к безразмерным переменным, можно считать, что  $h_0 = 1, g = 1, Fr = D$ .

Законы сохранения (1.2) дают следующие соотношения на волне:

$$\begin{aligned} h(u - D) = -D, \quad h(u - D)^2 + \frac{1}{2} \frac{h^3}{\eta} = D^2 + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} (u - D)^2 + \frac{3}{4} \frac{h^2}{\eta} + \frac{1}{4} \eta + \alpha v^2 = \frac{1}{2} D^2 + 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из (2.1) определяются зависимости  $\eta = \eta(h), v^2 = (1/\alpha)H(h)$ , а из уравнения (1.1), принимающего для бегущей волны вид

$$\frac{d\eta(h)}{d\xi} = -\frac{hv(h)}{D}, \quad (2.2)$$

восстанавливается форма волны.

Функции  $\eta(h), H(h)$  находятся из (2.1) в явном виде:

$$\eta(h) = h^4/(2hD^2 + h - 2D^2), \quad H(h) = 1 - \frac{3}{4} \frac{h^2}{\eta(h)} - \frac{1}{4} \eta(h) - \frac{1}{2} D(h^{-2} - 1). \quad (2.3)$$

Функция  $a(h) = d\eta/dh$  имеет единственный корень  $h_* = 8D^2/3(1+2D^2)$ , соответствующий минимуму функции  $\eta(h)$ . Заметим, что  $h_* > 1$  тогда и только тогда, когда  $D > \sqrt{1,5} = \lambda_f^+$ . Необходимым условием для существования непрерывного решения (2.1), (2.2) является положительность функции  $H(h)$  из (2.3) в окрестности  $h = 1$ . В силу (2.1)

$$\frac{dH}{dh} = \frac{1}{4} \left( \frac{h^2}{\eta(h)^2} - 1 \right) a(h),$$

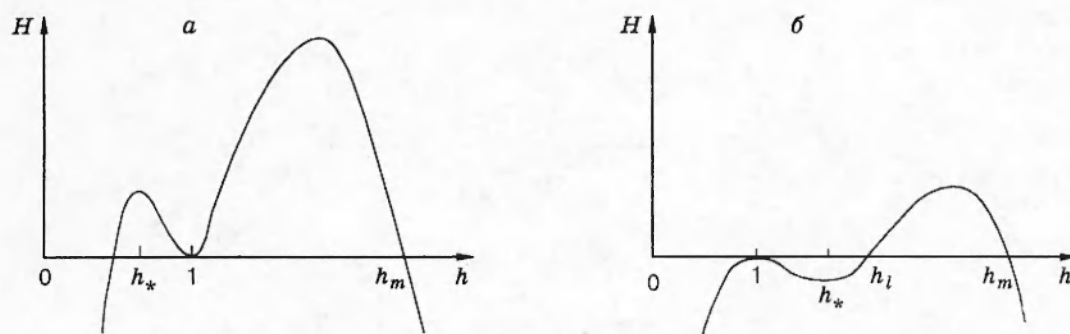


Рис. 1

и поведение функции  $H(h)$  в окрестности  $h = 1$  определяется значением производной  $(d\eta/dh)(1) = a(1) = 3 - 2D^2$ . Неравенства  $0 < a(1) < 1$ , обеспечивающие положительность функции  $H(h)$  вблизи значения  $h = 1$ , выполнены, если  $1 < D < \sqrt{1,5}$ . В этом случае график функции  $H = H(h)$  приведен на рис. 1, а. При  $h > 1$  решение системы (2.1), (2.2) представляет собой солитон, скорость распространения которого лежит в интервале между равновесной и замороженной скоростями распространения характеристик. Положительная часть функции  $H(h)$  при  $h < 1$  не дает солитона, так как решение уравнения (2.2) нельзя продолжить через точку  $h_* < 1$ , в которой  $a(h_*) = 0$ .

Гладкий солитон предельной амплитуды реализуется при  $D = \sqrt{1,5}$ . При этом  $h_m = 1,45$ ,  $\eta_m = \eta(h_m) = 1,58$ . При  $D > \sqrt{1,5}$  возможна только конфигурация типа прыжок — волна [9], состоящая из гидравлического прыжка, переводящего  $h = 1$  в  $h = h_1$ , причем  $H(h_1) > 0$ , т. е.  $h_l < h_1 < h_m$ , и примыкающего к нему периодического решения с минимальной глубиной  $h_l$  и максимальной глубиной  $h_m$  (рис. 1, б). Так как уравнение (1.1) записано не в дивергентной форме, то возникает вопрос о выборе соотношений на гидравлическом прыжке, определяющих состояние за прыжком.

