УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ОКРУЖНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Д. А. Шляхин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001 Самара
E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

Рассматривается задача о распространении вынужденных электроупругих осесимметричных волн кручения в полом пьезокерамическом цилиндре конечных размеров, на криволинейных электродированных поверхностях которого действуют касательные напряжения или электрический потенциал. Новое замкнутое решение построено методом разложения по собственным вектор-функциям с использованием структурного алгоритма конечных интегральных преобразований, что позволяет определять частоты собственных колебаний, напряженно-деформированное состояние элемента, а также потенциал и напряженность индуцируемого электрического поля.

Ключевые слова: связанная задача, прямой и обратный пьезоэффекты, цилиндр конечных размеров, осесимметричная динамическая нагрузка.

Введение. Основным элементом широкого класса импульсных преобразователей энергии является пьезокерамический цилиндр конечных размеров, работа которого основана на связанности механических и электрических полей напряжений. В случае окружной поляризации пьезоматериала этот эффект наблюдается только при распространении нестационарных осесимметричных волн кручения. Вследствие сложности данной задачи в большинстве работ решались задачи электроупругости для бесконечного цилиндра при гармоническом воздействии [1, 2] и анализировались свободные колебания толстой пластины при различных краевых условиях на электрические поля [1]. Также можно отметить решение, справедливое для неоднородных кристаллов класса тетрагональной симметрии 422 при действии на криволинейных поверхностях элемента динамической нагрузки в виде электрического потенциала или касательных напряжений [3].

В настоящей работе рассматривается задача о распространении вынужденных электроупругих осесимметричных волн кручения в полом пьезокерамическом цилиндре конечных размеров.

1. Постановка задачи. Полый цилиндр, занимающий в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\{\Omega\colon a \leqslant r_* \leqslant b,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z_* \leqslant h\}$, представляет собой линейно-упругое анизотропное тело и выполнен из пьезокерамического материала с наведенной окружной поляризацией. Рассматривается случай, когда торцевые плоскости элемента не закреплены и свободны от электрических зарядов, а на внутренних и внешних криволинейных электродированных поверхностях действуют касательные напряжения $\sigma_1^*(z_*, t_*)$, $\sigma_2^*(z_*, t_*)$ и потенциал $V^*(z_*, t_*)$.

В данной постановке краевая задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого и обратного пьезоэффекта, в первом случае трансформирующих механическое воздействие в соответствующий электрический сигнал (см. варианты “а”, “б” граничных условий на криволинейных плоскостях, приведенные ниже), а во втором — электрическую нагрузку в деформации (см. вариант “в”). Кроме того, учитываются различные способы измерения индуцируемого электрического сигнала [4]: в варианте “а” радиальные поверхности полностью или частично электродированы и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму “холостого хода” (отсутствию свободных электрических зарядов); в варианте “б” полностью электродированные эквипотенциальные плоскости подключены к измерительному прибору с малым входным сопротивлением.

В общем случае дифференциальные уравнения движения и электростатики однородной упругой анизотропной среды в цилиндрической системе координат записываются в виде [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r_*}+\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z_*}+\frac{2}{r_*}\,\sigma_{r\theta}-\rho\,\frac{\partial^2 v^*}{\partial t_*^2}=0,\\ \frac{\partial D_r}{\partial r_*}+\frac{D_r}{r_*}+\frac{\partial D_z}{\partial z_*}=0.\end{gathered}\tag{1.1}$$

В случае окружной поляризации уравнения состояния пьезокерамического тела определяются следующими равенствами [1]:

$$\begin{gathered}\sigma_{r\theta}=C_{55}\Big(\frac{\partial v^*}{\partial r_*}-\frac{v^*}{r_*}\Big)-e_{15}E_r,\qquad \sigma_{z\theta}=C_{55}\,\frac{\partial v^*}{\partial z_*}-e_{15}E_z,\\ D_r=\varepsilon_{11}E_r+e_{15}\Big(\frac{\partial v^*}{\partial r_*}-\frac{v^*}{r_*}\Big),\qquad D_z=\varepsilon_{11}E_z+e_{15}\,\frac{\partial v^*}{\partial z_*},\\ E_z=-\frac{\partial \varphi^*}{\partial z_*},\qquad E_r=-\frac{\partial \varphi^*}{\partial r_*}.\end{gathered}\tag{1.2}$$

В соотношениях (1.1), (1.2) t_* — время; $\sigma_{r\theta}(r_*,z_*,t_*)$, $\sigma_{z\theta}(r_*,z_*,t_*)$ — компоненты тензора механических напряжений; $v^*(r_*,z_*,t_*)$ — тангенциальная составляющая вектора перемещений; $D_r(r_*,z_*,t_*)$, $D_z(r_*,z_*,t_*)$, $E_r(r_*,z_*,t_*)$, $E_z(r_*,z_*,t_*)$ — компоненты векторов индукции и напряженности; $\varphi^*(r_*,z_*,t_*)$ — потенциал электрического поля; ρ, C_{55}, e_{15} — объемная плотность, модуль упругости и пьезомодуль анизотропного электроупругого материала; ε_{11} — диэлектрическая проницаемость.

