

УДК 533.72

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНО СТАТИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Латышев, А. А. Юшканов

Московский государственный областной университет, 105005 Москва
E-mail: yushkanov@mtu-net.ru

Развивается метод аналитического решения полупространственных граничных задач для эллипсоидально статистического уравнения с частотой, пропорциональной скорости молекул. Решена классическая задача Смолуховского о скачке температуры в разреженном газе и о слабом испарении (конденсации). Проведены численные расчеты полученных выражений. Проводится сравнение с ранее полученными результатами.

Ключевые слова: статистическое уравнение, задача Смолуховского, краевая задача Римана — Гильберта.

Введение. Модельные кинетические уравнения по-прежнему широко используются в кинетической теории газов (см., например, [1–3]).

Известное кинетическое БГК-уравнение (Бхатнагар, Гросс, Крук) приводит к неправильному числу Прандтля. Чтобы избежать этого недостатка, используют модели (при аналитическом решении) более высокого порядка — уравнение Шахова и эллипсоидально статистическое уравнение (ЭС-уравнение) или полное уравнение Больцмана при численном решении.

Для всех модельных уравнений с постоянной частотой столкновений $\nu = \text{const}$ были развиты аналитические методы [4–7] решения граничных задач.

Наряду с кинетическими уравнениями с $\nu = \text{const}$ применяются уравнения с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Такие уравнения отвечают более адекватной гипотезе о постоянстве длины свободного пробега молекул $l = \text{const}$.

В [8] показано, что ЭС-уравнение при $l = \text{const}$ в задачах скольжения приводит к результатам, наиболее близким к полученным с использованием полного уравнения Больцмана для молекул-твердых сфер. Там же разработан метод аналитического решения ЭС-уравнения в применении к задачам скольжения. До сих пор отсутствует метод аналитического решения общих граничных задач для ЭС-уравнения. К таким задачам относится и задача Смолуховского, объединяющая задачи о температурном скачке и о слабом испарении (конденсации). Чтобы восполнить этот пробел, в настоящей работе развивается аналитический метод решения полупространственных граничных задач для ЭС-уравнения с частотой столкновений $\nu = \nu_0 V$, $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$ — модуль молекулярной скорости. Получено точное решение задачи Смолуховского.

Задача о скачке температуры в газе относится к числу важнейших в проблеме взаимодействия газа с твердым телом (или конденсированной фазой). Этой задаче посвящен целый ряд работ, основанных на использовании как численных, так и аналитических

методов. В связи с фундаментальным характером рассматриваемой проблемы интерес к аналитическим методам остается высоким (см. [3] и цитируемые в ней работы).

Имеющиеся по данной проблеме аналитические результаты получены с использованием БГК-уравнения (с постоянной и переменной частотой столкновений) и ЭС-уравнения с $\nu = \text{const}$. Представляется актуальным развить аналитический метод для ЭС-уравнения в случае $l = \text{const}$ и применить его к решению задачи Смолуховского. Важно иметь в виду, что именно аналитические методы дают полное решение задачи, так как позволяют получить не только величины скачков макропараметров (температуры и концентрации), но и полную функцию распределения.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Возьмем стационарное линейризованное ЭС-уравнение с частотой $\nu = \nu_0 V$ (см. [4, 9]) в безразмерных переменных

$$C \nabla \varphi + C \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C \int \rho(C') k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{C}') d^3 C'. \quad (1.1)$$

При этом используется безразмерная скорость молекул $\mathbf{C} = \sqrt{m/(2kT_s)} \mathbf{V}$ (T_s — температура поверхности; k — постоянная Больцмана) и безразмерная координата $\mathbf{r}' = \nu_0 \mathbf{r}$ (здесь и далее штрих у безразмерной координаты опускается).

Ядро уравнения (1.1) определяется выражением

$$k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2} \mathbf{C} \mathbf{C}' + \frac{1}{2} (C^2 - 2)(C'^2 - 2) + \gamma \sum_{i,j=1}^3 \left(C_i C_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} C^2 \right) \left(C'_i C'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} C'^2 \right),$$

где $\rho(C) = \pi^{-3/2} C \exp(-C^2)$; γ — параметр, который можно найти из определения числа Прандтля; δ_{ij} — символ Кронекера; $\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Отметим, что при $\gamma = 0$ уравнение (1.1) переходит в БГК-уравнение, ибо ЭС-ядро k переходит в БГК-ядро

$$k_0(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2} \mathbf{C} \mathbf{C}' + \frac{1}{2} (C^2 - 2)(C'^2 - 2).$$

Будем рассматривать класс задач, в которых функция распределения зависит от одной пространственной переменной x и обладает изотропией в плоскости $C_1 = \text{const}$, C_2 , C_3 . Для этих задач все недиагональные компоненты тензора ($i \neq j$)

$$\int \rho(C) \left(C_i C_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} C^2 \right) \varphi(x, \mathbf{C}) d^3 C$$

равны нулю. Кроме того, при данных предположениях функция $\varphi(x, \mathbf{C})$ зависит только от x , C и $\mu = C_1/C$. Следовательно, уравнение (1.1) упрощается:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, \mu, C) = \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^\infty \exp(-C'^2) C'^3 k(\mu, C; \mu', C') \varphi(x, \mu', C') dC', \quad (1.2)$$

где

$$k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = k_0(\mathbf{C}, \mathbf{C}') + \frac{3}{2} \gamma C^2 C'^2 \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \left(\mu'^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Воспользуемся определением числа Прандтля: $\text{Pr} = 5k\eta/(2m\alpha)$. Здесь m — масса молекулы; η — коэффициент вязкости; α — коэффициент теплопроводности. Выражая коэффициенты вязкости и теплопроводности через параметр γ , получаем

$$\gamma = \frac{40(9 \text{Pr} - 8)}{288 \text{Pr} - 256 + 75\pi}.$$

При часто используемом значении числа Прандтля $Pr = 2/3$ из этой формулы следует $\gamma = -0,466148$.

