

## К ГИДРОДИНАМИКЕ ЖИДКОСТЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

*С. С. Кутателадзе, В. И. Попов, Е. М. Хабахнашева*

(Новосибирск)

Предлагается инвариантное реологическое уравнение для течения жидкостей с переменной вязкостью, не зависящей от времени. Показана целесообразность выделения подкласса жидкостей с линейным законом текучести.

1. Жидкие среды с переменной вязкостью широко используются в химической и перерабатывающей промышленности. Здесь термин «переменная вязкость» означает, что вязкость является не только функцией термодинамических параметров состояния ( $p, T$ ), но и некоторых других параметров. Обычно в этом случае говорят о жидкости с аномальной вязкостью. Однако многочисленность жидких сред с переменной вязкостью вряд ли делает возможным считать их всех аномальными.

Как правило, переменная вязкость связана с дисперсной фазой, которая имеет некоторую структуру. Жидкостями со структурной вязкостью будем называть среды, у которых вязкость при данных  $p$  и  $T$  является однозначной функцией касательных напряжений<sup>1</sup>

$$\mu = \mu(\tau) \quad (1.1)$$

Существует большое число жидкостей, у которых вязкость является сложной функцией напряжения сдвига и времени, в течение которого действовало это напряжение (тиксотропные и реопектические), а также жидкости, проявляющие упругие свойства (вязкоупругие). Гидродинамика таких жидкостей здесь не рассматривается.

Следует отметить, что вязкость является более сложной функцией касательного напряжения, чем обратная величина — текучесть. Поэтому феноменологическую теорию течения жидкости со структурной вязкостью целесообразно строить относительно  $\varphi(\tau)$ , которая в одномерном течении определяется как

$$\varphi = \frac{w}{\tau - \tau_0} \quad \left( \begin{array}{l} \tau_0 - \text{предел} \\ \text{текучести} \end{array} \right) \quad (1.2)$$

2. Рассмотрим зависимость между текучестью и касательными напряжениями. Значительное число сложных эмпирических выражений, основанных на более или менее удачной аппроксимации нелинейной кривой течения в некотором интервале напряжений или скоростей сдвига [1, 3], не нашли широкого использования, а наиболее распространенная степенная формула Оствальда [4], подкупая простотой операций с нею, не выдерживает критики ни с точки зрения соответствия предельным свойствам  $\varphi(\tau)$ , ни с точки зрения размерности входящих в нее коэффициентов.

На фиг. 1 схематично показана общая зависимость  $\varphi(\tau)$  для случая  $d\varphi/d\tau > 0$  при  $\tau > \tau_1$  по экспериментальным данным ряда авторов<sup>2</sup>. В области  $\tau < \tau_0$ ,  $\varphi = 0$  и жидкость проявляет так называемую условную упругость. В области  $\tau_0 < \tau < \tau_1$  поведение жидкости характеризуется

<sup>1</sup> Применяются и другие термины для таких жидкостей: «неньютоновские жидкости с реологическими характеристиками, не зависящими от времени» [1], «Обобщенные ньютонские жидкости» [2].

<sup>2</sup> У так называемых дилатантных жидкостей  $d\varphi/d\tau < 0$ .

постоянной текучестью  $\varphi_0$ . Естественно, что в определении  $\tau_1$  есть некоторая условность, ибо переход от постоянной текучести  $\varphi_0$  к переменной осуществляется плавно на некотором отрезке  $\Delta\tau$ .

Величину  $\tau_1$  назовем пределом устойчивости макроструктуры жидкости, а  $\varphi_0$  — нулевой текучестью; текучесть при  $\tau \rightarrow \infty$  обозначим  $\varphi_\infty$ .