Подставляя (1.2) в (1.1), для рассматриваемой динамической задачи теории электроупругости получаем систему дифференциальных уравнений в безразмерном виде

$$\begin{gathered}\nabla_1 v+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+e_{15}\Big(\nabla_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\varphi-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,\\ e_{15}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)v-C_{55}\varepsilon_{11}\Big(\nabla_3+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\varphi=0,\end{gathered}\tag{1.3}$$

а также граничные условия

$$z=0,L:\qquad \sigma_{z\theta}=C_{55}\,\frac{\partial v}{\partial z}+e_{15}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0,\qquad D_z=-C_{55}\varepsilon_{11}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}+e_{15}\,\frac{\partial v}{\partial z}=0;\tag{1.4}$$

$r=1,k$:

$$\begin{gathered}\text{а)}\quad \sigma_{r\theta}\big|_{r=1}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+e_{15}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}=\sigma_1(z,t),\qquad \sigma_{r\theta}\big|_{r=k}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+e_{15}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}=\sigma_2(z,t),\\ D_r=-C_{55}\varepsilon_{11}\,\frac{\partial \varphi}{\partial r}+e_{15}\Big(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\Big)=0;\end{gathered}\tag{1.5а}$$

$$\text{б)}\quad \sigma_{r\theta}\big|_{r=1} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + e_{15}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sigma_1(z,t), \qquad \sigma_{r\theta}\big|_{r=k} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + e_{15}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sigma_2(z,t),$$
$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0; \tag{1.5б}$$

$$\text{в)}\quad \sigma_{r\theta}\big|_{r=1} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + e_{15}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \qquad v(k,z,t) = 0,$$
$$\varphi(1,z,t) = V(z,t), \qquad \varphi(k,z,t) = -V(z,t) \tag{1.5в}$$

и начальные условия

$$t = 0\colon \qquad v(r,z,0) = v_0(r,z), \qquad \dot v(r,z,0) = \dot v_0(r,z). \tag{1.6}$$

В (1.3)–(1.6) $\{v,r,z,L,k\} = \{v^*,r_*,z_*,h,a\}/b$; $\{\varphi,V,\sigma_1,\sigma_2\} = \{\varphi^*,V^*,\sigma_1^*,\sigma_2^*\}/(bC_{55})$; $t = t_*b^{-1}\sqrt{C_{55}/\rho}$; v_0, $\dot v_0$ — известные в начальный момент времени тангенциальные перемещения и их скорости; точка обозначает дифференцирование по времени;

$$\nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \qquad \nabla_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \nabla_3 = \nabla_1 + \frac{1}{r^2}.$$

При исследовании прямого пьезоэффекта, для того чтобы осесимметричная нагрузка была самоуравновешенной, должно выполняться условие

$$\int\limits_k^1 \sigma_1(z,t)\,dz + k\int\limits_k^1 \sigma_2(z,t)\,dz = 0, \tag{1.7}$$

а при исследовании обратного пьезоэффекта для определенности внутренние радиальные поверхности полагаются закрепленными.

Соотношения (1.3)–(1.7) представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения. К начально-краевой задаче (1.3)–(1.6) применим косинус-преобразование Фурье с конечными пределами по переменной z. В пространстве изображений получаем систему дифференциальных уравнений

$$\nabla_1 v_c - j_n^2 v_c + e_{15}(\nabla_2 - j_n^2)\varphi_c - \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} = 0,$$
$$e_{15}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - j_n^2\Big)v_c - C_{55}\varepsilon_{11}(\nabla_3 - j_n^2)\varphi_c = 0, \tag{2.1}$$

