ветвлении от кривой *4* с $Q = 1/2$. Ветвление нового режима произошло от точки $\alpha = 0{,}2602$ также с $Q = 1/2$. Отвечающая ему амплитуда первой гармоники дана на рис. 3 линией *III*.

Автор выражает благодарность Ю. Я. Трифонову за проведение некоторых расчетов и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 3.
2. **Krishna M. V. G., Lin S. P.** Nonlinear stability of a viscous film with respect to three dimensional sade-band disturbances // Phys. Fluids.— 1977.— V. 20, N 8.
3. **Chang H.-C., Chen L.-H.** Nonlinear waves on liquid film surfaces. 1. Flooding in a vertical tube // Chem. Engng Sci.— 1986.— V. 41, N 10.
4. **Hooper A. P., Grimshaw R.** Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids.— 1984.— V. 28.— P. 37—45.
5. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1977.
6. **Демехин Е. А.** Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.
7. **Chang H.-C., Chen L.-H.** Nonlinear waves on liquid film surfaces. 2. Bifurcation analyses // Chem. Engng Sci.— 1986.— V. 41, N 10.
8. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде.— Новосибирск, 1988.— (Препр./ИТ СО АН СССР; № 188—88).
9. **Трифонов Ю. Я.** Бифуркации стационарных режимов в диссипативных средах // V Всесоюз. школа молодых ученых и специалистов: современные проблемы теплофизики: Тез. докл.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1988.

г. Новосибирск *Поступила 5/VII 1988 г.*

УДК 532.59

А. А. Коробкин

ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ БАССЕЙНА С ВЕРТИКАЛЬНЫМ БАРЬЕРОМ

Впервые задача рассеяния монохроматической волны, падающей на погруженную вертикальную пластину, решена в [1]. Дальнейшие обобщения этой задачи содержатся в [2—5]. Нестационарная задача рассмотрена в [6], ее решение дает асимптотику течения при больших временах, но не позволяет проследить эволюцию процесса.

В настоящей работе решение нестационарной задачи выписывается в квадратурах, что позволяет детально исследовать ее свойства. Это достигается с помощью интеграла задачи [6] и метода аналитического продолжения.

1. Рассматривается плоская линейная начально-краевая задача

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \ \varphi_{tt} + \varphi_y = 0 \ (y = 0), \tag{1.1}$$
$$\varphi_x = 0 \text{ на } \Gamma, \ \varphi = 0, \ \varphi_t = -\delta(x - x_0) \ (t = 0, \ y = 0),$$

которая описывает движение жидкости, вызванное начальным возмущением свободной границы. В момент времени $t = 0$ поверхность жидкости имеет концентрированное возвышение площади, равной единице, в окрестности точки x_0, при $t > 0$ это возвышение распадается под действием сил тяжести. Правая декартова система координат сориентирована так, что барьер Γ лежит в плоскости $x = 0$, а направление оси y противоположно направлению ускорения свободного падения. Соотношения (1.1) записаны в безразмерных переменных, причем масштабы длины и скорости выбираются таким образом, что число Фруда задачи и глубина погружения барьера равны единице. Потенциал скоростей $\varphi(x, y, t, x_0)$ зависит от x_0 как от параметра, область течения $\Omega = \{x, y | y < 0, x \in R^1\} \setminus \Gamma$, $\Gamma = \{x, y | x = 0, y < -1\}$. Функция φ является фундаментальным решением задачи Коши — Пуассона в области Ω, так как с ее помощью решение общей задачи выписывается в квадратурах.

Требуется определить решение задачи (1.1), удовлетворяющее дополнительным условиям

$$(1.2)\qquad |\nabla\varphi| \leqslant C[x^2 + (y+1)^2]^{-1/4} \quad (x, y) \in \Omega,$$
$$|\nabla\varphi| \in L_2(\Omega),\ |\varphi_t(x, 0, t, x_0)| < +\infty \ (t > 0).$$