В качестве масштаба изменения текучести естественно выбрать разность  $\varphi_\infty - \varphi_0$ , а в качестве искомой переменной — дефект текучести  $\varphi_\infty - \varphi$ . Тогда из величин  $\varphi$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_\infty$  и  $\tau - \tau_1$  можно образовать два безразмерных комплекса, вводя некоторую величину  $\theta$ , которая может служить мерой структурной устойчивости жидкости

$$\varphi_* = \frac{\varphi_\infty - \varphi}{\varphi_\infty - \varphi_0}, \quad \tau_* = \theta \frac{\tau - \tau_1}{\varphi_\infty - \varphi_0} \quad (2.1)$$

Зависимость  $\varphi_*(\tau_*)$  имеет одинаковый характер как для жидкостей с возрастающей ( $\varphi_\infty > \varphi_0$ ), так и уменьшающейся ( $\varphi_\infty < \varphi_0$ ) текучестью. При этом  $d^2\varphi_*/d\tau_*^2 > 0$  и для текучести жидкости имеем уравнение

$$d\varphi_* = -\varphi_*^n d\tau_* \quad (2.2)$$

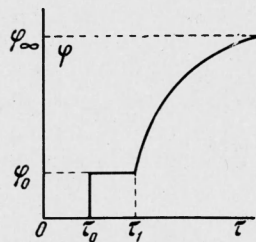
Соответственно имеем

$$\varphi_* = 1 \quad \text{при } \tau_0 < \tau < \tau_1 \quad (2.3)$$

$$n = 1, \quad \varphi_* = \exp(-\tau_*) \quad \text{при } \tau > \tau_1 \quad (2.4)$$

$$n \neq 1, \quad \varphi_* = [1 - \tau_*(1 - n)]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{при } \tau > \tau_1 \quad (2.5)$$

Фиг. 1. Характер зависимости  $\varphi = \varphi(\tau)$



Отсюда следует, что текучесть при  $n = 1$  характеризуется набором пяти величин  $\{\tau_0, \tau_1, \varphi_0, \varphi_\infty, \theta\}$ .

В сильно структурированных жидкостях разрушение структуры под влиянием напряжения сдвига приводит к значительному изменению текучести. К таким жидкостям относятся расплавы полимеров, концентрированные суспензии, пасты, битумы и пр.

Для слабо структурированных жидкостей (растворов полимеров, низкоконцентрированных суспензий, эмульсий, латексов) под действием напряжения сдвига текучесть меняется сравнительно слабо.

При достаточно малых  $\tau_*$  практически интересная область  $\tau$  удовлетворительно описывается первыми двумя-тремя членами разложения уравнения (2.4). Перепишем его в виде <sup>1</sup>

$$\varphi = \varphi_\infty - (\varphi_\infty - \varphi_0) \exp\left(-\theta \frac{\tau - \tau_1}{\varphi_\infty - \varphi_0}\right) \quad (2.6)$$

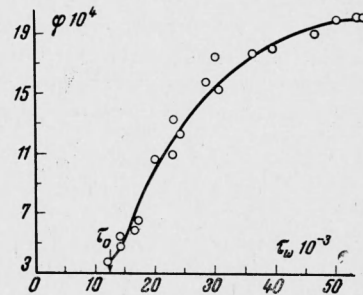
получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \theta(\tau - \tau_1) - \frac{\theta^2}{2} \frac{(\tau - \tau_1)^2}{\varphi_\infty - \varphi_0} + \dots \quad (2.7)$$

или, ограничиваясь двумя первыми членами разложения, будем иметь

$$\varphi = \varphi_0 + \theta(\tau - \tau_1) \quad (2.8)$$

Формула (2.8) весьма удобна для построения приближенных методов расчета течения жидкостей со структурной вязкостью. Поэтому целесооб-



Фиг. 2. Битум М III.  $t = 20^\circ\text{C}$ ,  
 $\varphi_0 = 3.8 \cdot 10^{-4} \text{ нс}^{-1}$ ,  
 $\varphi_\infty = 20 \cdot 10^{-4} \text{ нс}^{-1}$ ,  
 $\tau_0 = 12.5 \cdot 10^3 \text{ дн/см}^2$

<sup>1</sup> Следует также иметь в виду, что у большинства жидкостей  $\tau_1 \approx 0$ .