граничные условия при $r = 1, k$:

$$\text{а)}\quad \Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)v_c + e_{15}\,\frac{\partial\varphi_c}{\partial r} = N_{1c}\big|_{r=1}, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)v_c + e_{15}\,\frac{\partial\varphi_c}{\partial r} = N_{2c}\big|_{r=k},$$
$$-C_{55}\varepsilon_{11}\,\frac{\partial\varphi_c}{\partial r} + e_{15}\Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)v_c = 0; \tag{2.2а}$$

$$\text{б)}\quad \Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)v_c + e_{15}\,\frac{\partial\varphi_c}{\partial r} = N_{1c}\big|_{r=1}, \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)v_c + e_{15}\,\frac{\partial\varphi_c}{\partial r} = N_{2c}\big|_{r=k},$$
$$\varphi_c = 0; \tag{2.2б}$$

$$\text{в)}\quad \Big(\frac{\partial v_c}{\partial r} - \frac{v_c}{r} + e_{15}\,\frac{\partial\varphi_c}{\partial r}\Big)\Big|_{r=1} = 0, \qquad v_c(k,n,t) = 0,$$
$$\varphi_c(1,n,t) = V_c(n,t), \qquad \varphi_c(k,n,t) = -V_c(n,t), \tag{2.2в}$$

а также начальные условия

$$t = 0: \qquad v_c(r,n,0) = v_{0c}(r,n), \qquad \dot{v}_c(r,n,0) = \dot{v}_{0c}(r,n), \tag{2.3}$$

где

$$\{v_c(r,n,t), \varphi_c(r,n,t), v_{0c}(r,n), \dot{v}_{0c}(r,n), N_{1c}(1,n,t), N_{2c}(k,n,t), V_c(n,t)\} =$$

$$= \int\limits_0^L \{v(r,z,t), \varphi(r,z,t), v_0(r,z), \dot{v}_0(r,z), \sigma_1(1,z,t), \sigma_2(k,z,t), V(z,t)\} \cos(j_n z)\, dz,$$

$$j_n = n\pi/L \qquad (n = \overline{0,\infty}\,).$$

Приводя в начально-краевой задаче (2.1)–(2.3) краевые условия к однородным, трансформанты Фурье v_c, φ_c представим в виде

$$v_c(r,n,t) = H_1(r,n,t) + p_c(r,n,t), \qquad \varphi_c(r,n,t) = H_2(r,n,t) + \chi_c(r,n,t), \tag{2.4}$$

где для варианта граничных условий “а”

$$H_1(r,n,t) = \frac{C_{55}\varepsilon_{11}e_{15}}{C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2}\,[f_1(r)N_{1c} + f_2(r)N_{2c}], \qquad H_2(r,n,t) = f_3(r)N_{1c} + f_4(r)N_{2c},$$

для варианта граничных условий “б”

$$H_1(r,n,t) = f_1(r)N_{1c} + f_2(r)N_{2c}, \qquad H_2(r,n,t) = 0,$$

для варианта граничных условий “в”

$$H_1(r,n,t) = 0, \qquad H_2(r,n,t) = f_3(r)V_c.$$

Подставляя (2.4) в (2.1)–(2.3) и учитывая, что для варианта граничных условий “а”

$$\begin{gathered} f_1(1) = f_1(k) = f_2(1) = f_2(k) = f_1'(k) = f_2'(1) = 0, \\ f_1'(1) = f_2'(k) = e_{15}^{-1}, \qquad f_3'(1) = f_4'(k) = e_{15}/(C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2), \\ f_3'(k) = f_4'(1) = 0, \end{gathered} \tag{2.5а}$$

для варианта граничных условий “б”

$$\begin{gathered} f_1(1) = f_1(k) = f_2(1) = f_2(k) = f_1'(k) = f_2'(1) = 0, \\ f_1'(1) = f_2'(k) = 1, \end{gathered} \tag{2.5б}$$

для варианта граничных условий “в”

$$f_3(1) = -f_3(k) = 1, \qquad f_3'(1) = 0 \tag{2.5в}$$

(штрих обозначает дифференцирование по переменной r), получаем начально-краевую задачу относительно функций p_c, χ_c с однородными граничными условиями по координате r, которая включает дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} \nabla_1 p_c - j_n^2 p_c + e_{15}(\nabla_2 - j_n^2)\chi_c - \frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} = B_{1c}, \\ e_{15}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - j_n^2\Big)p_c - C_{55}\varepsilon_{11}(\nabla_3 - j_n^2)\chi_c = B_{2c}, \end{gathered} \tag{2.6}$$

граничные условия при $r = 1, k$:

а) $$\Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)p_c = 0, \qquad \frac{\partial \chi_c}{\partial r} = 0; \tag{2.7а}$$

б) $$\Big(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\Big)p_c + e_{15}\,\frac{\partial \chi_c}{\partial r} = 0, \qquad \chi_c = 0; \tag{2.7б}$$