В данной работе не будем останавливаться на этой проблеме более подробно. Заметим только, что для неоднородных систем типа (1.1)–(1.3) выбор законов сохранения большого значения не имеет, так как изменение значения  $h_1$  за фронтом скачка приводит только к сдвигу фазы следующего за волной периодического решения, и проблема выбора соотношений на разрыве сводится к вопросу о том, какой участок стационарной периодической волны за скачком включать в ту часть зоны релаксации, которая в данной модели заменяется разрывом. Поэтому можно считать, что за скачком реализуются значения  $h_l$  или  $h_m$ , при которых скорость  $v = 0$ . При этом уравнение (1.1) записывается в виде неоднородного закона сохранения:

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} = F(h, \eta, v). \quad (2.4)$$

Выбор функции  $F$  осуществляется таким образом, чтобы уравнение (2.4) было дифференциальным следствием системы (1.1)–(1.3).

**3. Сравнение с экспериментом [8].** Как уже отмечалось при выводе уравнений (1.1)–(1.3), параметр  $\alpha$  возникает при моделировании и имеет порядок  $\varepsilon^2$ . Численное значение  $\alpha$  можно получить из сравнения с экспериментом. Одним из эффективных и контролируемых способов получения пакета волн является их генерация движущейся торцевой стенкой канала [7, 8]. В рамках построенной модели эта задача полностью эквивалентна

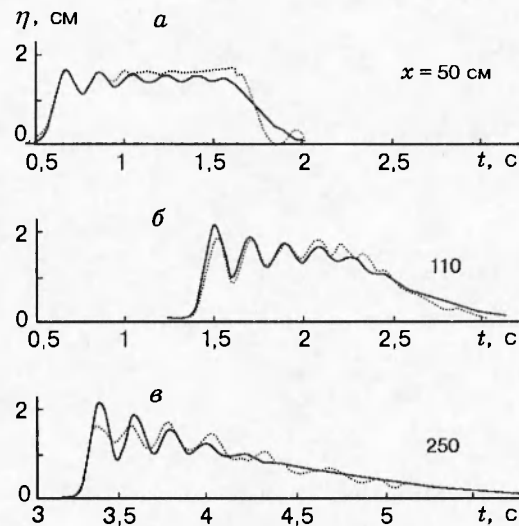


Рис. 2

задаче о движении поршня в покоящийся газ по заданному закону. Однако, в отличие от газовой динамики, структура волн из-за нелинейной дисперсии будет гораздо более сложной. Для апробации модели воспользуемся экспериментальными данными работы [8], в которой скорость движения стенки в течение времени  $\Delta T$  поддерживалась близкой к постоянной скорости  $U$ , а затем стенка мгновенно останавливалась. В результате на достаточно большом расстоянии от подвижной стенки формировался аналог  $N$ -волны, однако из-за дисперсионных эффектов первоначально монотонное возмущение распалось в цуг солитонов, движущихся с различными скоростями. Основное внимание в [8] уделено экспериментальному определению критической скорости  $c_2$ , при которой происходит обрушение первоначально гладких волн. Значение  $c_2 = \lambda_f^+ = \sqrt{1,5gh_0}$ , при котором происходит обрушение волн в модели (1.1)–(1.3), согласуется с полученными в [8]. То же можно сказать и о предельной амплитуде  $\eta_m = 1,58\sqrt{gh_0}$ , полученной в п. 2 для гладкого солитона, распространяющегося с предельной скоростью  $\lambda_f^+ = \sqrt{1,5gh_0}$  по покоящейся жидкости глубины  $h_0$ .

Однако наибольший интерес представляет сравнение с экспериментальными данными фазовой картины волн, генерируемых подвижной стенкой. Задача существенно нестационарна, и ее решение может быть найдено только путем численного расчета по модели (1.1)–(1.3).