В задаче Смолуховского газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской стенкой, с которой происходит испарение (конденсация) молекул газа (пара), а также происходит теплообмен между конденсированной фазой и газом (паром). Предположим, что вдали от поверхности существует градиент температуры, перпендикулярный поверхности (и соответствующий поток тепла), а также некоторая среднемассовая скорость газа, направленная от или к поверхности (испарение или конденсация), т. е. $T(x) = T_0 + K_t x$, $n(x) = n_0 - (n_0 K_t / T_s) x$, $K_t = (dT/dx)_\infty$, $\mathbf{U}(x) = \{U_\infty, 0, 0\}$, $x \rightarrow +\infty$. Задача Смолуховского состоит в нахождении относительного скачка температуры $\varepsilon_t = (T_0 - T_s)/T_s$ как функции относительного градиента температуры $k_t = K_t/T_s$ и скорости испарения (конденсации) $U = \sqrt{m/(2kT_s)} U_\infty$. Учитывая линейный характер задачи, можно записать: $\varepsilon_t = T_t k_t + T_u U$. Безразмерные величины T_t , T_u называются коэффициентами скачка температуры. Другой важнейшей характеристикой газа является величина относительного скачка концентрации $\varepsilon_n = (n_0 - n_s)/n_s$ (n_s — концентрация насыщенного пара, соответствующая температуре T_s), для которой: $\varepsilon_n = N_t k_t + N_u U$, N_t , N_u — коэффициенты скачка концентрации.

Предполагая отражение молекул от стенки чисто диффузным, сформулируем граничные условия в задаче Смолуховского:

$$\begin{aligned} \varphi(0, \mu, C) &= 0, & 0 < \mu < 1, \\ \varphi(x, \mu, C) &= \varphi_{as}(x, \mu, C) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\varphi_{as} = \varepsilon_n + 2U\mu C + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\varepsilon_t + k_t \left[(x - \mu) \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \mu C \right].$$

Уравнение (1.2) имеет четыре частных решения: три из них — это инварианты столкновений 1, μC , C^2 , четвертое решение $(x - \mu)(C^2 - 5/2) - 2\mu C/(3\sqrt{\pi})$ описывает перенос тепла в неоднородно нагретом газе.

Учитывая структуру ядра уравнения (1.2), будем искать решение задачи (1.2), (1.3) в виде

$$\varphi(x, \mu, C) = h_1(x, \mu) + Ch_2(x, \mu) + (C^2 - 2)h_3(x, \mu).$$

Получим задачу, состоящую из уравнения

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(\mu, \mu') h(x, \mu) d\mu' \quad (1.4)$$

и граничных условий

$$\begin{aligned} h(0, \mu) &= 0, & 0 < \mu < 1, \\ h(x, \mu) &= h_{as}(x, \mu) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $h = \text{col} \{h_1(x, \mu), h_2(x, \mu), h_3(x, \mu)\}$ — вектор-столбец; $K(\mu, \mu')$ — ядро уравнения;

$$\begin{aligned} K(\mu, \mu') &= K_0 + 3\mu\mu'K_1 + 3\gamma\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\left(\mu'^2 - \frac{1}{3}\right)K_2; & \alpha &= \frac{3}{16}\sqrt{\pi}; \\ K_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}; & K_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & K_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 10\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5\alpha & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$h_{as}(x, \mu) = \text{col} \left\{ \varepsilon_n + \frac{1}{2} \varepsilon_t - \frac{1}{2} k_t(x - \mu), \left(2U - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} k_t \right) \mu, \varepsilon_t + k_t(x - \mu) \right\}.$$

2. Разделение переменных, собственные векторы и собственные значения.

Разделение переменных в уравнении (1.4) согласно общему методу Фурье приводит к решениям $h_\eta(x, \mu) = \exp(-x/\eta)\Phi(\eta, \mu)$, в которых η — спектральный параметр, или параметр разделения, а вектор Φ является решением характеристического уравнения

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{2} \eta D(\mu, \eta) n(\eta), \quad n(\eta) = \text{col} \{n_1(\eta), n_2(\eta), n_3(\eta)\} = \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu.$$

Здесь $D(\mu, \eta) = D_0(\mu\eta) - \gamma(\mu^2 - 1/3)D_1(\eta)$, $d(\eta) = 1 + 3c\eta^2$;

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 3c\mu\eta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}; \quad D_1(\eta) = \begin{bmatrix} 2 & 10\alpha d(\eta) & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5\alpha d(\eta) & 1 \end{bmatrix}; \quad c = 1 - 9\alpha^2.$$

При $\eta \in (-1, 1)$ решение характеристического уравнения возьмем в пространстве обобщенных функций [10]:

$$\Phi(\eta, \mu) = F(\eta, \mu)n(\eta),$$

где

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{2} D(\mu, \eta) P \frac{1}{\eta - \mu} + \Lambda(\eta)\delta(\eta - \mu)$$

— собственная матрица-функция; символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла от x^{-1} ; $\delta(x)$ — дельта-функция; $\Lambda(z)$ — дисперсионная матрица,

$$\Lambda(z) = \Lambda_0(z) - \gamma\omega_*(z)D_1(z), \quad \omega_*(z) = 1/3 + (z^2 - 1/3)\lambda_0(z),$$

$$\Lambda_0(z) = \begin{bmatrix} \lambda_0(z) & 4\alpha T(z) & 0 \\ 0 & \omega(z) & 0 \\ 0 & \alpha T(z) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_0(z) = 1 + T(z), \quad T(z) = \frac{1}{2} z \int_{-1}^1 \frac{du}{u - z}, \quad \omega(z) = 1 + 3cz^2\lambda_0(z), \quad \lambda_0(z) \text{ — дисперсионная функция Кейза [11].}$$

Кейза [11].

