

**О СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ  
НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА**

*С. И. Мешков*

(Москва)

Слабосингулярные функции, используемые в качестве ядер интегральных уравнений Больцмана — Вольтерра при решении статических задач наследственной теории упругости [1], стали широко применяться и при решении динамических задач [2]. Только изучению поведения одномерного осциллятора посвящена целая серия работ [3-5]. В данной работе исследуются неизвестные ранее особенности стационарного режима одномерного осциллятора, наследственные свойства которого описываются функциями, обладающими интегрируемой особенностью абелевского типа.

1. В силу известной связи между ядрами релаксации  $R(t)$  и последдействия  $K(t)$  уравнение движения наследственно-упругого осциллятора можно записать в эквивалентных формах

$$x'' + \omega_{\infty}^2 x - (\omega_{\infty}^2 - \omega_0^2) \int_0^{\infty} R(t') x(t-t') dt' = p \sin \omega t \quad (1.1)$$

$$x'' + \omega_{\infty}^2 x + v_{\sigma} \int_0^{\infty} K(t') x''(t-t') dt' = p \left[ \sin \omega t + v_{\sigma} \int_0^{\infty} K(t') \sin \omega(t-t') dt' \right] \quad (1.2)$$

$$v_{\sigma} = (E_{\infty} - E_0) E_0^{-1},$$

Здесь  $x$  — координата, точка над буквой означает производную по времени,  $p$  — отнесенная к единице массы амплитуда внешней моногармонической силы, действующей с частотой  $\omega$ , а релаксированное  $E_0$  и нерелаксированное  $E_{\infty}$  значения упругого модуля определяют соответствующие собственные частоты упругих колебаний  $\omega_0$  и  $\omega_{\infty}$ .

Для стационарного решения

$$x = X \sin(\omega t - \varphi_1) \quad (1.3)$$

уравнения (1.1) и (1.2) записываются в форме упруго-вязкой аналогии

$$(\omega_0^2 A - \omega^2)x + \omega_0^2 \omega^{-1} B x' = p \sin \omega t \quad (1.4)$$

$$(\omega_{\infty}^2 - \omega^2 C)x + \omega D x' = P \sin(\omega t - \varphi_2)$$

$$P \equiv p (C^2 + D^2)^{1/2}, \quad \text{tg } \varphi_2 = DC^{-1} \quad (1.5)$$

Амплитуда  $X$  и фаза  $\varphi_1$  определяются выражениями

$$[a = Xp^{-1} = [(\omega_0^2 A - \omega^2)^2 + \omega_0^4 B^2]^{-1/2} = Pp^{-1} [(\omega_{\infty}^2 - \omega^2 C)^2 + \omega^4 D^2]^{-1/2} \quad (1.6)$$

$$\text{tg } \varphi_1 = B [A - (\omega / \omega_0)^2]^{-1} = D [C - (P\omega / p\omega_{\infty})^2]^{-1} \quad (1.7)$$

Здесь введены обозначения

$$A \equiv 1 + v_{\sigma} \left( 1 - \int_0^{\infty} R(t) \cos \omega t dt \right), \quad B \equiv v_{\sigma} \int_0^{\infty} R(t) \sin \omega t dt \quad (1.8)$$

$$C \equiv 1 + v_{\sigma} \int_0^{\infty} K(t) \cos \omega t dt, \quad D \equiv v_{\sigma} \int_0^{\infty} K(t) \sin \omega t dt$$

Нетрудно определить и величину, обратную добротности системы  $Q^{-1}$ , обычно принимаемую за меру внутреннего трения

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (1.9)$$

Здесь  $\Delta W$  — энергия, рассеиваемая в течение одного цикла, а  $W$  — максимальное значение энергии в данном цикле.