Так как структура уравнений полностью аналогична уравнениям газовой динамики, то для расчета можно применять стандартные схемы. В настоящей работе используется аналог схемы С. К. Годунова, а для решения неоднородных уравнений вдоль траекторий применяется метод Рунге — Кутты с шагом по времени, согласованным с основной схемой. Результаты расчета для  $U = 23,3$  см/с,  $\Delta T = 1,3$  с,  $h_0 = 3,1$  см приведены на рис. 2 в виде зависимости  $\eta = \eta(t)$  (сплошная линия) для фиксированных значений  $x$ , отсчитываемых от начальной точки движения стенки:  $x = 50; 110; 250$  см (а–в). Пунктиром представлены экспериментальные зависимости, взятые из [8, табл. 1] для указанных выше начальных и граничных условий. Следует отметить, что в численном расчете время движения стенки уменьшено по сравнению с экспериментальным ( $\Delta T \sim 1,76$  с) для получения одинако-

вой длительности начального возмущения сразу же после остановки стенки ( $x = 50$  см). Величина  $\alpha$ , характеризующая отношение вертикального и горизонтального масштабов, равна 0,025.

Конечно, в модели не учитывалось влияние диссипации, связанной с трением о стенки, вязкостью и обрушением волн. Тем не менее численный расчет передает не только качественно, но и количественно основные особенности эволюции нелинейного волнового пакета.

Интересен процесс развития волнового пакета из локального, близкого к кусочно-постоянному начального возмущения. По мере удаления от источника возмущение распадается в цуг волн, амплитуда которых нарастает. На расстоянии  $x = 110$  см амплитуда первого гребня уже достигает предельной, и в эксперименте наблюдается развитие процесса обрушения волны, приводящего в дальнейшем к уменьшению амплитуды лидирующей волны [8]. В модели (1.1)–(1.3) не заложен механизм обрушения волны, поэтому при  $x = 250$  см численные и экспериментальные значения амплитуд головной волны существенно различаются. Тем не менее фазовые и амплитудные характеристики остальных волн в волновом пакете передаются удовлетворительно. Это означает, что, несмотря на присутствие мощных диссипативных механизмов, основной вклад в формирование волнового пакета вносят нелинейные и дисперсионные эффекты, которые в представленной модели отражены правильно.

**4. Выводы.** Построенная модель мелкой воды обладает рядом преимуществ. Она представляет собой неоднородную гиперболическую систему уравнений, для которой уравнения первого приближения в теории мелкой воды являются равновесной моделью. Поэтому полученная модель содержит солитонобразные решения, распространяющиеся в определенном диапазоне скоростей ( $\sqrt{gh_0} < D < \sqrt{1,5gh_0}$ ) по покоящейся жидкости глубины  $h_0$ . Если скорость солитона превышает вторую критическую скорость (см. [8]), которая в рассматриваемой модели совпадает со скоростью характеристик, т. е.  $D > \sqrt{1,5gh_0}$ , то гладкого решения системы (1.1)–(1.3) не существует. Конечно, данная модель не описывает процесс обрушения волны при достижении предельной амплитуды. Однако сочетание подходов, развитых в настоящей работе, с возможностью рассмотрения приповерхностной области течения как прослойки, в которой развивается интенсивное коротковолновое или турбулентное движение со своим собственным набором параметров, полностью ее характеризующих [10], указывает способ построения более полной модели. В расширенной модели в равной степени должны быть представлены как дисперсионные эффекты, так и влияние турбулентного перемешивания на структуру гравитационных волн большой амплитуды, что дает возможность адекватно описать процесс перехода волнового бора в турбулентный при увеличении его амплитуды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01641а и 95-01-01164а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. Накоряков В. Е. Гидродинамика двухфазных потоков // Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах. Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1981.
3. Гаврилюк С. Л., Шугрин С. М. Среды с уравнениями состояния, зависящими от производных // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 35–49.



4. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
5. **Ляпидевский В. Ю.** Моделирование двухфазных течений на основе законов сохранения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 76. С. 111–120.
6. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
7. **Букреев В. И., Туранов Н. П.** Эксперименты с волнами на мелкой воде, генерируемыми движением торцевой стенки бассейна // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 44–50.
8. **Букреев В. И., Романов Е. М., Туранов Н. П.** Обрушение гравитационных волн в окрестности второй критической скорости их распространения // Наст. сб. С. 52–58.
9. **Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.** Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 62. С. 75–92.
10. **Ляпидевский В. Ю.** Блокировка потока при обтекании препятствия двухслойной смешивающейся жидкостью // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 108–112.

*Поступила в редакцию 10/VII 1996 г.*

---