в) $$\Big(\frac{\partial p_c}{\partial r} - \frac{p_c}{r} + e_{15}\,\frac{\partial \chi_c}{\partial r}\Big)\Big|_{r=1} = 0, \qquad p_c(k,n,t) = 0, \qquad \chi_c = 0 \tag{2.7в}$$

и начальные условия

$$t = 0: \qquad p_c(r,n,0) = p_{0c}(r,n), \qquad \dot p_c(r,n,0) = \dot p_{0c}(r,n), \tag{2.8}$$

где

$$B_{1c} = -\Big(\nabla_1 - j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)H_1 - e_{15}(\nabla_2 - j_n^2)H_2,$$

$$B_{2c} = -e_{15}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - j_n^2\Big)H_1 + C_{55}\varepsilon_{11}(\nabla_3 - j_n^2)H_2,$$

$$p_{0c}(r,n) = v_{0c}(r,n) - H_1\big|_{t=0}, \qquad \dot p_{0c}(r,n) = \dot v_{0c}(r,n) - \dot H_1\big|_{t=0}.$$

Для вариантов граничных условий “а”, “б” функции $f_1(r), \dots, f_4(r)$ определяются из дифференциальных уравнений

$$f_1^{(\mathrm{IV})}(r) = f_2^{(\mathrm{IV})}(r) = 0, \qquad f_3''(r) = f_4''(r) = \mathrm{const}, \tag{2.9а}$$

для варианта граничных условий “в” — из дифференциального уравнения

$$f_3^{(\mathrm{IV})}(r) = 0. \tag{2.9б}$$

Начально-краевую задачу (2.6)–(2.8) относительно $p_c(r,n,t)$, $\chi_c(r,n,t)$ будем решать с использованием структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований [5]. На сегменте $[k,1]$ введем вырожденное конечное интегральное преобразование с неизвестными компонентами $K_1(\lambda_{in}, r)$, $K_2(\lambda_{in}, r)$ вектор-функции ядра преобразования:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int\limits_k^1 p_c(r,n,t)K_1(\lambda_{in}, r) r\, dr,$$

$$p_c(r,n,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, r)\|K_{in}\|^{-2}, \tag{2.10}$$

$$\chi_c(r,n,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, r)\|K_{in}\|^{-2}, \qquad \|K_{in}\|^2 = \int\limits_k^1 K_1^2(\lambda_{in}, r) r\, dr$$

(λ_{in} ($i = \overline{1,\infty}$) — положительные параметры, образующие счетное множество; $\|K_{in}\|$ — норма вектор-функции вырожденного преобразования). При этом круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра ω_{in} связаны с λ_{in} зависимостью

$$\omega_{in} = (\lambda_{in}/b)\sqrt{C_{55}/\rho}\,. \tag{2.11}$$

Преобразуя систему уравнений (2.6) в соответствии со структурным алгоритмом [5], получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\ddot G(\lambda_{in}, n, t) + \lambda_{in}^2 G(\lambda_{in}, n, t) = -F(\lambda_{in}, n, t) \qquad (n = \overline{0,\infty}, \quad i = \overline{1,\infty}\,); \tag{2.12}$$

$$G(\lambda_{in}, n, 0) = G_0(\lambda_{in}, n), \qquad \dot G(\lambda_{in}, n, t)\big|_{t=0} = \dot G_0(\lambda_{in}, n), \quad t = 0, \tag{2.13}$$

а также однородную краевую задачу для компонент K_1, K_2 ядра конечного интегрального преобразования, которая включает дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered}\nabla_1 K_1 + (\lambda_{in}^2 - j_n^2)K_1 + e_{15}(\nabla_2 - j_n^2)K_2 = 0,\\ e_{15}\Big(\frac{d^2}{dr^2} - j_n^2\Big)K_1 - C_{55}\varepsilon_{11}(\nabla_3 - j_n^2)K_2 = 0\end{gathered} \tag{2.14}$$

и граничные условия при $r = 1, k$:

а) $$\Big(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\Big)K_1 = 0, \qquad \frac{dK_2}{dr} = 0; \tag{2.15а}$$

б) $$\Big(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\Big)K_1 + e_{15}\,\frac{dK_2}{dr} = 0, \qquad K_2 = 0; \tag{2.15б}$$

в) $$\Big(\frac{dK_1}{dr} - \frac{K_1}{r} + e_{15}\,\frac{dK_2}{dr}\Big)\Big|_{r=1} = 0, \qquad K_1(\lambda_{in}, k) = 0, \qquad K_2 = 0. \tag{2.15в}$$