Решение φ можно представить в виде суммы четной и нечетной по переменной x составляющих. Четная составляющая φ_r отвечает начальным условиям $\varphi_r = 0$, $\varphi_{r_t} = -(\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0))/2$ $(t = 0,\ y = 0)$ и выписывается явно, так как для нее $\partial\varphi_r/\partial x = 0$ при $x = 0$, $y \leqslant 0$. Нечетная составляющая φ_n есть решение задачи (1.1), в которой начальные условия надо заменить следующими:

$$(1.3)\qquad \varphi_n = 0,\quad \varphi_{n_t} = -(\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0))/2 \quad (t = 0,\ y = 0).$$

При этом достаточно построить φ_n в области $x > 0$, $y < 0$, так как для $x = 0$ $\varphi_n = 0$ при $-1 < y < 0$ (потенциал непрерывен в области течения) и $\partial\varphi_n/\partial x = 0$ при $y < -1$. В дальнейшем $\varphi_r(x, y, t, x_0)$ считаем известной функцией, определить требуется только нечетную составляющую потенциала (индекс n там, где это не вызывает недоразумений, опускаем).

2. Обозначим выражение $\varphi_{tt} + \varphi_y$ $(x > 0,\ y < 0,\ t > 0)$ через $g(x, y, t, x_0)$. Действуя формально, несложно получить краевую задачу для определения этой новой функции. Из (1.1) имеем

$$(2.1)\qquad \Delta g = 0 \text{ в } \Omega,\quad g = 0\ (y = 0),\ g_x = 0 \text{ на } \Gamma,$$

дополнительные условия (1.2) дают

$$(2.2)\qquad |g| < C_1[x^2 + (y+1)^2]^{-1/4} \ (x \geqslant 0,\ y < 0).$$

Заметим, что t и x_0 входят в задачу (2.1), (2.2) как параметры. Пусть $g(x, y, t, x_0)$— известная функция, тогда потенциал φ находится как решение эволюционной задачи

$$(2.3)\qquad \varphi_{tt} + \varphi_y = g(x, y, t, x_0)\ (x \geqslant 0,\ y < 0,\ t > 0),$$
$$\varphi = 0,\ \varphi_t = \varphi_1(x, y, x_0) \quad (t = 0),$$

в которой x, x_0 играют роль параметров, а $\varphi_1(x, y, x_0)$— гармоническая при $x > 0$, $y < 0$ функция такая, что $\varphi_{1x} = 0$ при $x = 0$, $y < -1$, $\varphi_1 = 0$ при $x = 0$, $-1 < y < 0$ и $\varphi_1 = -(\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0))/2$ при $y = 0$, $x > 0$. Последнее условие вытекает из (1.3).

Функция $g(x, y, t, x_0)$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$, $y < 0$, поэтому $\varphi(x, y, t, x_0)$, определяемая из (2.3),— гармоническая при $x > 0$, $y < 0$ функция, удовлетворяющая условию непротекания на Γ. Действительно, дифференцируя равенства (2.3) по x и устремляя x к нулю $(y < -1)$, получим однородную задачу для уравнения теплопроводности относительно $\varphi_x(0, -y, t, x_0)$. В классе функций медленного роста такая задача имеет только тривиальное решение. Следуя методике [6], достаточно решить (2.3) только при $x = 0$. При $x > 0$ решение $\varphi(x, y, t, x_0)$ выражается через $\varphi(0, y, t, x_0) \equiv \theta(t, -y)$ в квадратурах.

Решение задачи (2.1) при дополнительном условии (2.2) строится с помощью теории аналитических функций и определяется с точностью до произвольного множителя $a(t, x_0)$:

$$g(x, y, t, x_0) = a(t, x_0)\ \operatorname{Im}\{1/\sqrt{z^2 + 1}\},\ z = x + iy,$$

при $x = +0$ $g(+0, y, t, x_0) = -a(t, x_0)/\sqrt{y^2 - 1}$ $(y < -1)$.