Согласно уравнению (1.4)  $\Delta W$  вычисляется по формуле

$$\Delta W = p \int_0^{2\pi/\omega} x' \sin \omega t dt = \pi p X \sin \varphi_1 \quad (1.10)$$

или определяется как площадь петли гистерезиса

$$\Delta W = \pi X^2 \omega_0^2 B = \pi X^2 \omega_\infty^2 D (C^2 + D^2)^{-1} \quad (1.11)$$

В эквивалентности формул (1.10) и (1.11) легко убедиться после подстановки в них значений  $X$  и  $\varphi_1$  из (1.6) и (1.7). Максимальное значение энергии определяется выражением

$$W = 1/2 X^2 \omega_0^2 A = 1/2 X^2 \omega_\infty^2 C (C^2 + D^2)^{-1} \quad (1.12)$$

В результате для внутреннего трения получается формула

$$Q^{-1} = B A^{-1} = D C^{-1} = \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (1.13)$$

Следует заметить, что в квазистатическом случае, т. е. когда инерционными свойствами системы можно пренебречь, тангенс угла сдвига фаз (1.7) переходит в тангенс угла механических потерь, который тождественно совпадает с  $Q^{-1}$  (1.13).

Более подробные сведения, касающиеся расчета колебаний упруго-наследственных систем, содержатся в книге [6].

2. В качестве первого примера рассмотрим простейшее слабосингулярное ядро Абе-ля, которое выберем в качестве ядра последействия

$$K(t) = t^{\gamma-1} / \tau_\sigma^\gamma \Gamma(\gamma) \quad (0 < \gamma \leq 1) \quad (2.1)$$

Здесь  $\tau_\sigma$  — время ретардации. Аналогичное ядро, только без гамма-функции  $\Gamma(\gamma)$ , использовал Дюффинг [7] для обработки статических кривых ползучести ремней и других материалов. Решение динамической задачи непосредственно с ядром Дюффинга приводит лишь к появлению гамма-функции в окончательных формулах, а зависимость от частоты  $\omega$  и времени ретардации  $\tau_\sigma$  (релаксации  $\tau_\varepsilon$ ) останется той же самой.

Резольвента ядра (2.1) — ядро релаксации — определяется дробно-экспоненциальной функцией Ю. Н. Работнова [8]

$$R(t) = \tau_\varepsilon^{-\gamma} \mathcal{E}_\gamma(-\nu, \tau, t), \quad \mathcal{E}_\gamma \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\nu}{\tau^\gamma} \right)^n \frac{t^{\gamma(n+1)-1}}{\Gamma[\gamma(n+1)]}, \quad \frac{E_0}{E_\infty} = \left( \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right)^\gamma \quad (2.2)$$

Нетрудно вычислить синус и косинус трансформанты Фурье функций (2.1) и (2.2), а затем и величины

$$A = \frac{(1 + \nu_\sigma)(\kappa^\gamma \nu^{-1} + \cos \psi)}{\kappa^\gamma \nu^{-1} + \kappa^{-\gamma} \nu + 2 \cos \psi}, \quad B = \frac{(1 + \nu_\sigma) \sin \psi}{\kappa^\gamma \nu^{-1} + \kappa^{-\gamma} \nu + 2 \cos \psi} \quad (2.3)$$

$$C = 1 + \nu \kappa^{-\gamma} \cos \psi, \quad D = \nu \kappa^{-\gamma} \sin \psi, \quad \kappa \equiv \omega \tau, \quad \psi = 1/2 \pi \gamma \quad (2.4)$$

Подставляя эти значения в формулы (1.6) и (1.7), найдем соответственно амплитуду, тангенс угла сдвига фаз и внутреннее трение

$$a = \left( \frac{\kappa^\gamma \nu^{-1} + \kappa^{-\gamma} \nu + 2 \cos \psi}{\Omega_\infty^2 \kappa^\gamma \nu^{-1} + \omega^4 \nu \kappa^{-\gamma} - 2 \omega^2 \Omega_\infty} \right)^{1/2}, \quad \Omega_\infty \equiv \omega_\infty^2 - \omega^2 \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = [\Omega_\infty (\cos \psi + \kappa^\gamma \nu^{-1}) - \omega^2 (\cos \psi + \kappa^{-\gamma} \nu)]^{-1} \omega_\infty^2 \sin \psi \quad (2.6)$$

$$Q^{-1} = \operatorname{tg} \varphi_2 = (\cos \psi + \kappa^\gamma \nu^{-1})^{-1} \sin \psi \quad (2.7)$$