Ниже понадобится представление дисперсионной матрицы в следующем виде:

$$\Lambda(z) = \lambda_0(z)D(z) - M(z)/3,$$

где

$$M(z) = \begin{bmatrix} 2\gamma & 2\alpha(6 + 5\gamma d(z)) & 2\gamma \\ 0 & -3 & 0 \\ \gamma & \alpha(3 + 5\gamma d(z)) & \gamma \end{bmatrix}.$$

Дисперсионная функция данной задачи имеет вид

$$\lambda(z) = \det \Lambda(z) = \gamma\lambda_0(z)\omega(z)\omega_1(z),$$

где $\omega_1(z) = \gamma^{-1}\lambda_0(z) - 3\omega_*(z) = \lambda_0(z)s(z) - 1$; $s(z) = -3z^2 + 1 + \gamma^{-1}$.

По определению (см., например, [4, 12]) дискретный спектр задачи составляет множество нулей дисперсионной функции. Нулем $\lambda_0(z)$ является (см. [11]) точка $z = \infty$ кратности 2, нулями $\omega(z)$ являются (см. [4, 9]) две точки $\pm\eta_0$ ($\eta_0 = 1 + 1,12 \cdot 10^{-48}$). Из разложения

$$\gamma\omega_1(z) = \frac{4\gamma - 5}{15z^2} + \frac{8\gamma - 7}{35z^4} + \dots \quad (z \rightarrow \infty)$$

видно, что $\omega_1(z)$ имеет нуль кратности 2 в точке $z = \infty$. Применение принципа аргумента [13] показывает, что других нулей $\omega_1(z)$ не имеет. Нулю η_0 отвечает собственное решение

$$h_0(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{1}{2} \eta_0 D(\mu, \eta_0) \frac{1}{\eta_0 - \mu} n(\eta_0).$$

Подставляя это решение в уравнение (1.4), получаем, что вектор $n(\eta_0)$ определяется из уравнения

$$\Lambda(\eta_0)n(\eta_0) = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Используя равенства

$$\begin{aligned} \omega(\eta_0) = 1 + 3c\eta_0^2\lambda_0(\eta_0) = 0, \quad d(\eta_0)\lambda_0(\eta_0) = T(\eta_0), \\ \lambda_0(\eta_0) - 3\gamma\omega_*(\eta_0) = \gamma\omega_1(\eta_0), \end{aligned}$$

матрицу $\Lambda(z)$ в точке η_0 представим в виде

$$\Lambda(\eta_0) = \gamma \begin{bmatrix} \omega_1(\eta_0) + \omega_*(\eta_0) & 4\alpha d(\eta_0)[\omega_1(\eta_0) + \omega_*(\eta_0)/2] & -2\omega_*(\eta_0) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_*(\eta_0) & \alpha d(\eta_0)[\omega_1(\eta_0) - 2\omega_*(\eta_0)] & \omega_1(\eta_0) + 2\omega_*(\eta_0) \end{bmatrix}.$$

Возьмем $n_2(\eta_0) = \lambda_0(\eta_0)$. Тогда из уравнения (2.1) получаем два уравнения

$$\begin{aligned} [\omega_1(\eta_0) + \omega_*(\eta_0)]n_1(\eta_0) - 2\omega_*(\eta_0)n_3(\eta_0) = -4\alpha T(\eta_0)[\omega_1(\eta_0) + \omega_*(\eta_0)/2], \\ -\omega_*(\eta_0)n_1(\eta_0) + [\omega_1(\eta_0) + 2\omega_*(\eta_0)]n_3(\eta_0) = -\alpha T(\eta_0)[\omega_1(\eta_0) - 2\omega_*(\eta_0)]. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует $n_1(\eta_0) = -4\alpha T(\eta_0)$, $n_3(\eta_0) = -\alpha T(\eta_0)$. Итак, вектор $n(\eta_0)$ построен:

$$n(\eta_0) = \text{col} \{-4\alpha T(\eta_0), \lambda_0(\eta_0), -\alpha T(\eta_0)\}.$$

Заметим, что $D_1(\eta_0)n(\eta_0) = \mathbf{0}$, следовательно,

$$D(\mu, \eta_0)n(\eta_0) = [D_0(\mu\eta_0) - \gamma(\mu^2 - 1/3)D_1(\eta_0)]n(\eta_0) = D_0(\mu\eta_0)n(\eta_0) = \text{col} \{4\alpha, -\mu/\eta_0, \alpha\}.$$

Таким образом, последнее частное решение построено:

$$h_0(x, \mu) = \frac{1}{2} \frac{\exp(-x/\eta_0)}{\eta_0 - z} \text{col} \{4\alpha\eta_0, -\mu, \alpha\eta_0\}.$$

Отметим, что линейная комбинация четырех частных решений уравнения (1.4), отвечающих точке $z = \infty$, составляет вектор $h_{as}(x, \mu)$.