3. При $x = +0$ в новых переменных $\alpha = t$, $\tau = -y$ задача (2.3) принимает вид

$$(3.1)\qquad \theta_\tau - \theta_{\alpha\alpha} = a(\alpha, x_0)/\sqrt{\tau^2 - 1}\ (\tau > 1,\ \alpha > 0),$$
$$\theta = 0,\ \theta_\alpha = \varphi_1(0, -\tau, x_0) \quad (\tau > 1,\ \alpha = 0)$$

и соответствует одномерной задаче для неоднородного уравнения теплопроводности без начальных условий, причем на границе области $(\alpha = 0)$

задаются значение искомой функции ($\theta = 0$) и ее первая производная $\theta_\alpha(0, \tau)$. Требуется определить как функцию $\theta(\alpha, \tau)$, так и $a(\alpha, x_0)$ при дополнительном условии

$$|\theta(\alpha, \tau)| \leqslant C_2(\tau)\alpha^k \ (\alpha > 0, \ \tau > 1) \tag{3.2}$$

(k — положительная величина, не зависящая от τ). Условие (3.2) отвечает условию медленного роста $\varphi_t(0, y, t, x_0)$ при $t \to \infty$.

Функция $a(\alpha, x_0)$ описывает распределение вдоль стержня ($\alpha > 0$) источников тепла, их поведение при $\tau > 1$ известно. Например, стержень может содержать вкрапления примеси, частицы которой при определенных условиях «взрываются» с выделением тепла. При этом известно протекание «взрыва» одной частицы, однако распределение «взорвавшихся» частиц вдоль стержня не задано и должно быть найдено по известному потоку тепла $\theta_\alpha(0, \tau)$ через торец стержня.

Преобразование Лапласа по τ, примененное к (3.1), где $\theta(\alpha, \tau)$, правая часть уравнения и начальные условия продолжены нулем в область $\tau < 1$, $\alpha > 0$, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, общее решение которого есть

$$\theta^L(\alpha, p) = C_1(p, x_0)\, e^{\sqrt{p}\alpha} + C_2(p, x_0)\, e^{-\sqrt{p}\alpha} + \frac{K_0(p)}{2\sqrt{p}} \int\limits_0^\infty a(\alpha_0, x_0)\, e^{-\sqrt{p}|\alpha-\alpha_0|}\, d\alpha_0$$

$\left(\theta^L(\alpha, p) = \int\limits_0^\infty \theta(\alpha, \tau)\, e^{-\tau p}\, d\tau, \operatorname{Re} p \geqslant 0, \ K_0(p) \right.$— функция Макдональда нулевого порядка, $\left. K_0(p) = \int\limits_1^\infty e^{-\tau p}(\tau^2 - 1)^{-1/2}\, d\tau \right)$. Ограничение (3.2) дает $C_1 \equiv 0$ [7], а условия при $\alpha = 0$ ведут к равенствам

$$C_2(p, x_0) = -\,\theta_\alpha^L(0, p)/2\sqrt{p}, \qquad \int\limits_0^\infty a(\alpha_0, x_0)\, e^{-\sqrt{p}\alpha_0}\, d\alpha_0 = \theta_\alpha^L(0, p)/K_0(p), \tag{3.3}$$

второе из которых служит для определения функции $a(\alpha, x_0)$ ($K_0(p)$ не имеет корней при $-\pi < \arg p \leqslant \pi$ [8]). Если она найдена, то $\theta(\alpha, \tau)$ выписывается в квадратурах

$$\theta(\alpha, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty a(\alpha_0, x_0)\, k(\alpha - \alpha_0, \tau)\, d\alpha_0 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_1^\tau e^{-\frac{\alpha^2}{4(\tau-\tau_0)}} \frac{\varphi_1(0, -\tau_0, x_0)}{\sqrt{\tau - \tau_0}}\, d\tau_0, \tag{3.4}$$

$$k(\alpha, \tau) = \int\limits_1^\tau e^{-\frac{\alpha^2}{4(\tau-\tau_0)}} \frac{d\tau_0}{\sqrt{\tau - \tau_0}\sqrt{\tau_0^2 - 1}}.$$

В (3.3) обозначим правую часть через $F(p)$, $\operatorname{Re} p > 0$. Функция $F(p)$ допускает аналитическое продолжение в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси. Обозначим значения $F(p)$ на нижнем и верхнем берегах разреза как $F^-(\sigma)$ и $F^+(\sigma)$ ($p = \sigma e^{\pm i\pi}$) соответственно. Тогда для комплексной переменной $s = \sqrt{p}$ ($\sqrt{+1} = 1$) равенство (3.3) задает образ Лапласа от $a(\alpha, x_0)$ при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. Функция $F(s^2)$ аналитическая, не имеющая особых точек при