В формулах (2.2) — (2.7) и в дальнейшем, где величины  $\tau$  и  $\nu$  стоят без индексов, принято  $\tau = \tau_\sigma$  при  $\nu = \nu_\sigma$  и  $\tau = \tau_\varepsilon$  при  $\nu = \nu_\varepsilon = \Delta E / E_\infty$ .

При  $\gamma = 1$  использование ядер (2.1) и (2.2) в интегральных соотношениях Больцмана — Вольтерра приводит с точностью до константы  $\nu_\varepsilon$  ( $\nu_\varepsilon = 1$ , если  $E_0 = 0$ ) к реологической модели Максвелла. В этом случае динамические формулы (2.5) — (2.7) соответствуют модели Максвелла, для которой при частоте  $\omega = \omega_* = \omega_\infty / \sqrt{2}$  все резонансные амплитуды независимо от  $\tau$  пересекаются в одной точке, достигая в ней значения  $a_*^{(0)} = 2 \omega_\infty^{-2}$  [9]. Для ядер (2.1) и (2.2) при частоте  $\omega = \omega_*$  пересекаются и имеют значения  $2 \omega_\infty^{-2}$  только резонансные амплитуды, соответствующие  $\tau = 0$  и  $\tau = \infty$ . При произвольных  $\tau$  в точке  $\omega = \omega_*$  формулы (2.5), (2.6) имеют вид

$$a_* = a_*^{(0)} \left( \frac{\kappa_*^\gamma \nu^{-1} + \kappa_*^{-\gamma} \nu + 2 \cos \psi}{\kappa_*^\gamma \nu^{-1} + \kappa_*^{-\gamma} \nu - 2 \cos \psi} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{1*} = 2 (\kappa_*^\gamma \nu^{-1} - \kappa_*^{-\gamma} \nu) \sin \psi \quad (2.9)$$

Исследуем поведение амплитуды  $a_*$ , так как формула (2.8) может быть использована для нахождения релаксационных характеристик по экспериментальным данным. При фиксированных значениях  $\gamma$  и  $\xi = E_0 / E_\infty$  зависимость  $a_*$  от времени релаксации  $\tau_\varepsilon$  представляет собой симметричный пик, который при условии  $\kappa_*^\gamma = \nu$  достигает максимума]

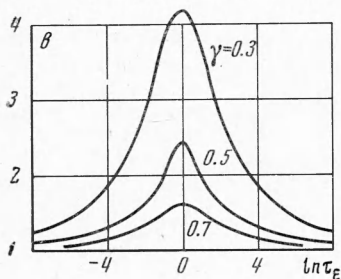
$$a_{*m} = a_*^{(0)} \operatorname{ctg}^{1/2} \psi \quad (2.10)$$

При больших и малых значениях  $\tau$  поведение амплитуды  $a_*$  соответственно определяется асимптотическими формулами

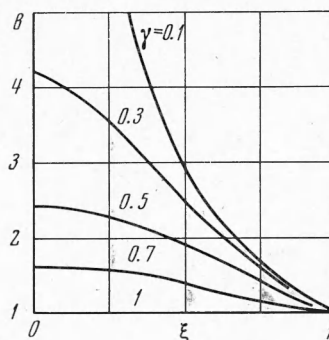
$$\tau \gg 1, \quad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + 2\nu\kappa_*^{-\gamma} \cos \psi) \quad (2.11)$$

$$\tau \ll 1, \quad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + 2\nu^{-1}\kappa_*^\gamma \cos \psi) \quad (2.12)$$