3. Однородная краевая задача. Ниже нам понадобится решение векторной однородной краевой задачи Римана — Гильберта

$$X^+(\mu) = G(\mu)X^-(\mu), \quad G(\mu) = [\Lambda^+(\mu)]^{-1}\Lambda^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1 \quad (3.1)$$

с матричным коэффициентом $G(\mu)$, который можно представить в виде

$$G(\mu) = [P^+(\mu)]^{-1}P^-(\mu),$$

где $P(z) = \Lambda(z)D^{-1}(z, z)$; $X(z)$ — неизвестная матрица; $X^\pm(\mu)$ — граничные значения сверху/снизу в интервале $(0, 1)$.

Ясно, что $P(z) = \lambda_0(z)E - M(z)D^{-1}(z, z)/3$ (E — единичная матрица) или $P(z) = \lambda_0(z)E - E_1(z)/(3s(z))$, где

$$E_1(z) = \begin{bmatrix} 2 & e_1(z) & 2 \\ 0 & e_2(z) & 0 \\ 1 & e_3(z) & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1(z) &= 2\alpha(5 - 2e_2(z)), \\ e_2(z) &= -s(z)/(cz^2), \\ e_3(z) &= \alpha(5 - e_2(z)). \end{aligned}$$

Матрица $P(z)$ аналитична в комплексной плоскости, за исключением точек разреза $[0, 1]$, а также простых мнимых полюсов $\pm i\eta_1$, $\eta_1 = \sqrt{-1/(3\gamma) - 1/3}$, являющихся нулями $s(z)$. При $\gamma \rightarrow 0$ (когда ЭС-уравнение переходит в БГК-уравнение) полюсы $\pm i\eta_1$ исчезают, удаляясь в бесконечность вдоль мнимой оси.

Для приведения к диагональному виду матрицы $P(z)$ достаточно привести к диагональному виду матрицу $E_1(z)$. Рассматривая задачу на собственные значения для матрицы $E_1(z)$, построим диагонализующую матрицу S

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -4\alpha & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Из определения матрицы S вытекает, что $S^{-1}E_1(z)S = \text{diag} \{0, e_2(z), 3\}$. Будем искать решение задачи (3.1) в виде $X(z) = SX_0(z)S^{-1}$, где $X_0(z) = \text{diag} \{U(z), V(z), W(z)\}$ — неизвестная матрица. Учитывая проведенную диагонализацию, получаем матричную краевую задачу

$$\Omega^+(\mu)X_0^+(\mu) = \Omega^-(\mu)X_0^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \quad (3.2)$$

где $\Omega(z) = S^{-1}P(z)S = \text{diag} \{\lambda_0(z), \omega(z)/(3cz^2), \omega_1(z)/s(z)\}$.

Матричная краевая задача (3.2) эквивалентна теперь трем скалярным краевым задачам:

$$\begin{aligned} U^+(\mu) &= [\lambda_0^-(\mu)/\lambda_0^+(\mu)]U^-(\mu), & 0 < \mu < 1, \\ V^+(\mu) &= [\omega^-(\mu)/\omega^+(\mu)]V^-(\mu), & 0 < \mu < 1, \\ W^+(\mu) &= [\omega_1^-(\mu)/\omega_1^+(\mu)]W^-(\mu), & 0 < \mu < 1. \end{aligned}$$

Первые две задачи уже были решены в [9], третья задача решается аналогично первой. Приведем решения сразу всех задач:

$$\begin{aligned} U(z) &= z \exp(-u(z)), & V(z) &= z \exp(-v(z)), & W(z) &= z \exp(-w(z)), \\ u(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\zeta_0(u) du}{u-z}, & v(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\zeta(u) du}{u-z}, & w(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\zeta_1(u) du}{u-z}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta_0(u) &= -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left[\frac{2\lambda_0(u)}{\pi u} \right], & \zeta(u) &= -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left[\frac{2\omega(u)}{3\pi u^3} \right], \\ \zeta_1(u) &= -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left[\frac{2}{\pi u} \left(\lambda_0(u) - \frac{1}{s(u)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $X(z)$ построена и в явном виде определяется равенством

$$X(z) = \begin{bmatrix} U + 2W & 2\alpha(U - 6V + 5W) & -2U + 2W \\ 0 & 2V & 0 \\ -U + W & \alpha(-2U - 3V + 5W) & 2U + W \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $X(z) = zE + X^{(0)} + o(1)$, $z \rightarrow \infty$, где

$$X^{(0)} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} U_1 + 2W_1 & 2\alpha(U_1 - 6V_1 + W_1) & 2(-U_1 + W_1) \\ 0 & V_1 & 0 \\ -U_1 + W_1 & \alpha(-2U_1 - 3V_1 + 5W_1) & 2U_1 + W_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$U_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta_0(u) du = 0,710\,446, \quad V_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta(u) du = 0,997\,747,$$

$$W_1 = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \zeta_1(u) du.$$

Напомним, что W_1 зависит от параметра γ , т. е. от числа Прандтля. При числе Прандтля $\text{Pr} = 2/3$ $W_1 = 0,812\,276$. При $\gamma \rightarrow 0$ $W_1 \rightarrow U_1$, ибо $\zeta_1(u) \rightarrow \zeta_0(u)$.

4. Разложение по собственным векторам. Будем искать решение задачи (1.4), (1.5) в виде разложения по собственным векторам характеристического уравнения

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + A_0 h_0(x, \mu) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) A(\eta) d\eta. \quad (4.1)$$

Здесь A_0 — неизвестная постоянная; $A(\eta)$ — неизвестная вектор-функция с элементами $A_j(\eta)$, $j = 1, 2, 3$; неизвестными также являются величины $\varepsilon_t, \varepsilon_n$, входящие в $h_{as}(x, \mu)$.

