ПМТФ, № 4, 1966

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Н. Х. Ибрагимов

(Новосибирск)

Работа посвящена отысканию всех инвариантных решений системы уравнений двумерной газовой динамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,\rho) + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,p) + A\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \quad \left(A = A(p, \rho) \equiv -\rho\,\frac{\partial S / \partial \rho}{\partial S / \partial p}\right) \qquad (1)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, а $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$ — вектор скорости с компонентами u, v; считается, что $\partial S / \partial p \neq 0$. Будем рассматривать два случая.

Случай А, когда $A(p, \rho)$ — произвольная функция.

Случай Б, когда $A = \gamma p$ — политропический газ с показателем политропы $\gamma = \mathrm{const}$.

Основная группа преобразований, допускаемая системой (1), вычислена в работе [1], и для случая А базис соответствующей алгебры Ли состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2)$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_7 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$$

а в случае Б к ним добавляются операторы

$$X_8 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} + 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad X_9 = \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + p\frac{\partial}{\partial p} \qquad (3)$$

При $\gamma = 2$ происходит дальнейшее расширение группы: к (2) и (3) добавляется оператор

$$X_{10} = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u} + (y - tv)\frac{\partial}{\partial v} - 4tp\frac{\partial}{\partial p} - 2t\rho\frac{\partial}{\partial \rho} \qquad (4)$$

В случае А основную группу обозначим буквой G_7, а в случае B — буквой G_9 для произвольного γ и G_{10} при $\gamma = 2$.

Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы G_9 дается в табл. 1.

Таблица 1

1	$X_1 + \delta X_9 \quad (\delta = 0, 1)$	8	$X_2 + X_8 + \delta X_9$
2	$X_2 + \delta X_9 \quad (\delta = 0, 1)$	9	$X_4 + X_6 + \delta X_9$
3	$X_1 + X_4 + \delta X_9 \ (\delta = 0, 1)$	10	$\alpha X_6 + \beta X_7 + X_8 + \delta X_9$
4	$X_2 + X_5 + \delta X_9 \ (\delta = 0, 1)$	11	$X_1 - X_6 + \alpha X_7 + X_8 + \delta X_9$
5	$X_6 + \alpha X_7 + \delta X_9$	12	X_9
6	$X_7 + \delta X_9$	13	$X_5 + \delta X_9 \quad (\delta = 0, 1)$
7	$X_1 + X_7 + \delta X_9$		

Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы G_7 состоит из операторов 1—7 табл. 1 при $\delta = 0$ и оператора $X_4 + \alpha X_6$, а группы G_{10} — из операторов 1—12 табл. 1 и операторов

$$14.\ X_1 + X_2 + X_7 + \delta X_9 + X_{10} \tag{5}$$

$$15.\ X_1 + \alpha X_6 + \beta X_7 + \delta X_9 + X_{10}$$

В последнем операторе параметры α и β удовлетворяют условию $0 \leqslant \alpha < 2$, и $\beta \geqslant 0$ при $\alpha = 0$.

Оптимальная система двухпараметрических подгрупп группы G_7 дается табл. 2, группы G_9 — табл. 4, группы G_{10} — подгруппами 1—40 табл. 4 и 3.

Таблица 2

1	$X_1,\quad X_2$	6	$\alpha X_4 + X_6$	10	$X_1 + X_4 + \alpha X_5$
2	X_6	7	X_7, X_6	11	$\alpha X_4 + \beta X_5 + X_6$
3	$\alpha X_6 + X_7$	8	X_2, X_3	12	X_4
4	$X_5,\quad X_4$	9	$X_3 + X_4$	13	$X_1 + X_5$
5	$X_2 + \alpha X_3$			14	$X_2 + X_5,\ \alpha X_2 + \beta X_3 + X_4$