На фиг. 1 приведена зависимость величины  $b \equiv a_* - a_*^{(0)}$  от  $\ln \tau_\varepsilon$  при  $\nu_\varepsilon = 1$ , ( $\xi = \infty$ ),  $\omega_\infty = \sqrt{2}$ . Цифрами у кривых отмечены значения параметра  $\gamma$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Зависимость амплитуды  $a_*$  от параметра дробности  $\gamma$  при фиксированных значениях  $\tau$ ,  $\xi$  сначала проследим, используя формулу (2.10) для максимального значения  $a_{*m}$ . Тогда нетрудно установить, что  $a_{*m}$  монотонно возрастает от значения  $a_*^{(0)}$  при  $\gamma = 1$  до бесконечности при  $\gamma \rightarrow 0$ . Справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\gamma \rightarrow 1, \quad a_{*m} \approx a_*^{(0)} [1 + 1/2 \pi (1 - \gamma)], \quad \gamma \rightarrow 0, \quad a_{*m} \approx 8(\pi \omega_\infty^2 \gamma)^{-1} \quad (2.13)$$

Если  $\kappa_*^\gamma \neq \nu$ , то поведение  $a_*$  при  $\gamma \rightarrow 1$  и  $\gamma \rightarrow 0$  соответственно определяется выражениями

$$\gamma \rightarrow 1, \quad a_* \approx a_*^{(0)} [1 + 1/2 \pi (1 - \gamma) \nu \kappa_* (\nu^2 + \kappa_*^2)^{-1}] \quad (2.14)$$

$$\gamma \rightarrow 0, \quad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + \nu)^2 (1 - \nu)^{-2} [1 + 2\gamma (\nu - \nu^{-1})^{-1} \ln \kappa_*] \quad (2.15)$$

Амплитуда  $a_*$  как функция степени релаксации  $\xi$ , когда  $\tau$  и  $\gamma$  играют роль параметров, определена в области  $\xi \in [0, 1]$  и при том же условии  $\kappa_*^\gamma = \nu$  (или в переменных  $\tau_\varepsilon$ ,  $\xi$ , это равносильно  $\xi = 1 - \kappa_*^\gamma$ ) достигает максимального значения, определяемого выражением (2.10). Отсюда видно, что при изменении  $\xi$  положение пика на оси  $\ln \tau_\varepsilon$  меняется, и он проявляется не при любых значениях параметров  $\tau_\varepsilon$  и  $\gamma$ , а только для тех, которые удовлетворяют условию  $\kappa_*^\gamma < 1$ . Асимптотическое поведение амплитуды  $a_*$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $\xi \rightarrow 1$  определяется соответственно выражениями:

$$\xi \rightarrow 0, \quad a_* \approx h [1 + 2\xi (\kappa_*^{2\gamma} + \kappa_*^{-2\gamma} - 2 \cos 2\psi)^{-1} (\kappa_*^{-\gamma} - \kappa_*^\gamma) \cos \psi] \quad (2.16)$$

$$h \equiv a_*^{(0)} (\kappa_*^\gamma + \kappa_*^{-\gamma} + 2 \cos \psi)^{1/2} (\kappa_*^\gamma + \kappa_*^{-\gamma} - 2 \cos \psi)^{-1/2} \quad (2.17)$$

На фиг. 2 приведена зависимость величины  $b$  от  $\xi$  при  $\tau_\varepsilon = 1$ ,  $\omega_\infty = \sqrt{2}$  для различных  $\gamma$ , значения которых указаны цифрами у кривых. Следует заметить, что при  $\xi = 1$  все кривые для  $a_*$  сходятся в одну точку  $a_* = a_*^{(0)}$  в силу специфики ядра (2.1), описывающего неограниченный процесс ползучести.