Используя граничные условия (1.5), сведем разложение (4.1) к векторному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$h_{as}(0, \mu) + A_0 h_0(0, \mu) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta D(\mu, \eta)}{\eta - \mu} A(\eta) d\eta + \Lambda(\eta) A(\eta) = \mathbf{0}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$N(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta D(z, \eta) A(\eta) \frac{d\eta}{\eta - z} \quad (4.2)$$

и сведем сингулярное уравнение к неоднородной векторной краевой задаче

$$P^+(\mu)[N^+(\mu) + h_{as}(0, \mu) + A_0 h_0(0, \mu)] = P^-(\mu)[N^-(\mu) + h_{as}(0, \mu) + A_0 h_0(0, \mu)], \quad 0 < \mu < 1.$$

С помощью соответствующей однородной задачи (3.1) сведем неоднородную задачу к задаче определения аналитической вектор-функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$\begin{aligned} [X^+(\mu)]^{-1}[N^+(\mu) + h_{as}(0, \mu) + A_0 h_0(0, \mu)] = \\ = [X^-(\mu)]^{-1}[N^-(\mu) + h_{as}(0, \mu) + A_0 h_0(0, \mu)], \quad 0 < \mu < 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Учитывая особенности матриц и векторов, входящих в уравнение (4.3), получим его общее решение

$$N(z) = -h_{as}(0, z) - A_0 h_0(0, z) + X(z)[C + (z - \eta_0)^{-1}B], \quad (4.4)$$

где C, B — неизвестные векторы с постоянными элементами c_j, b_j , $j = 1, 2, 3$.

Устраним полюс у решения (4.4) в точке η_0 условием

$$X(\eta_0)B + (1/2)A_0\eta_0 \operatorname{col} \{4\alpha, -1, \alpha\} = \mathbf{0},$$

откуда

$$B = -\frac{1}{2}A_0\eta_0 X^{-1}(\eta_0) \operatorname{col} \{4\alpha, -1, \alpha\} = -\frac{A_0\eta_0}{2V(\eta_0)} \operatorname{col} \{4\alpha, -1, \alpha\}.$$

Вспомогательная вектор-функция (4.2) и общее решение (4.4) имеют полюс в точке $z = \infty$. Выделим главные части разложений этих функций в окрестности точки $z = \infty$. Представим (4.2) в виде

$$N(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\eta D_0(\eta z)}{\eta - z} A(\eta) d\eta - \frac{1}{2} \gamma \left(z^2 - \frac{1}{3} \right) \int_0^1 \frac{\eta D_1(\eta)}{\eta - z} A(\eta) d\eta.$$

Нетрудно проверить, что $D_1(\eta)A(\eta) = a(\eta) \operatorname{col} \{2, 0, 1\}$, где $a(\eta) = a_1(\eta) + 5\alpha d(\eta)a_2(\eta) + a_3(\eta)$. Следовательно, функция (4.2) имеет разложение

$$N(z) = zN^{(1)} + N^{(0)} + o(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Здесь

$$N^{(1)} = J^{(1)} \operatorname{col} \{2, 0, 2\}, \quad N^{(0)} = J^{(2)} \operatorname{col} \{0, 1, 0\} - J_2^{(2)} \operatorname{col} \{0, 1, 0\},$$

где

$$J^{(j)} = \frac{1}{2} \gamma \int_0^1 \eta^j a(\eta) d\eta, \quad j = 1, 2; \quad J_2^{(2)} = \frac{3c}{2} \int_0^1 \eta^2 a_2(\eta) d\eta.$$

Теперь разложим правую часть (4.4):

$$N(z) = -h_{as}(0, z) - A_0 h_0(0, z) + zC + B + X^{(0)}C + o(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Сравнивая разложения (4.5) и (4.6), получаем две системы уравнений

$$c_1 = 2c_3 + \frac{5}{2}k_t, \quad c_2 = 2U - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}k_t, \quad c_3 = J^{(1)} - k_t \quad (4.7)$$

и

$$2J^{(2)} = -\varepsilon_n - \frac{1}{2}\varepsilon_t + b_1 - \frac{1}{3}U_1(c_1 + 2\alpha c_2 - 2c_3) + 4\alpha c_2 V_1 - \frac{2}{3}W_1(c_1 + 5\alpha c_2 + c_3),$$

$$-J_2^{(2)} = -\frac{1}{2}A_0 + b_2 - c_2 V_1, \quad (4.8)$$

$$J^{(2)} = -\varepsilon_t + b_3 + \frac{1}{3}U_1(c_1 + 2\alpha c_2 - 2c_3) + \alpha c_2 V_1 - \frac{1}{3}W_1(c_1 + 5\alpha c_2 + c_3).$$

Из систем уравнений (4.7) и (4.8) находятся все неизвестные коэффициенты решения (4.4) и разложения (4.1). Неизвестная вектор-функция $A(\eta)$ находится из формулы Сохоцкого, примененной к вектор-функции (4.2), после подстановки в нее решения (4.4):

$$i\pi\eta D(\eta, \eta)A(\eta) = [X^+(\eta) - X^-(\eta)][C + (\eta - \eta_0)^{-1}B]. \quad (4.9)$$

Таким образом, все неизвестные из разложения (4.1) найдены.