$\operatorname{Re} s > 0$, поэтому $a(\alpha, x_0)$ определяется интегралом Бромвича

$$a(\alpha, x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s\alpha} F(s^2)\, ds \quad (c > 0),$$

который при $c \to +0$, $s = i\mu$, $\mu \in R^1$ дает

$$a(\alpha, x_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} F^-(\mu^2) e^{i\mu\alpha}\, d\mu + \int\limits_{0}^{\infty} F^+(\mu^2) e^{i\mu\alpha}\, d\mu \right). \tag{3.5}$$

Формулы (3.4), (3.5) однозначно определяют решение задачи (3.1) при дополнительном условии (3.2). Для доказательства этого утверждения достаточно установить, что 1) $F(p)$ допускает аналитическое продолжение без особых точек на всю плоскость с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re} p < 0$, $\operatorname{Im} p = 0$; 2) $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$, $|\arg p| < \pi$; 3) интегралы $\int\limits_0^\infty F^\pm(\sigma)\sigma^{-1/2}\, d\sigma$ сходятся абсолютно.

4. Опуская громоздкие выкладки, приведем выражение

$$\theta_\alpha(0, \tau) = -\frac{x_0}{\pi} \sqrt{\frac{\tau^2 - 1}{x_0^2 + 1}} \frac{1}{\tau^2 + x_0^2},$$

образ Лапласа этой функции

$$\theta_\alpha^L(0, p) = -\frac{x_0}{\pi\sqrt{x_0^2+1}} \left[K_0(p) - (x_0^2 + 1) \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\tau p}\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}\,(\tau^2 + x_0^2)} \right].$$

Аналитическое продолжение функции Макдональда $K_0(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$ с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси дается формулой [8]

$$K_0(p) = K_0(-p) \pm \pi i I_0(-p) \quad (\operatorname{Re} p < 0,\ \operatorname{Im} p \lessgtr 0),$$

где $I_0(p)$ — модифицированная функция Бесселя, $I_0(-ip) = J_0(p)$, $I_0(-p) = I_0(p)$. На берегах разреза (верхний берег помечаем знаком плюс, нижний — минус)

$$K_0^+(x) = K_0(-x) - \pi i I_0(x), \quad K_0^-(x) = \overline{K_0^+(x)}, \quad x < 0. \tag{4.1}$$

Остается построить аналитическое продолжение в область $\operatorname{Re} p < 0$ интеграла

$$J(p) = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\tau p}\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}\,(\tau^2 + x_0^2)}, \tag{4.2}$$

после чего функция $F(p)$ будет определена на всей плоскости с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re} p < 0$, $\operatorname{Im} p = 0$. Используя

$$(\tau^2 + x_0^2)^{-1} = |x_0|^{-1} \int\limits_0^\infty e^{-|x_0|\eta} \cos \tau\eta\, d\eta,$$

перепишем (4.2):

$$J(p) = \frac{1}{2|x_0|} \int\limits_0^\infty e^{-|x_0|\eta} [K_0(p - i\eta) + K_0(p + i\eta)]\, d\eta = \frac{1}{2|x_0|}(J_1(p) + J_2(p)).$$

Нетрудно видеть, что $J_2(p) = \overline{J_1(\bar{p})}$, $J_1(p) = \overline{J_2(\bar{p})}$, поэтому достаточно построить аналитическое продолжение функций $J_1(p)$, $J_2(p)$ в область $\operatorname{Re} p < 0$, $\operatorname{Im} p > 0$ и воспользоваться указанными формулами. В частности, предельные значения $J(p)$ на верхнем $(J^+(x))$ и нижнем $(J^-(x))$ берегах разреза связаны соотношением $J^+(x) = \overline{J^-(x)}$. При мнимых значениях аргумента $p = i\lambda$ $(\lambda > 0)$ из (4.1) следуют равенства

$$J_1(i\lambda) = J_2(-i\lambda) - \pi i\lambda e^{i|x_0|i\lambda} \int_0^1 e^{-i|x_0|\beta i\lambda} I_0(i\lambda\beta)\, d\beta + \frac{\pi i}{\sqrt{x_0^2+1}} e^{i|x_0|i\lambda},$$

$$J_2(i\lambda) = J_1(-i\lambda) + \pi i\lambda e^{-i|x_0|i\lambda} \int_0^1 e^{i|x_0|\beta i\lambda} I_0(i\lambda\beta)\, d\beta - \frac{\pi i}{\sqrt{x_0^2+1}} e^{-i|x_0|i\lambda},$$