разно в теории выделить специальный подкласс жидкостей с линейным законом текучести. Для дилатантной жидкости перед вторым членом формулы (2.8) следует ставить знак минус.

3. При ламинарном изотермическом течении жидкости в цилиндрическом круглом канале распределение касательных напряжений имеет вид

$$\tau = \tau_w \xi, \quad \xi = r/r_0 \quad (3.1)$$

Здесь  $\xi$  — безразмерный радиус,  $\tau_w$  — значение на стенке. При  $\tau_0 = 0$  и  $\tau < \tau_1$  в результате интегрирования уравнения

$$\frac{dw}{dr} = -\varphi(\tau - \tau_0) \quad \left( \tau = -\frac{r}{2} \frac{dP}{dx} \right) \quad (3.2)$$

получим профиль скорости

$$w = \frac{1}{2} \tau_w \varphi_0 r_0 (1 - r^2 / r_0^2) \quad (3.3)$$

При  $\tau_1 = 0$  и линейном законе текучести  $\varphi = \varphi_0 (1 + \theta \tau)$  получим

$$w = \frac{1}{2} \tau_w r_0 \varphi_0 [(1 - \xi^2) + \frac{2}{3} \theta \tau_w (1 - \xi^3)] \quad (3.4)$$

$$w_{\max} = \frac{1}{4} \tau_w r_0 \varphi_0 (1 + \frac{2}{3} \theta \tau_w) \quad \left( \theta = \frac{\theta}{\varphi_0} \right) \quad (3.5)$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \tau_w r_0 \varphi_0 (1 + \frac{4}{5} \theta \tau_w) \quad (3.6)$$

$$\omega = \frac{w}{\langle w \rangle} = 2 \frac{1 - \xi^2 + \frac{2}{3} \theta \tau_w (1 - \xi^3)}{1 + \frac{4}{5} \theta \tau_w} \quad (3.7)$$

$$\omega_{\max} = \frac{w_{\max}}{\langle w \rangle} = 2 \frac{1 + \frac{2}{3} \theta \tau_w}{1 + \frac{4}{5} \theta \tau_w} \quad (3.8)$$

Здесь  $w_{\max}$  — максимальная скорость на оси трубы, а  $\langle w \rangle$  — средняя расходная скорость.

Из (3.8) видно, что  $\omega_{\max} < 2$  при  $\theta > 0$ , т. е. профиль скоростей более заполнен, чем при течении обычных ньютоновских жидкостей ( $\theta = 0$ ); наоборот  $\omega_{\max} > 2$  при  $\theta < 0$ . Как видно, в данном случае число Рейнольдса потока целесообразно строить в виде  $R_D = \langle w \rangle D \varphi_0 \rho$ .

Здесь  $\varphi_0$  — нулевая текучесть ( $\tau \rightarrow 0$ ). Учитывая (3.6), находим, что

$$\xi = \frac{8 \tau_w}{\rho \langle w \rangle^2} = \frac{5}{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{128 \beta}{5 R_D} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad \left( \beta = \frac{\theta}{\varphi_0} \rho \langle w \rangle^2 \right) \quad (3.9)$$

4. При продольном изотермическом обтекании пластины профиль касательных напряжений может быть представлен в виде [5]

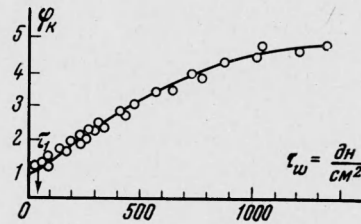
$$\tau \approx \tau_w (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \quad (\xi = y/\delta) \quad (4.1)$$

Здесь  $\xi$  — безразмерное расстояние по нормали от стенки,  $\delta$  — толщина пограничного слоя. Распределение продольной составляющей вектора скорости при линейном законе текучести определяется уравнением