3. В качестве второго примера рассмотрим специальный случай  $\mathcal{D}_\gamma$ -функции Ю. Н. Работнова при  $\nu = 1$ . Тогда ядра релаксации и последдействия запишутся в симметричном виде

$$R(t) = \tau_\varepsilon^{-\gamma} \mathcal{D}_\gamma(-1, \tau_\varepsilon, t), \quad \bar{K}(t) = \tau_\sigma^{-\gamma} \mathcal{D}_\gamma(-1, \tau_\sigma, t) \quad (3.1)$$

В этом случае

$$A = \frac{\xi^{-1} \kappa_\varepsilon^\gamma + \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + (1 + \xi^{-1}) \cos \psi}{\kappa_\varepsilon^\gamma + \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2 \cos \psi}, \quad B = \frac{\nu_\sigma \sin \psi}{\kappa_\varepsilon^\gamma + \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2 \cos \psi} \quad (3.2)$$

$$C = \frac{\kappa_\sigma^\gamma + \xi^{-1} \kappa_\sigma^{-\gamma} + (1 + \xi^{-1}) \cos \psi}{\kappa_\sigma^\gamma + \kappa_\sigma^{-\gamma} + 2 \cos \psi}, \quad D = \frac{\nu_\sigma \sin \psi}{\kappa_\sigma^\gamma + \kappa_\sigma^{-\gamma} + 2 \cos \psi} \quad (3.3)$$

Согласно (1.6), (1.7) и (1.16) для амплитуды, сдвига фаз и внутреннего трения получим

$$a = \left( \frac{\kappa_\varepsilon^\gamma + \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2 \cos \psi}{\Omega_\infty^2 \kappa_\varepsilon^\gamma + \Omega_0^2 \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2 \Omega_\infty \Omega_0 \cos \psi} \right)^{1/2}, \quad \Omega_0 \equiv \omega_0^2 - \omega^2 \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = [\Omega_\infty \kappa_\varepsilon^\gamma + \Omega_0 \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + (\Omega_0 + \Omega_\infty) \cos \psi]^{-1} (\Omega_\infty - \Omega_0) \sin \psi \quad (3.5)$$

$$Q^{-1} = \operatorname{tg} \varphi_2 = [\kappa_\varepsilon^\gamma + \xi \kappa_\varepsilon^{-\gamma} + (1 + \xi) \cos \psi]^{-1} \nu_\varepsilon \sin \psi \quad (3.6)$$

При  $\gamma = 1$  все соотношения (3.1) — (3.6) соответствуют модели стандартного линейного тела, для которого при частоте

$$\omega_*^2 = 1/2 (\omega_\infty^2 + \omega_0^2) \quad (3.7)$$

резонансная амплитуда  $a_*$  не зависит от времени релаксации  $\tau_\varepsilon$ , т. е. все амплитуды независимо от  $\tau_\varepsilon$  пересекаются в одной точке [10]. При  $\gamma \neq 1$  в этой точке  $\omega = \omega_*$  пересекаются только две резонансные амплитуды, соответствующие  $\tau_\varepsilon = 0$  и  $\tau_\varepsilon = \infty$ . Для произвольных  $\tau_\varepsilon$  при  $\omega = \omega_*$  амплитуда  $a_*$  и фаза  $\varphi_{1*}$  определяются формулами

$$a_{*i} = a_*^{(0)} \left( \frac{\kappa_{*\varepsilon}^\gamma + \kappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} + 2 \cos \psi}{\kappa_{*\varepsilon}^\gamma + \kappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} - 2 \cos \psi} \right)^{1/2}, \quad a_*^{(0)} = \frac{2}{\omega_\infty^2 - \omega_0^2} \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{1*} = 2 (\kappa_{*\varepsilon}^\gamma - \kappa_{*\varepsilon}^{-\gamma}) \sin \psi \quad (3.9)$$

Следует заметить, что формула (3.9) справедлива только когда  $\omega_\infty \neq \omega_0$ . При  $\omega_\infty = \omega_0$ , т. е. при отсутствии дефекта модуля, из формулы (3.5) сразу следует  $\varphi_1 = 0$ , что соответствует упругому решению.