5. Скачки температуры и концентрации. Найдем в явном виде все параметры решения (4.4) и разложения (4.1). С учетом того, что

$$c_1 + c_3 = 3J^{(1)} - k_t/2, \quad c_1 - 2c_3 = 5k_t/2,$$

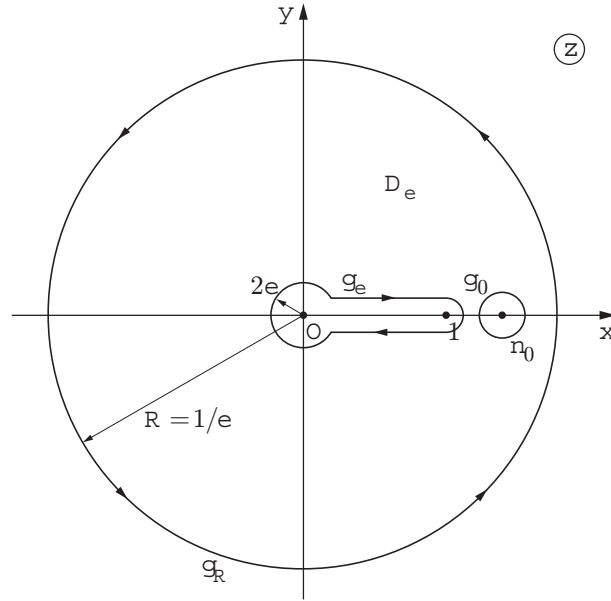


Рис. 1

$$b_1 + 5\alpha b_2 + b_3 = 0, \quad b_1 + 2\alpha b_2 - 2b_3 = 0,$$

равенство (4.9) представим в виде трех скалярных

$$i\pi\eta[a_1(\eta) + 4\alpha a_2(\eta) - 2p(\eta)a(\eta)] = \left(\frac{5}{6}k_t + \frac{2}{3}\alpha c_2\right)[U^+(\eta) - U^-(\eta)] + \\ + 2\left(J^{(1)} - \frac{1}{6}k_t + \frac{5}{3}\alpha c_2\right)[W^+(\eta) - W^-(\eta)] - 4\alpha\left(c_2 + \frac{b_2}{\eta - \eta_0}\right); \quad (5.1)$$

$$3i\pi\eta c\eta^3 a_2(\eta) = \left(c_2 + \frac{b_2}{\eta - \eta_0}\right)[V^+(\eta) - V^-(\eta)], \quad p(\eta) = \gamma\left(\eta^2 - \frac{1}{3}\right); \quad (5.2)$$

$$i\pi\eta[\alpha a_2(\eta) + a_3(\eta) - p(\eta)a(\eta)] = -\left(\frac{5}{6}k_t + \frac{2}{3}\alpha c_2\right)[U^+(\eta) - U^-(\eta)] + \\ + \left(J^{(1)} - \frac{1}{6}k_t + \frac{5}{3}\alpha c_2\right)[W^+(\eta) - W^-(\eta)] - \alpha\left(c_2 + \frac{b_2}{\eta - \eta_0}\right)[V^+(\eta) - V^-(\eta)]. \quad (5.3)$$

Согласно (5.2) находим

$$J_2^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [V^+(\eta) - V^-(\eta)] \left(c_2 + \frac{b_2}{\eta - \eta_0}\right) \frac{d\eta}{\eta}.$$

Для вычисления этого интеграла образуем функцию

$$F(z) = [V(z) - z + V_1] \left(\frac{c_2}{z} + \frac{b_2}{z(z - \eta_0)}\right).$$

Возьмем трехсвязную область D_ϵ (рис. 1), ограниченную сложным контуром, состоящим из окружности γ_R достаточно большого радиуса $R = 1/\epsilon$, $\epsilon > 0$, окружности γ_0 радиуса ϵ с центром в точке η_0 и проходимого по часовой стрелке контура γ_ϵ , отстоящего от разреза $[0, 1]$ на расстоянии ϵ и переходящего в окружность радиуса 2ϵ с центром в начале координат. По теореме Коши для многосвязных областей

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} F(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\epsilon} F(z) dz.$$

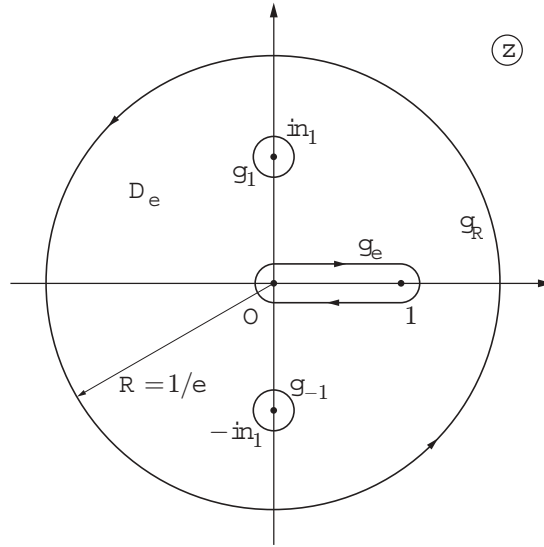


Рис. 2

Перейдем к пределу в этом равенстве при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу асимптотики $V(z) = z - V_1 + o(1), z \rightarrow \infty$, интеграл по окружности γ_R исчезает. В результате приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [F^+(\eta) - F^-(\eta)] d\eta &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [V^+(\eta) - V^-(\eta)] \left(\frac{c_2}{\eta} + \frac{b_2}{\eta(\eta - \eta_0)} \right) d\eta \equiv \\ &\equiv J_2^{(2)} = \operatorname{Res}_{\eta_0} F(z) + \operatorname{Res}_0 F(z). \end{aligned}$$