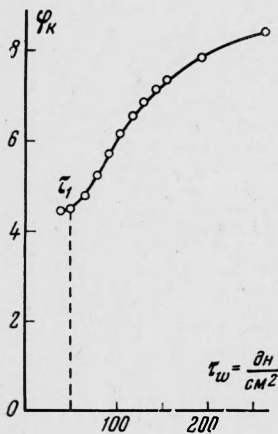
$$dw_x / dy = \varphi_0 \tau + \theta \tau^2 \quad (4.2)$$

Интегрируя (4.2) с учетом (4.1), получим

$$w_* = \tau_w \varphi_0 \delta \left[ \xi - \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^4 + \theta \tau_w \xi - 2\theta \tau_w \xi^3 + \theta \tau_w \xi^4 + \right. \\ \left. + \frac{9}{5} \theta \tau_w \xi^5 - 2\theta \tau_w \xi^6 + \frac{4}{7} \theta \tau_w \xi^7 \right] \quad (4.3)$$



Фиг. 3. Раствор 1.69% резины в толуоле.  $t = 24^\circ\text{C}$ ,  $\varphi_0 = 0.7 \text{ нс}^{-1}$ ,  $\varphi_\infty = 5.1 \text{ нс}^{-1}$



Фиг. 4. Раствор натриевой карбоксиметилцеллюлозы в воде — 1%.  $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $\varphi_0 = 4.5 \text{ нс}^{-1}$ ,  $\varphi_{00} = 9 \text{ нс}^{-1}$ ,  $\tau_1 = 50 \text{ дн/см}^2$

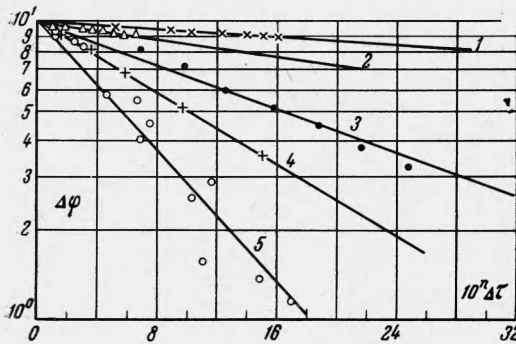
При  $\xi = 1$  имеем  $w_x = w_0$ , где  $w_0$  — скорость набегающего потока, и, следовательно,

$$w_0 = 1/2 \tau_w \Phi_0 \delta (1 + 26/35 \theta \tau_w) \quad (4.4)$$

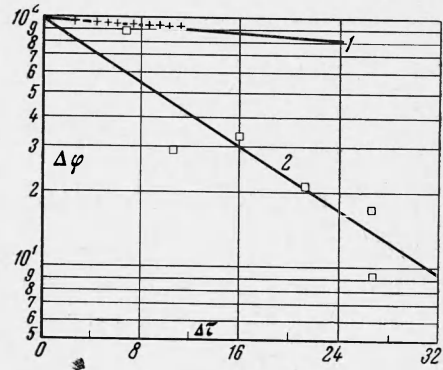
Для коэффициента трения с учетом формулы (4.4) имеем

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho w_0^2} = \frac{35}{26\beta} \left[ \left( i + \frac{208\beta}{35R_8} \right)^{1/2} - i \right] \bar{R}_8 = w_0 \delta \Phi_0 \rho, \quad \beta = \frac{\theta}{\Phi_0} \rho w_0^2 \quad (4.5)$$

5. При экспериментальном определении реологических характеристик жидкости непосредственно вычисляется не истинный закон  $\varphi(\tau)$ , а связь



Фиг. 5



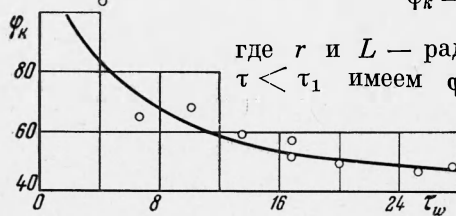
Фиг. 6

Фиг. 5. 1 — поливиниловый спирт в воде — 2.5%,  $n = -1$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$ ; 2 — полиметакрилат в воде — 0.025%,  $n = 1$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$ ; 3 — карбоксиметилцеллюлозы в воде — 1%,  $n = 0$ ,  $\tau_1 = 50$  дн/см<sup>2</sup>,  $\tau_0 = 0$ ; 4 — резина в толуоле — 1.69%,  $n = -1$ ,  $\tau_1 = 25$  дн/см<sup>2</sup>,  $\tau_0 = 0$ ; 5 — битум М III,  $n = -6$ ,  $\tau_0 = 12.5$  дн/см<sup>2</sup>