Исследования, аналогичные ядру Абеля — Дюффинга, приводят к следующим результатам.

Функция  $a_* = f(\tau_\varepsilon)$  ( $\gamma, \xi$  — параметры) образует симметричный пик, который при условии  $\kappa_{*\varepsilon} = 1$  достигает максимальное значение, равное

$$a_{*m} = a_*^{(0)} \operatorname{ctg}^{1/2} \psi \quad (3.10)$$

При больших и малых значениях  $\tau_\varepsilon$  амплитуда  $a_*$  стремится к значению  $a_*^{(0)}$ , что хорошо видно, из следующих асимптотических оценок:

$$\tau_\varepsilon \gg 1, \quad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + 2\kappa_\varepsilon^{-\gamma} \cos \psi) \quad (3.11)$$

$$\tau_\varepsilon \ll 1, \quad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + 2\kappa_\varepsilon^\gamma \cos \psi) \quad (3.12)$$

При соответствующем значении  $\gamma$  график функции  $a_* = f(\ln \tau_\varepsilon)$  аналогичен приведенному на фиг. 1, а для  $\xi = 0$  в точности с ним совпадает.

При фиксированных значениях  $\tau_\varepsilon$  и  $\xi$  амплитуда  $a_*$  с уменьшением  $\gamma$  монотонно возрастает от величины  $a_*^{(0)}$  при  $\gamma = 1$  до бесконечности при  $\gamma \rightarrow 0$ . Например, при условии  $\kappa_{*\varepsilon} = 1$ , это легко видно из формулы (3.10), а при других значениях  $\kappa_{*\varepsilon}$  асимптотика  $a_*$  определяется формулами

$$\gamma \rightarrow 1, \quad a_* \approx a_*^{(0)} [1 + \pi(1 - \gamma)(\kappa_{*\varepsilon} + \kappa_{*\varepsilon}^{-1})^{-1}] \quad (3.13)$$

$$\gamma \rightarrow 0, \quad a_* \approx 2a_*^{(0)} \gamma^{-1} [1/4 \pi^2 + (\ln \kappa_{*\varepsilon})^2]^{-1/2} \quad (3.14)$$

Наконец, при изменении степени релаксации  $\xi$  амплитуда  $a_*$  меняется, монотонно возрастая от постоянного значения при  $\xi = 0$  до бесконечности при  $\xi \rightarrow 1$ .

Последнее нетрудно понять, так как при  $\omega_{\infty}^2 = \omega_0^2$  получается упругое решение, и амплитуда в резонансе, естественно, равна бесконечности. При  $\xi \rightarrow 0$  справедлива асимптотическая формула

$$a_* \approx a_{\infty} \{1 + \gamma \xi [1 + (\kappa_{\infty}^{2\gamma} + \kappa_{\infty}^{-2\gamma} - 2 \cos 2\psi)^{-1} (\kappa_{\infty}^{-\gamma} - \kappa_{\infty}^{\gamma}) \cos \psi]\} \quad (3.15)$$

$$a_{\infty} \equiv (\kappa_{\infty}^{\gamma} + \kappa_{\infty}^{-\gamma} + 2 \cos \psi)^{1/2} (\kappa_{\infty}^{\gamma} + \kappa_{\infty}^{-\gamma} - 2 \cos \psi)^{-1/2}, \quad \kappa_{\infty} \equiv \omega_{\infty} \tau_{\varepsilon} / \sqrt{2}$$

На фиг. 3 приведена зависимость  $a_*$  от степени релаксации  $\xi$  для различных  $\gamma$ , значениями которых помечены кривые, ( $\tau_{\varepsilon} = 1, \omega_{\infty} = \sqrt{2}$ ). Принципиальное отличие от кривых, изображенных на фиг. 2, состоит в том, что все амплитуды  $a_*$  при  $\xi \rightarrow 1$  стремятся к бесконечности, так как они соответствуют упругому резонансу.