Таблица 3

1	$X_9,$	$X_1 + X_2 + X_7 + X_{10}$	
2		$X_1 + \alpha X_6 + \beta X_7 + X_{10}$	$(0 \leqslant \alpha < 2)$
3	$X_2 + X_5,$	$X_1 + \alpha X_6 - X_7 - \alpha X_8 + \beta X_9 + X_{10}$	$(\alpha \neq 0)$
4		$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 + \delta X_9 + X_{10} - X_7$	
5	$X_2 + X_5 + X_9,$	$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 - X_7 + X_{10}$	
6	$X_7 + \delta X_9,$	$X_1 + \alpha X_6 + \beta X_9 + X_{10}$	$(0 \leqslant \alpha < 2)$
7	$X_6 + \varepsilon X_7 - X_8 + \delta X_9,$	$X_1 + \alpha X_6 + \beta X_7 + \varkappa X_9 + X_{10}$	$(0 \leqslant \alpha < 2)$

Таблица 4

1	$X_1 + X_9,\ \alpha X_1 + X_7$	26	$X_7 + \alpha X_8 + \beta X_9$
2	$\alpha X_1 + X_6 + \beta X_7 - X_8$	27	$X_6 + \alpha X_7 + \beta X_8 + \delta X_9$
3	$X_2 + X_9,\ X_3 + X_4$	28	X_9
4	$X_1 + \alpha X_4 + \beta X_5$		$X_2,\ X_1 + \alpha X_4 + \beta X_5 + \delta X_9$
5	$\alpha X_2 + \beta X_4 + X_5\ (\alpha = 0,\ 1)$	29	$(\alpha = 0,\ 1)$
6	$\alpha X_2 + \beta X_3 + X_8$	30	$(\delta = 0,\ 1)$
7	$X_2 + X_5,\ \alpha X_2 + X_4 + \beta X_3 + \delta X_9$	31	$\alpha X_4 + X_5 + \beta X_9\ (\beta = 0,\ 1)$
	$(\delta = 0,\ 1)$		$X_3 + X_4 + \alpha X_9\quad (\alpha = 0,\ 1)$
8	$X_6 + \beta X_9$	32	$X_3 + \alpha X_9\quad (\alpha = 0,\ 1)$
9	$X_7 + \alpha X_9,\quad \beta X_6 + X_8 + \delta X_9$	33	$X_4 + \alpha X_9\quad (\alpha = 0,\ 1)$
10	$X_1 + X_4,\ -2X_6 + X_8 + \alpha X_9$	34	$X_4 + \alpha X_5 + X_6 + \beta X_9$
11	$X_2 + X_5,\ -X_6 + X_8 + \alpha X_9$	35	$X_5 + X_6 + \alpha X_9$
12	$X_7 + dX_9,\ X_1 - X_6 + X_8 + \beta X_9$	36	$X_6 + \alpha X_9$
13	$X_1 + X_7 + \alpha X_9,\ \beta X_1 - X_6 +$	37	$X_3 + X_8 + \alpha X_9$
	$+ X_8 + \delta X_9$	38	$\alpha X_6 + X_8 + \beta X_9$
14	$X_6 + \alpha X_7 + \beta X_9,\ \delta X_7 + X_8 + \varepsilon X_9$	39	$X_1 - X_6 + X_8 + \alpha X_9$
15	$X_9,\quad X_1 + X_4$	40	X_9
16	$X_2 + X_5$	41	$X_5,\ X_3 + X_9$
17	$X_6 + \alpha X_7$	42	$X_2 + \alpha\beta X_3 + X_4 + \beta X_9\ (\beta = 0,\ 1)$
18	X_7	43	$X_3 + X_4 + X_9$
19	$X_1 + X_7$	44	$X_4 + \alpha X_9\quad (\alpha = 0,\ 1)$
20	$X_2 + X_8$	45	$X_3 + X_8 + \alpha X_9$
21	$X_4 + X_6$	46	$\alpha X_4 + X_6 + \beta X_9\ (\alpha = 0,\ 1)$
22	$\alpha X_6 + \beta X_7 + X_8$	47	$X_2 + \alpha X_3 + X_8 + \beta X_9$
23	$X_1 - X_6 + \alpha X_7 + X_8$	48	$\alpha X_6 + X_8 + \beta X_9$
24	$X_1,\quad X_8 + \alpha X_9$	49	X_9
25	$X_2 + X_8 + \alpha X_9$	50	$X_5 + X_9,\ \alpha X_4 + \beta X_5 + X_6$