которые и приводят к формулам аналитического продолжения

$$J_1(p) = J_2(-p) - \pi p e^{i|x_0|p} \int_0^1 e^{-i|x_0|\beta p} I_0(p\beta)\, d\beta + \frac{\pi i}{\sqrt{x_0^2+1}} e^{i|x_0|p},$$

$$J_2(p) = J_1(-p) + \pi p e^{-i|x_0|p} \int_0^1 e^{i|x_0|\beta p} I_0(p\beta)\, d\beta - \frac{\pi i}{\sqrt{x_0^2+1}} e^{-i|x_0|p}$$

$$(\mathrm{Re}\, p < 0, \quad \mathrm{Im}\, p > 0).$$

Отсюда

$$J(p) = \frac{1}{2|x_0|} \Big\{ 2|x_0| J(-p) - \frac{2\pi}{\sqrt{x_0^2+1}} \sin|x_0|p - $$
$$- 2\pi i p \int_0^1 I_0(p\beta) \sin[|x_0|p(1-\beta)]\, d\beta \Big\}$$

при $\mathrm{Re}\, p < 0$, $\mathrm{Im}\, p > 0$. На верхнем берегу разреза $(\mathrm{Im}\, p = +0)$

(4.3) $$J^+(x) = J(-x) - \frac{\pi}{\sqrt{x_0^2+1}} \frac{\sin x_0 x}{x_0} - \frac{\pi i}{x_0} \int_0^{|x|} I_0(\beta) \sin(x_0[|x| - \beta])\, d\beta.$$

С учетом (4.1), (4.3) значение $F(p)$ на верхнем берегу разреза дается выражением

(4.4) $$F^+(\sigma) = -\frac{x_0}{\pi\sqrt{x_0^2+1}} + \frac{x_0}{\pi} \sqrt{x_0^2+1}\, J^+(-\sigma)/K_0^+(-\sigma) \quad (\sigma > 0).$$

Ясно, что на нижнем берегу $F^-(\sigma) = \overline{F^+(\sigma)}$. Найдем асимптотику при $\sigma \to \infty$ функции $F^+(\sigma)$, определяемой (4.4). Так как при $\sigma \to \infty$ модифицированные функции Бесселя имеют асимптотики [8] $I_0(\sigma) = (2\pi\sigma)^{-1/2} e^{\sigma} [1 + O(1/\sigma)]$, $K_0(\sigma) = (2\sigma/\pi)^{-1/2} e^{-\sigma} [1 + O(1/\sigma)]$, то

$$F^+(\sigma) = -\frac{x_0}{\pi\sqrt{x_0^2+1}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{x_0^2+1}\, I_0^{-1}(\sigma) \int_0^\sigma I_0(\beta) \sin x_0(\sigma - \beta)\, d\beta + O(e^{-\sigma}).$$

Представим свертку $D_0(\sigma) = \int_0^\sigma I_0(\beta) \sin x_0(\sigma - \beta)\, d\beta$ в эквивалентном виде

$$D_0(\sigma) = e^{\sigma} \int_0^\sigma e^{-\beta} I_0(\beta)\, e^{-(\sigma-\beta)} \sin x_0(\sigma - \beta)\, d\beta.$$

Здесь функция $e^{-\rho} \sin x_0\rho$ абсолютно интегрируема в $[0, T]$, $T > 0$ и убывает быстрее любой степени ρ^{-1} при $\rho \to \infty$, функция $e^{-\beta} I_0(\beta)$ ограничена и интегрируема в $[0, T]$, при $\beta \to \infty$

$$e^{-\beta} I_0(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} + \frac{1}{8\beta\sqrt{2\pi\beta}} + \dots$$

Следовательно, можем воспользоваться результатом [9]

$$D_0(\sigma) = e^{\sigma}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho}\sin x_0\rho\, d\rho + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi\sigma}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^{\infty}\left(\rho+\frac{1}{4}\right)e^{-\rho}\sin x_0\rho\, d\rho + O(\sigma^{-5/2})\right\}.$$