4. Полученные результаты допускают возможность использования их для экспериментальных приложений. Во-первых, следует заметить, что рассмотренные выше ядра релаксации и последействия эквивалентны вполне определенным функциям распределения времен релаксаций (ретардаций). Например, для ядра последействия Абеля — Дюффинга соответствующую функцию распределения наиболее просто получить, если воспользоваться определением гамма-функции через интеграл Эйлера и сделать в нем замену переменных. В результате можно записать соотношение

$$t^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) = \int_0^{\infty} \tau^{\gamma-2} e^{-t/\tau} d\tau \quad (4.1)$$

из которого следует, что функции распределения времен ретардаций, эквивалентные ядрам Абеля и Дюффинга, соответственно имеют вид

$$f_A(\tau) = (\pi \tau_{\varepsilon}^{\gamma})^{-1} \tau^{\gamma-1} \sin \pi \gamma$$

$$f_D(\tau) = [\tau_{\varepsilon}^{\gamma} \Gamma(1-\gamma)]^{-1} \tau^{\gamma-1} \quad (4.2)$$

Функцию распределения времен релаксаций для ядра Ю. Н. Работнова (2.2) можно получить, если воспользоваться интегральным представлением  $\mathcal{E}_{\gamma}$ -функции по формуле Меллина

$$\tau_{\varepsilon}^{-\gamma} \mathcal{E}_{\gamma}(-\nu_{\varepsilon}, \tau_{\varepsilon}, t) = \frac{1}{2\pi i \nu_{\varepsilon}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt) dp}{1 + \nu_{\varepsilon}^{-1} (p\tau_{\varepsilon})^{\gamma}} \quad (4.3)$$

Тогда, вычисляя контурный интеграл (4.3) методами теории функций комплексной переменной, приходим к соотношению

$$\tau_{\varepsilon}^{-\gamma} \mathcal{E}_{\gamma}(-\nu_{\varepsilon}, \tau_{\varepsilon}, t) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi \nu_{\varepsilon}} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{-2} \exp(-t/\tau) d\tau}{\nu_{\varepsilon} (\tau/\tau_{\varepsilon})^{\gamma} + \nu_{\varepsilon}^{-1} (\tau/\tau_{\varepsilon})^{-\gamma} + 2 \cos \pi \gamma} \quad (4.4)$$

из которого видно, что функция распределения времен релаксаций определяется выражением

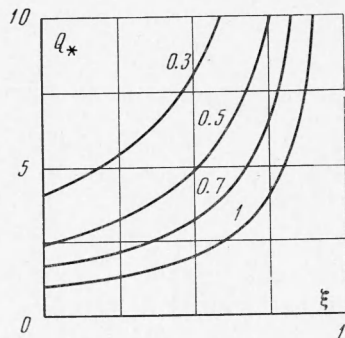
$$f_R(\tau) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi \nu_{\varepsilon} \tau} \left[ \nu_{\varepsilon} \left( \frac{\tau}{\tau_{\varepsilon}} \right)^{\gamma} + \nu_{\varepsilon}^{-1} \left( \frac{\tau}{\tau_{\varepsilon}} \right)^{-\gamma} + 2 \cos \pi \gamma \right]^{-1} \quad (4.5)$$

При  $\nu_{\varepsilon} = 1$  получается функция распределения, соответствующая ядру (3.1).