Выпишем вид инвариантных решений ранга единица. Они получаются на двухпараметрических подгруппах. Величины U, V, P, R будут зависеть от одного аргумента λ, выражения которого через t, x, y различны для разных подгрупп и будут указаны ниже. Для подгрупп, у которых одним из образующих является оператор X_9, не выполнено необходимое условие существования инвариантного решения; кроме того, слагаемое X_9 во всех подгруппах влияет только на вид p и ρ, причем это влияние легко учесть; поэтому оператор X_9 исключим из рассмотрения. Не будут рассматриваться также те подгруппы, в которые в качестве одного из образующих входят операторы X_1, X_2, X_3, X_4 X_5, так как они дают стационарный и одномерный случаи. Например, для $H = \langle X_5 \rangle$ инвариантное решение имеет вид

$$u = U(t, x), \quad v = \frac{y}{t} + V(t, x), \quad p = \frac{1}{t} P(t, x), \quad \rho = \frac{1}{t} R(t, x)$$

При этом система (1) / H будет такой:

$$V_t + UV_x + t^{-1}V = 0, \quad U_t + UU_x + R^{-1}P_x = 0$$
$$R_t + UR_x + RU_x = 0, \quad P_t + UP_x + A'U_x = 0$$
$$\left(A' = -R\,\frac{\partial S/\partial R}{\partial S/\partial R}\right)$$

Относительно величин U, P, R имеем систему уравнений одномерного движения газа, а V находится из уравнения

$$V_t + UV_x + t^{-1}V = 0$$

с известной функцией $U(t, x)$, так что дело сводится к решению уравнений одномерного движения газа.

На подгруппах табл. 2 получим инвариантные решения вида

$$7.\ u_r = U, \quad u_\varphi = V, \quad p = P, \quad \rho = R, \quad \lambda = r/t$$

Здесь r, φ — полярные координаты в плоскости x, y, а u_r, u_φ — проекции скорости на оси полярных координат.

$$14.\ u = \frac{tx - y}{t^2 + \alpha t - \beta} + U, \quad v = \frac{(\alpha + t)y - \beta x}{t^2 + \alpha t - \beta} + V, \quad p = P, \quad \rho = R, \quad \lambda = t$$

Из табл. 4 надо рассмотреть только подгруппы 9—14

9. $u_r = r^{-1/\beta} U$, $u_\varphi = r^{-1/\beta} V$, $p = P$, $\rho = r^{2/\beta} R$; $\lambda = tr^{-(\beta+1)/\beta}$ при $\beta \neq 0$

$u_r = t^{-1} U$, $u_\varphi = t^{-1} V$, $p = P$, $\rho = t^2 R$. $\lambda = r$ при $\beta = 0$

10. $u = t + \sqrt{y}\, U$, $v = \sqrt{y}\, V$, $p = P$, $\rho = y^{-1} R$; $\lambda = 1/2 \quad t^2 y^{-1} - xy^{-1}$

11. $u = (tx - y) U$, $v = x + (tx - y) V$, $p = P$, $\rho = (tx - y)^{-2} R$; $\lambda = t$

12. $u_r = rU$, $u_\varphi = rV$, $p = P$, $\rho = r^{-2} R$, $\lambda = re^t$

13. $u_r = rU$, $u_\varphi = rV$, $p = P$, $\rho = r^{-2} R$, $\lambda = t + \varphi + \beta \ln r$

14. $u_r = r^{\alpha/\delta} e^{\varphi/\delta} U$, $u_\varphi = r^{\alpha/\delta} e^{\varphi/\delta} V$, $p = P$, $\rho = t^2 r^{-2} R$

$$\lambda = r^{\alpha - \delta} t^\delta e^\varphi \quad \text{при } \delta^{-2} \neq 0$$

$u_r = rt^{-1} U$; $u_\varphi = rt^{-1} V$, $p = P$, $\rho = t^2 r^{-2} R$; $\lambda = \varphi + \alpha \ln r$ при $\delta = 0$