Фиг. 6. 1 — карбоксиметилцеллюлоза в воде — 0.25%,  $n = 1$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$ ; 2 — крахмал в глюколе — 47.4%,  $n = 2$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$

между так называемой кажущейся текучестью  $\varphi_k$  и касательным напряжением сдвига на стенке прибора  $\tau_w$ . Так, например, в капиллярном вискозиметре по замеру расхода  $Q$  и падению давления  $\Delta P$  находят величины

$$\varphi_k = \frac{8LQ}{\pi r_0^4 \Delta P}, \quad \tau_w = \frac{r_0 \Delta P}{2L} \quad (5.1)$$



Фиг. 7. Крахмал в глюколе — 47.4%,  $i = 25.5^\circ \text{C}$ ,  $\tau_0 = 111$  нэ<sup>-1</sup>,  $\varphi_{00} = 46$  нэ<sup>-1</sup>

где  $r$  и  $L$  — радиус и длина капилляра. В области  $\tau < \tau_1$  имеем  $\varphi = \varphi_0$ , а в области  $\tau > \tau_1$  функция  $\varphi(\tau) \neq \varphi_k(\tau)$ . Из (5.1) следует

$$\langle w \rangle = 1/4 \varphi_k \tau_w r_0 \quad (5.2)$$

Сопоставляя (5.2) с (3.6) имеем

$$\theta_k = 0.8\theta \quad (5.3)$$

6. Проведем сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными. Выше было показано, что характер функций  $\varphi(\tau)$  и  $\varphi_k(\tau)$  аналогичен, а величина  $\theta$  может быть определена по  $\theta_k$  в соответствии с формулой (5.3). Поэтому проверку реологического уравнения (2.4) можно производить по данным вискозиметрических измерений, т. е. в виде  $\varphi_k(\tau_w)$ .

На фиг. 2—4 приведены экспериментальные данные для битума по Михайлову [6], для раствора резины в толуоле — по Рейнеру [2], а также для 1%-ного раствора карбоксиметилцеллюлозы в воде — по нашим измерениям. В первом случае отчетливо наблюдается предел текучести, а во втором и третьем — предел устойчивости

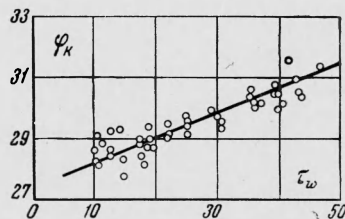
структуры. На фиг. 5—6 эти же данные, а также данные для ряда других жидкостей приведены в полупологарифмической анаморфозе, где

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_{\infty} - \varphi_k}{\varphi_{\infty} - \varphi_0}, \quad \Delta\tau = \frac{\tau - \tau_1}{\varphi_{\infty} - \varphi_0}$$

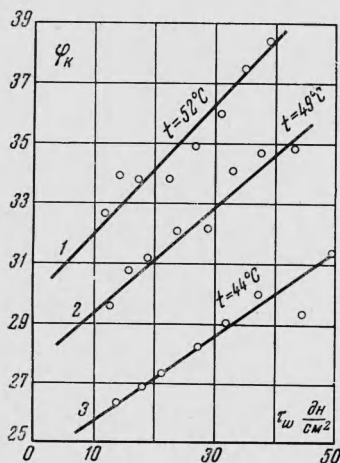
Следует обратить внимание, что на фиг. 6—7 раствор крахмала в глюколе является [7] жидкостью дилатантного типа;  $\Delta\varphi = 1$  при  $\Delta\tau = 0$ .