Из формул (4.2) и (4.5) следует, что параметр  $\gamma$ , определяющий слабую сингулярность наследственных функций, характеризует «размытие» релаксационно-ретардационных спектров. Поэтому экспериментальное определение  $\gamma$  представляет несомненный интерес. На примере осциллятора это наиболее просто сделать, если исследовать температурную зависимость амплитуды  $a_*$  при частоте  $\omega = \omega_*$ , учитывая, что время релаксации  $\tau_{\varepsilon}$  зависит от температуры  $T$  по формуле Аррениуса

$$\tau_{\varepsilon} = \tau_{\varepsilon 0} \exp(-H/kT) \quad (4.6)$$

Здесь  $H$  — энергия активации релаксационного процесса,  $k$  — константа Больцмана,  $\tau_{\varepsilon 0}$  — частотный фактор.



Фиг. 3

Тогда, зная максимальное значение амплитуды  $a_{*m}$  и  $a_*^{(0)}$ , согласно формулам (2.10) и (3.10) получим

$$\pi\gamma = 4 \arcsin (a_*^{(0)} / a_{*m}) \quad (4.7)$$

Следует заметить, что определенный таким образом параметр  $\gamma$  для ядер (2.2) и (3.1) имеет разные значения, так как в первом случае  $\gamma$  соответствует фону, во втором — релаксационному пику внутреннего трения  $\bar{Q}^{-1}$ , а процессы, контролирующие эти явления, имеют различную природу. Полученные значения  $\gamma$  по температурной зависимости  $Q^{-1}$  для фона некоторых чистых металлов (Cu, Al, Fe, Mo, W и др.) лежат в пределах 0.2—0.3 [11]. Для релаксационных пиков значения  $\gamma$  значительно больше, например, для зернограничного пика в поликристаллическом алюминии  $\approx 0.7$  [12].

Таким образом, исследование температурной зависимости амплитуды  $a_*$  осциллятора в стационарном режиме предоставляет возможность определения параметра  $\gamma$  единым методом для принципиально разных явлений.

Другой важной характеристикой релаксационного процесса служит энергия активации  $H$ , которая в данном методе, независимо от того, относится ли она к пику или фону, определяется одной и той же формулой

$$H = kT_1T_2(T_2 - T_1)^{-1} \ln(\omega_{*2} / \omega_{*1}^{-2}) \quad (4.8)$$

При неизменной степени релаксации изменение частоты  $\omega_*$  достигается изменением массы. Частотный фактор для фона определяется по формуле

$$\ln \tau_{e0} = \ln v_e - 1/2 [\ln(\omega_{*1}\omega_{*2}) + Hk^{-1}(T_1^{-1} + T_2^{-1})] \quad (4.9)$$

а для пика в (4.9) надо положить  $v_e = 1$ .

Таким образом, исследование резонансной амплитуды наследственно-упругого осциллятора при частоте  $\omega = \omega_*$  позволяет определить все параметры релаксационного спектра.

В заключение автор выражает благодарность Ю. Н. Работнову за обсуждение результатов.

Поступила 7 IV 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Розовский М. И. Об одном свойстве степени специального оператора и его приложения к решению упруго-наследственных динамических задач. В сб.: «Ползучесть и длительная прочность», Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963.
3. Круш И. И., Розовский М. И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
4. Розовский М. И., Синайский Е. С. Колебания осциллятора, обладающего наследственной ползучестью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
5. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3.
6. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
7. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Rientrieb. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1931, Bd 2, H. 3.
8. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.
9. Мешков С. И., Шермергор Т. Д. О температурной зависимости внутреннего трения при вынужденных колебаниях максвеловского крутильного маятника. ПМТФ, 1964, № 1.
10. Мешков С. И., Постников В. С., Шермергор Т. Д. Вынужденные колебания стандартного линейного тела. В сб.: «Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем», АН УССР, Киев, «Наукова Думка», 1966.
11. Schoeck G., Bisogni E., Shyne S. The activation energy of high temperature internal friction, Acta metallurg., 1964, vol. 12, p. 1466.
12. Шермергор Т. Д. Расчет функции распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. вузов, Физика, 1961, № 1.