Вычисляя эти вычеты, получаем

$$J_2^{(2)} = V(0)(c_2 - b_2/\eta_0) + V_1 c_2 + V(\eta_0) b_2/\eta_0 - b_2.$$

Сравнивая это равенство со вторым в (4.8), имеем: $b_2 = \eta_0 c_2, A_0 = 2V(\eta_0)c_2$. Следовательно, вектор B окончательно построен:

$$B = -\eta_0 c_2 \operatorname{col} \{4\alpha, -1, \alpha\}.$$

Сложим уравнение (5.1) с уравнением (5.3) и с уравнением (5.2), умноженным на 5α . В результате получаем

$$i\pi\eta\gamma s(\eta)a(\eta) = (3J^{(1)} - k_t/2 + 5\alpha c_2)[W^+(\eta) - W^-(\eta)].$$

Следовательно,

$$J^{(j)} = \left(3J^{(1)} - \frac{1}{2}k_t + 5\alpha c_2 \right) J_j, \quad J_j = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [W^+(u) - W^-(u)] \frac{u^{j-1} du}{s(u)}, \quad j = 1, 2. \quad (5.4)$$

Для вычисления интегралов J_j образуем функции

$$F_j(z) = \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} z^{j-1}, \quad j = 1, 2,$$

которые аналитичны в четырехсвязной области D_ε (рис. 2), ограниченной сложным контуром. Этот контур состоит из окружности γ_R достаточно большого радиуса $R = 1/\varepsilon$,

$\varepsilon > 0$, двух окружностей $\gamma_1: |z - i\eta_1| = \varepsilon$ и $\gamma_{-1}: |z + i\eta_1| = \varepsilon$ и контура γ_ε , охватывающего разрез $[0, 1]$ по часовой стрелке и отстоящего от него на расстоянии ε . По теореме Коши для многосвязных областей

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} F_j(z) dz = \operatorname{Res}_{i\eta_1} F_j(z) + \operatorname{Res}_{-i\eta_1} F_j(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} F_j(z) dz.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу асимптотики $F_j(z) = o(z^{j-3})$, $j = 1, 2$, получаем, что интеграл в левой части предыдущего равенства исчезает. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [F_j^+(\eta) - F_j^-(\eta)] d\eta \equiv J_j = \operatorname{Res}_{i\eta_1} F_j(z) + \operatorname{Res}_{-i\eta_1} F_j(z).$$

Следовательно,

$$J_1 = \operatorname{Res}_{i\eta_1} \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} + \operatorname{Res}_{-i\eta_1} \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} = -\frac{1}{6i\eta_1} [W(i\eta_1) - W(-i\eta_1) - 2i\eta_1],$$

$$J_2 = \operatorname{Res}_{i\eta_1} \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} z + \operatorname{Res}_{-i\eta_1} \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} z = -\frac{1}{6} [W(i\eta_1) + W(-i\eta_1) + 2W_1].$$

Теперь из уравнений (5.4) находим

$$J^{(1)} = \frac{J_1}{1 - 3J_1} \left(5\alpha c_2 - \frac{k_t}{2} \right), \quad J^{(2)} = \frac{J_2}{1 - 3J_1} \left(5\alpha c_2 - \frac{k_t}{2} \right).$$

Этими равенствами заканчивается нахождение всех параметров решения (4.4). Из первого и третьего уравнений (4.8) выведем формулы для

$$\varepsilon_t = \alpha c_2 \left[V_1 - \eta_0 + \frac{2}{3} U_1 - \frac{5}{3} W_1 - 5 \frac{J_2 + J_1 W_1}{1 - 3J_1} \right] + k_t \left[\frac{5}{6} U_1 + \frac{W_1 + 3J_2}{6(1 - 3J_1)} \right], \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_n = 3\varepsilon_t/2 + 2\alpha c_2 (V_1 - \eta_0 - U_1) - 5k_t U_1/2.$$

Граничная задача (1.4), (1.5) полностью решена.

6. Численные расчеты и обсуждение результатов. Представим формулы (5.5) в стандартном виде: $\varepsilon_t = T_t k_t + T_u(2U)$, $\varepsilon_n = N_t k_t + N_u(2U)$. Коэффициенты скачков температуры и концентрации вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T_t &= (3\eta_0 - 3V_1 + 18U_1 + 10W_1 - W_1')/24, \\ T_u &= \alpha[-3\eta_0 + 3V_1 + 2U_1 - 10W_1 + 5W_1']/3, \\ N_t &= [7\eta_0 - 7V_1 - 18U_1 + 10W_1 - W_1']/16, \\ N_u &= \alpha[-7\eta_0 + 7V_1 - 2U_1 - 10W_1 + W_1']/2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь

$$W_1' = -i\eta_1 \frac{W(i\eta_1) + W(-i\eta_1)}{W(i\eta_1) - W(-i\eta_1)},$$

причем $W_1' \rightarrow W_1$ при $\gamma \rightarrow 0$. Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ (когда ЭС-уравнение переходит в БГК-уравнение) формулы (5.5) переходят в соответствующие формулы, выведенные на основе БГК-уравнения:

$$\varepsilon_t = k_t(\eta_0 - V_1 + 9U_1)/8 + (2U)\alpha(-\eta_0 + V_1 - U_1),$$

$$\varepsilon_n = k_t(7\eta_0 - 7V_1 - 9U_1)/16 + (2U)7\alpha(-\eta_0 + V_1 - U_1)/2.$$

Отметим, что число Прандтля несколько отличается от значения $2/3$. Для модели молекул-твердых сфер $Pr = 0,660\,72$ [14], при этом $\gamma_0 = -0,483\,427$. Численные расчеты по приведенным формулам, выполненные при значении γ_0 , отвечающем данному числу Прандтля, приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} T_t(\gamma_0) &= 0,826\,285, & T_u(\gamma_0) &= -1,093\,08, \\ N_t(\gamma_0) &= -0,358\,51, & N_u(\gamma_0) &= -0,937\,60. \end{aligned}$$

В работе [9] для БГК-модели с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (т. е. с постоянной длиной свободного пробега молекул), получены следующие результаты: $T_t = 0,799\,54$, $T_u = -1,023\,9$, $N_t = -0,398\,63$, $N_u = -0,829\,05$.