Как видно, в пределах точности опытов и оценки величин  $\varphi_0$  и  $\varphi_{\infty}$  реологический закон (2.4) проявляется совершенно отчетливо.

Рассматривая фиг. 5—6, можно прийти к заключению, что разброс опытных точек около прямых, особенно в области больших значений  $\Delta\tau$ , довольно велик. Однако следует иметь в виду, что с ростом  $\tau$  небольшой погрешности в опытном определении  $\varphi_k$  соответствует значительная погрешность величины  $\Delta\varphi$ , представленной на графиках. Точность опытных данных в ряде случаев оценить трудно, однако кривые текучести, рассчитанные нами по формуле (2.4) с значениями  $\theta$ , полученными из фиг. 5 и 6 ( $\theta$  — тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс), отклонялись от экспериментальных кривых, приведенных на фиг. 2—4 и 7, не более чем на 5%.

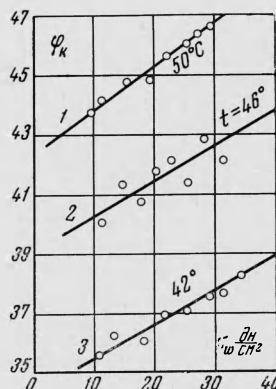


Фиг. 8. Карбоксиметилцеллюлоза в воде — 0.25%,  $t = 45-48^\circ\text{C}$ ,  $\varphi_0 = 27.5 \text{ нэ}^{-1}$ ,  $\varphi_{\infty} = 71 \text{ нэ}^{-1}$



Фиг. 9

Фиг. 9. Полиметакрилат в воде — 0.025%, 1 —  $\varphi_0 = 29.5 \text{ нэ}^{-1}$ ,  $\varphi_{\infty} = 108 \text{ нэ}^{-1}$ ; 2 —  $\varphi_0 = 27.5 \text{ нэ}^{-1}$ ,  $\varphi_{\infty} = 105 \text{ нэ}^{-1}$ ; 3 —  $\varphi_0 = 24 \text{ нэ}^{-1}$ ,  $\varphi_{\infty} = 100 \text{ нэ}^{-1}$



Фиг. 10

Фиг. 10. Поливиниловый спирт в воде — 2.5%, 1 —  $\varphi_0 = 42 \text{ нэ}^{-1}$ ,  $\varphi_{\infty} = 70 \text{ нэ}^{-1}$ ; 2 —  $\varphi_0 = 39 \text{ нэ}^{-1}$ ;  $\varphi_{\infty} = 64.5 \text{ нэ}^{-1}$ ; 3 —  $\varphi_0 = 34.5 \text{ нэ}^{-1}$ ,  $\varphi_{\infty} = 56.5 \text{ нэ}^{-1}$

На фиг. 8—10 показаны экспериментальные данные [8], подтверждающие существование жидкостей с линейным законом текучести в практически интересном интервале  $\tau$ .

Поступила 22 II 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. Изд-во «Мир», 1964.
2. Рейнер М. Деформация и течение. ГНТИ, 1963.
3. Philipoff W. Viskosität der Kolloide, Steinkopf, 1942.
4. Ostwald W. Kolloid. Zeitschrift. Über die Geschwindigkeitsfunktion der Viskosität disperser Systeme, 1927 Bd. 34, N 3, S. 157—160.
5. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Машгиз, 1962.
6. Михайлов Н. В. Упруго-пластические свойства нефтяных битумов. Коллоидный журнал, 1955, т. 17, вып. 3, стр. 242—246.
7. Roberts A. S. Measurement of the Dilatant Flow Properties of Some Non-Newtonian Suspensions, J. Chem. and Engng. Data, 1963, vol. 8, No. 3, pp. 440.
8. Ju Chin Chu, Brown, Frank, Burrige K. G. Heat Transfer Coefficients of Pseudo-Plastic Fluids, Industrial and Engng. Chemistry, 1953, vol. 45, No. 8, pp. 1686—1696.