Окончательно найдем

$$D_0(\sigma) = \frac{x_0}{x_0^2+1}\frac{e^{\sigma}}{\sqrt{2\pi\sigma}} + \frac{x_0(x_0^2+9)}{8(x_0^2+1)^2}\frac{e^{\sigma}}{\sigma\sqrt{2\pi\sigma}} + \ldots \quad (\sigma\to\infty),$$

отсюда

$$F^+(\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{x_0}{(x_0^2+1)^{3/2}}\frac{1}{\sigma} + O(\sigma^{-2}). \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) показывает, что формулы (3.4), (3.5) действительно определяют единственное решение задачи (3.1), (3.2). Подставляя (3.5)—(4.4) в (3.4), получим решение этой задачи в виде

$$\theta(\alpha,\tau) = \frac{1}{2\pi^{3/2}}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}\int\limits_1^{\tau}\frac{\sqrt{\tau_0^2-1}}{\tau_0^2+x_0^2}e^{-\frac{\alpha^2}{4(\tau-\tau_0)}}\frac{d\tau_0}{\sqrt{\tau-\tau_0}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi^{3/2}}\int\limits_0^{\infty}\operatorname{Re}F^+(\mu^2)\,k_c(\alpha,\tau,\mu)\,d\mu - \frac{1}{2\pi^{3/2}}\int\limits_0^{\infty}\operatorname{Im}F^+(\mu^2)\,k_s(\alpha,\tau,\mu)\,d\mu,$$

где $k_c(\alpha,\tau,\mu) = \int\limits_0^{\infty} k(\alpha-\alpha_0,\tau)\cos\alpha_0\mu\, d\alpha_0$; $k_s(\alpha,\tau,\mu) = \int\limits_0^{\infty} k(\alpha-\alpha_0,\tau)\times$ $\times\sin\alpha_0\mu\, d\alpha_0$;

$$\operatorname{Re}F^+(\sigma) = -\frac{x_0}{\pi\sqrt{x_0^2+1}} + \frac{x_0}{\pi}\sqrt{x_0^2+1}\,\{l_1(\sigma,x_0)K_0(\sigma) +$$

$$+\pi l_2(\sigma,x_0)I_0(\sigma)\}/l_0(\sigma);$$

$$\operatorname{Im}F^+(\sigma) = -\frac{x_0}{\pi}\sqrt{x_0^2+1}\,\{l_2(\sigma,x_0)K_0(\sigma) - \pi l_1(\sigma,x_0)I_0(\sigma)\}/l_0(\sigma);$$

$$l_1(\sigma,x_0) = \int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-\tau\sigma}\,d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}\,(\tau^2+x_0^2)} + \frac{\pi}{\sqrt{x_0^2+1}}\frac{\sin x_0\sigma}{x_0};$$

$$l_2(\sigma,x_0) = \frac{\pi}{x_0}\int\limits_0^{\sigma} I_0(\beta)\sin x_0(\sigma-\beta)\,d\beta;\quad l_0(\sigma) = K_0^2(\sigma)+\pi^2 I_0^2(\sigma).$$

Заметим, что функции $k_c(\alpha,\tau,\mu)$, $k_s(\alpha,\tau,\mu)$, $l_0(\sigma)$ не зависят от параметра x_0, поэтому асимптотика $\theta(\alpha,\tau)$ при больших и малых значениях $|x_0|$ определяется через соответствующие равномерные асимптотики функций $l_1(\sigma,x_0)$, $l_2(\sigma,x_0)$. Так, при $x_0\to 0$ несложно получить

$$l_1(\sigma,x_0) = \int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-\tau\sigma}\,d\tau}{\tau^2\sqrt{\tau^2-1}} + \pi\frac{\sin x_0\sigma}{x_0} + O(x_0^2)\quad (\sigma>0),$$

$$l_2(\sigma,x_0) = \pi\sigma^2 I_0(\sigma) + \frac{\pi^2}{2}\sigma\,[I_0(\sigma)L_1(\sigma) - I_1(\sigma)L_0(\sigma)] -$$