Перейдем к размерным величинам. Отметим, что в задаче о скачке температуры принято использовать определение длины свободного пробега молекул через коэффициент теплопроводности (температуропроводности) [15]. Будем использовать определение длины свободного пробега, совпадающее с соответствующим определением согласно [4] при $Pr = 2/3$:

$$l = \frac{2\chi}{3} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}},$$

где χ — коэффициент температуропроводности.

Тогда выражение для скачка температуры запишется в виде

$$\varepsilon = C_t l \left(\frac{dT}{dx} \right)_\infty.$$

При этом полученный в данной работе коэффициент скачка температуры имеет величину $C_t = 2,065\,71$. Напомним, что ЭС-уравнение с постоянной частотой столкновений [7] дает $C_t = 2,205\,76$.

Приведем для сравнения результат, полученный численно с использованием полного уравнения Больцмана [15] для модели молекулы-твердой сферы: $C_t = 2,1113$, а также результат работы [16] — $C_t = 2,207\,11$, в которой использовалась 13-моментная кинетическая модель с постоянной частотой столкновений молекул. В [3] с использованием метода дискретных координат проведено численное исследование модели молекулы-твердые сферы с переменной частотой столкновений, при этом была получена следующая величина: $C_t = 2,0421$. Отметим, что результаты, приведенные в указанных работах, пересчитаны с учетом принятого в данной работе определения длины свободного пробега молекул газа.

Заключение. Остановимся на отличительных особенностях изложенного аналитического решения. Декомпозиция функции распределения сводит задачу Смолуховского к типичному векторному уравнению переноса с матричным 3×3 ядром. Точные решения уравнений с такими ядрами отсутствуют. Исключение составляет работа [9], в которой рассматривалась эта же задача для БГК-уравнения. Одним из центральных моментов, обеспечивающих аналитическое решение, является диагонализация матричной векторной краевой задачи Римана — Гильберта, к которой сводится исходная граничная задача. Матричный коэффициент задачи Римана — Гильберта имеет особенности — простые полюсы на мнимой оси. Когда ЭС-уравнение переходит в БГК-уравнение ($\gamma \rightarrow 0$), эти полюсы пропадают — удаляются в бесконечность по мнимой оси. Впервые для аналитических методов в условиях разрешимости для общего решения задачи Римана — Гильберта пришлось использовать значения фактор-матрицы не только в точках дискретного спектра, но и в упомянутых полюсах.

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы при анализе поведения аэрозольных частиц в неоднородно нагретых газах, а также при решении самых

разнообразных проблем кинетической теории газа и плазмы, в теории переноса нейтронов, электронов, в теоретической астрофизике и других областях.

Авторы выражают благодарность А. В. Бобылеву, который свыше десяти лет назад призвал нас не ограничиваться развитым аналитическим методом для БГК-уравнения и обратил наше внимание на важность разработки аналитических методов для кинетических уравнений высшего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черняк В. Г., Фомягин Г. А.** Сила сопротивления и тепловая поляризация сферической частицы в потоке разреженного газа // Теплофизика высоких температур. 1989. Т. 27, № 5. С. 951–961.
2. **Beresnev S., Chernyak V.** Thermophoresis of a spherical particle in a rarefied gas: Numerical analysis based on the model kinetic equations // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 7. P. 1743–1756.
3. **Varichello L. B., Bartz A. C. R., Camargo M., Siewert C. E.** The temperature jump problems for a variable collision frequency model // Phys. Fluids. 2002. V. 14, N 1. P. 383–391.
4. **Черчиньяни К.** О методах решения уравнения Больцмана // Неравновесные явления. Уравнение Больцмана. М.: Мир, 1986.
5. **Латышев А. В.** Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, вып. 4. С. 581–586.
6. **Латышев А. В.** Аналитическое решение уравнения Больцмана с оператором столкновений смешанного типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 3. С. 436–447.
7. **Латышев А. В.** Аналитическое решение эллипсоидально статистического уравнения Больцмана // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 2. С. 151–164.
8. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Задача Крамерса для эллипсоидально статистического уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 4. С. 483–493.
9. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Граничные задачи для модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 3. С. 140–153.
10. **Владимиров В. С., Жаринов В. В.** Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001.
11. **Кейз К., Цвайфель П.** Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
12. **Гермогенова Т. А.** О полноте системы собственных функций характеристического уравнения переноса. М., 1976. (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР; № 103).
13. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
14. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
15. **Loyalka S. K.** Kinetic theory of planar condensation and evaporation // Transp. Theory Statist. Phys. 1991. V. 20, N 2/3. P. 237–249.
16. **Soga T.** A kinetic analysis of thermal force on a spherical particle of high thermal conductivity in a monoatomic gas // Phys. Fluids. 1986. V. 29, N 4. P. 976–985.

*Поступила в редакцию 11/VIII 2003 г.,
в окончательном варианте — 27/XI 2003 г.*