Для табл. 3 имеем

$$3.\ u = \frac{e^{\vartheta(t)}}{1 + t^2}(U - tV + \lambda t^2), \quad v = x + \frac{e^{\vartheta(t)}}{1 + t^2}[V + tU - \lambda t(t^2 + 2)]$$

$$p = \frac{P}{(1 + t^2)^2}, \quad \rho = \frac{e^{-2\theta(t)} R}{(1 + t^2)}, \quad \lambda = \frac{(tx - y)e^{-\theta(t)}}{1 + t^2}$$

$$4.\ u = \frac{U - tV + \lambda t^2 + {}^1/_2\beta t}{1 + t^2} - \frac{\beta\theta(t)}{2\alpha}, \quad \rho = \frac{R}{1 + t^2}, \quad p = \frac{P}{(1 + t^2)^2}$$

$$v = x + \frac{V + tU - \lambda t\,(t^2 + 2) + {}^1/_2\beta t^2}{1 + t^2} + \frac{t\beta\theta(t)}{2\alpha}, \quad \lambda = \frac{tx - y + {}^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta t}{1 + t^2} + \frac{\beta}{2\alpha}\theta(t)$$

$$\theta(t) = \alpha\ \mathrm{arc\ tg}$$

6. Чтобы не усложнять формулы, рассмотрим случай $\alpha = \beta = 0$

$$u_r = \frac{rt}{1 + t^2} + \frac{U}{r}, \quad u_\varphi = \frac{V}{r}, \quad p = \frac{P}{(1 + t^2)^2}, \quad \rho = \frac{R}{1 + t^2}, \quad \lambda = \frac{r}{\sqrt{1 + t^2}}$$

7. Здесь также будем считать $\alpha = \beta = 0$

$$u_r = \frac{rt}{1 + t^2} + \frac{rU}{1 + t^2}, \quad u_\varphi = \frac{rV}{1 + t^2}, \quad p = \frac{P}{(1 + t^2)^2},$$

$$\rho = \frac{R}{r^2}, \quad \lambda = \varphi + \delta \ln \frac{r}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Вид инвариантных решений ранга два выписывается также без затруднений.

В качестве примера рассмотрим инвариантное решение, соответствующее подгруппе $H = \langle X_7,\ X_1 + X_{10}\rangle$. Оно имеет вид

$$u_r = \frac{rt}{1 + t^2} + \frac{U}{r}, \quad u_\varphi = \frac{V}{r}, \quad \rho = \frac{R}{1 + t^2}, \quad p = \frac{P}{(1 + t^2)^2}, \quad \lambda = \frac{r}{\sqrt{1 + t^2}} \qquad (6)$$

В данном случае $\gamma = 2$, и уравнения газовой динамики можно интерпретировать как уравнения «мелкой воды». Без ограничения общности можно считать плотность воды и ускорение силы тяжести равными единице. Тогда $p = {}^1/_2\rho^2$, и ρ представляет высоту воды над поверхностью ровного дна. Будем рассматривать движение воды по сухому дну. Подставляя (6) в уравнения (1), записанные в полярных координатах, найдем одно из решений

$$U = 0, \quad V = 0, \quad R = {}^1/_2\,(a^2 - \lambda^2), \quad \lambda \leqslant a, \quad a = \mathrm{const}$$

Это дает решение такой задачи о растекании «бугра»: найти движение по сухой ровной плоскости массы воды при $t = 0$, имеющей форму $\rho = {}^1/_2\,(a^2 - r^2)$, $r \leqslant a$ и находящейся в покое. Решение имеет вид

$$u_r = \frac{rt}{1 + t^2}, \quad u_\varphi = 0, \quad \rho = \frac{1}{2\,(1 + t^2)}\left(a^2 - \frac{r^2}{1 + t^2}\right)$$

Граница «бугра» ($\rho = 0$) движется по закону $r = a\sqrt{1 + t^2}$, а высота его вершины ($r = 0$) убывает со временем по закону ${}^1/_2\,a^2/(1 + t^2)$. Скорость остается все время ограниченной $u_r < a$. Следует отметить, что в этом решении скорость есть линейная функция координат, поэтому оно содержится в классе решений, найденных раньше Л. В. Овсянниковым [2].

Автор благодарит Л. В. Овсянникова за полезные советы и внимание к этой работе.

Поступила 22 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений, Изд. СО АН СССР, 1962.
2. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АА СССР, 1956, т. 111, № 1, стр. 47.