$$-\pi\sigma I_1(\sigma) + O(x_0^2)\quad (0<\sigma<|x_0|^{-1}).$$

Здесь $L_1(\sigma)$, $L_0(\sigma)$ — модифицированные функции Струве; $L_\nu(\sigma) = e^{-(\nu+1)\pi i/2}H_\nu(e^{\pi i/2}\sigma)$. Для $|x_0| \gg 1$

$$l_1(\sigma, x_0) = x_0^{-2}(K_0(\sigma) + \pi \sin x_0\sigma) + O(x_0^{-4}),$$

$$l_2(\sigma, x_0) = \pi x_0^{-2}(I_0(\sigma) - \cos x_0\sigma) + O(x_0^{-3}),$$

в этом случае формулы для $\operatorname{Re} F^+(\sigma)$, $\operatorname{Im} F^+(\sigma)$ упрощаются:

$$\operatorname{Re} F^+(\sigma) = l_0^{-1}(\sigma)\{K_0(\sigma)\sin x_0\sigma - \pi I_0(\sigma)\cos x_0\sigma\}\operatorname{sgn} x_0,$$

$$\operatorname{Im} F^+(\sigma) = l_0^{-1}(\sigma)\{K_0(\sigma)\cos x_0\sigma + \pi I_0(\sigma)\sin x_0\sigma\}\operatorname{sgn} x_0.$$

5. С помощью построенной функции $\theta(\alpha, \tau)$ решение исходной задачи (1.1) выписывается в квадратурах

$$\varphi(x, y, t, x_0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \xi^{-1/2}e^{\xi y}\sin\sqrt{\xi}\,t\cos\xi(x - x_0)\,d\xi -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_1^\infty \theta(t_0, \tau)N(\tau - y, x, t - t_0)\,d\tau\,dt_0 +$$

$$+\frac{4}{\pi}xy\int_1^\infty \tau\theta(t, \tau)\frac{d\tau}{(x^2 + (y - \tau)^2)(x^2 + (y + \tau)^2)},$$

$$N(\beta, x, \lambda) = \int_0^\infty \xi^{1/2}e^{-\xi\beta}\sin\sqrt{\xi}\,\lambda\sin\xi x\,d\xi.$$

Здесь первое слагаемое дает решение задачи в отсутствие барьера [10], а последующие описывают поправку к этому решению, обусловленную наличием погруженной пластины. Деформация свободной границы $y = \eta(x, t)$ ($\eta = -\varphi_t(x, 0, t, x_0)$) вычисляется по формулам

(5.1) $$\eta(x, t, x_0) = \sum_{n=0}^{3} H_n(x_0)\,\eta_n(x, t, x_0) + \eta_4^+(x, t, x_0) +$$

$$+ \eta_4^-(x, t, x_0) + \eta_5^+(x, t, x_0) + \eta_5^-(x, t, x_0),$$

где $\eta_0(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\sqrt{\xi}\,t\cos\xi(x - x_0)\,d\xi$; $H_0(x_0) \equiv 1$;

$$\eta_1(x, t) = \int_0^\infty K_0(\xi)\sin\xi x\left[\sqrt{2}\cos\left(t\sqrt{\xi} - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-t\sqrt{\xi}}\right]d\xi;$$

$$H_1(x_0) = \frac{x_0}{2\pi^2\sqrt{x_0^2 + 1}};$$

$$\eta_2(x, t, x_0) = \int_0^\infty l_3(\xi, x_0)\sin\xi x\left[\sqrt{2}\cos\left(t\sqrt{\xi} - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-t\sqrt{\xi}}\right]d\xi;$$

$$H_2(x_0) = -\frac{x_0}{2\pi^2}\sqrt{x_0^2 + 1};$$

$$\eta_3(x, t, x_0) = \int_0^\infty l_6(\xi, x_0)K_0(\xi)\sin\xi x\left[\sqrt{2}\cos\left(t\sqrt{\xi} - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-t\sqrt{\xi}}\right]d\xi;$$

$$H_3(x_0) = \pi^{-2};$$

$$\eta_4^\pm(x, t, x_0) = \mp\pi^{-2}\int_0^\infty \xi^{1/2}K_0(\xi)\,l_4^\pm(\xi, t, x_0)\sin\xi x\,d\xi;$$

$$\eta_5^{\pm}(x, t, x_0) = -\pi^{-2}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^\infty \xi K_0(\xi)\, l_5^{\pm}(\xi, x_0)\, e^{\mp i\sqrt{\xi}t} \sin \xi x\, d\xi;$$

$$l_3(\xi, x_0) = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\tau\xi}\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}\,(\tau^2 + x_0^2)};$$

$$l_4^{\pm}(\xi, t, x_0) = \mathrm{Im}\left\{\mathrm{V.p.}\int\limits_0^\infty \mu F^{+}(\mu^2)\frac{e^{i\mu t}\, d\mu}{(\mu \pm \sqrt{\xi})(\mu^2 + \xi)}\right\};$$

$$l_5^{\pm}(\xi, x_0) = \mathrm{V.p.}\int\limits_0^\infty F^{+}(\mu^2)\frac{d\mu}{(\mu^2 + \xi)(\mu \pm \sqrt{\xi})};\quad l_6(\xi, x_0) = \mathrm{Im}\int\limits_0^\infty F^{+}(\mu^2)\frac{d\mu}{i\sqrt{\xi} - \mu}.$$

Имея в виду исследование предельных режимов движения жидкости над вертикальной пластиной, рассмотрим более общую задачу

$$(5.2)\qquad \Delta' U = 0 \ \text{ в } \ \Omega_a,\quad U_{t't'} + \mathrm{Fr}^{-1} U_{y'} = 0 \quad (y' = 0),$$
$$U_{x'} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_a,\quad U = 0,\quad U_{t'} = -A\delta(x' - x_1) \quad (t' = 0,\ y' = 0),$$

в которой $\Gamma_a = \{x', y' | x' = 0, y' < -a\}$; $\Omega_a = \{x', y' | y' < 0\}\backslash\Gamma_a$; число Фруда $\mathrm{Fr} = V_*^2/gL_*$; L_*, V_* — соответственно характерные линейный масштаб и скорость процесса.

Пусть деформация свободной границы в (5.2) описывается уравнением $y' = h(x', t', x_1)$, тогда несложно получить формулу $h(x', t', x_1) = a^{-1}\mathrm{Fr}\,\eta(x'/a,\ t'/\sqrt{\mathrm{Fr}\,a},\ x_1/a)$, из которой следует, что при $a \to \infty$

$$h(x', t', x_1) = \pi^{-1}\mathrm{Fr}\int\limits_0^\infty \cos\left(\sqrt{\sigma/\mathrm{Fr}}\, t'\right)\cos\sigma(x' - x_1)\, d\sigma + O(a^{-2}),$$

т. е. поправка, обусловленная наличием вертикальной пластины, имеет порядок $O(a^{-2})$ при $a \gg 1$. Когда барьер приближается к свободной поверхности ($a \to 0$), то при $x' = O(a)$, $t' = O(\sqrt{a})$, $x_1 = O(a)$ построенное решение (5.1) теряет силу: $h = O(a^{-1})$, $a \to 0$, и необходимо использовать «внутреннее» асимптотическое разложение в окрестности начала координат, рассматривая a как малый параметр.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dean W. R.** On the reflection of surface waves by a submerged plane barrier // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1945.— V. 41, N 2.
2. **Ursell F.** The effect of a vertical barrier on surface waves in deep water // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1947.— V. 43, N 3.
3. **Ursell F.** On the waves due to the rolling of a ship // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1948.— V. 1, N 2.
4. **Хаскинд М. Д.** Излучение и дифракция поверхностных волн вертикально плавающей пластиной // ПММ.— 1959.— Т. 23, вып. 3.
5. **Lewin M.** The effects of vertical barriers on progressing waves // J. Math. Phys.— 1963.— V. 42, N 3.
6. **Mei C. C.** Radiation and scattering of transient gravity waves by vertical plates // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1966.— V. 19, pt 4.
7. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Наука, 1965.
8. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций.— М.: ИЛ, 1949.
9. **Риекстыньш Э. Я.** Асимптотическое представление некоторых типов интеграла свертки // Латв. мат. ежегодник/Латв. гос. ун-т.— 1970.— № 8.
10. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.

г. Новосибирск *Поступила 6/VI 1988 г.*