В (2.12), (2.13)

$$F(\lambda_{in}, n, t) = \int\limits_k^1 (B_{1c}K_1 + B_{2c}K_2)r\,dr,$$

$$G_0(\lambda_{in}, n) = \int\limits_k^1 p_{0c}K_1 r\,dr, \qquad \dot G_0(\lambda_{in}, n) = \int\limits_k^1 \dot p_{0c}K_1 r\,dr.$$

С учетом (2.13) решение уравнения (2.12) записывается в виде

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_0\cos\lambda_{in}t + \dot G_0\lambda_{in}^{-1}\sin\lambda_{in}t + \lambda_{in}^{-1}\int\limits_0^t F(\lambda_{in}, n, t)\sin\lambda_{in}(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.16}$$

С использованием новых функций $R_1(\lambda_{in}, r)$, $R_2(\lambda_{in}, r)$, связанных с $K_1(\lambda_{in}, r)$, $K_2(\lambda_{in}, r)$ соотношениями

$$\begin{gathered}K_1(\lambda_{in}, r) = -\nabla_4 R_1(\lambda_{in}, r) + \nabla_5 R_2(\lambda_{in}, r),\\ K_2(\lambda_{in}, r) = -\frac{e_{15}}{C_{55}\varepsilon_{11}}\,[\nabla_4 R_1(\lambda_{in}, r) + \nabla_6 R_2(\lambda_{in}, r)],\end{gathered} \tag{2.17}$$

систему (2.14) можно привести к следующему разрешающему дифференциальному уравнению относительно R_1, R_2:

$$\nabla_7 R_1 + \nabla_8 R_2 = 0. \tag{2.18}$$

Здесь

$$\nabla_4 = r^2\frac{d^3}{dr^3} - 3r\,\frac{d^2}{dr^2} + 3\,\frac{d}{dr},$$

$$\nabla_5 = r^2\frac{d^2}{dr^2} + 3r\,\frac{d}{dr} - j_n^2r^2, \qquad \nabla_6 = -r^2\frac{d^2}{dr^2} - 2r\,\frac{d}{dr} + 2 + j_n^2r^2,$$

$$\nabla_7 = b_1r^2\frac{d^5}{dr^5} + (3b_1+1)r\,\frac{d^4}{dr^4} + (b_2r^2 - 3b_1)\,\frac{d^3}{dr^3} + \Big(3b_2r - \frac{3}{r}\Big)\frac{d^2}{dr^2} + \Big(\frac{3}{r^2} - 3b_2\Big)\frac{d}{dr},$$

$$\nabla_8 = -b_1 r^2 \frac{d^4}{dr^4} - 8b_1 r \frac{d^3}{dr^3} + [(b_2 + j_n^2 b_1) r^2 - 12 b_1] \frac{d^2}{dr^2} + (3b_2 + 5j_n^2 b_1) r \frac{d}{dr} + j_n^2 (4b_1 + 1 - b_2 r^2),$$

$$b_1 = 1 + e_{15}^2/(C_{55}\varepsilon_{11}), \qquad b_2 = \lambda_{in}^2 + j_n^2 b_1.$$

Частное решение дифференциального уравнения (2.18) найдем с помощью следующих представлений функций $R_1(\lambda_{in}, r)$, $R_2(\lambda_{in}, r)$:

$$\begin{aligned} R_1(\lambda_{in}, r) &= (P_{1in} r^3 + P_{2in} r^5 + P_{3in} r^7) J_0(\sigma_{in} r) + (P_{4in} r^4 + P_{5in} r^6) J_1(\sigma_{in} r), \\ R_2(\lambda_{in}, r) &= (P_{6in} r^2 + P_{7in} r^4 + P_{8in} r^6) J_0(\sigma_{in} r) + \\ &\qquad + (r + P_{9in} r^3 + P_{10in} r^5 + P_{11in} r^7) J_1(\sigma_{in} r). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь $J_0(\,\cdot\,)$, $J_1(\,\cdot\,)$ — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка; σ_{in}, $P_{1in}, \ldots, P_{11in}$ — неизвестные на данном этапе исследования коэффициенты.

Приравнивая к нулю все множители равенства (2.18), преобразованного с учетом (2.19), получаем систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $P_{1in}, \ldots, P_{11in}$, а также характеристическое уравнение для σ_{in}

$$\sigma_{in}^2 - 4\lambda_{in}^2 \sigma_{in} + 2\lambda_{in}^4 = 0. \tag{2.20}$$

Учитывая соотношения (2.17), (2.19), а также то, что корни характеристического уравнения (2.20) положительны, получаем частное решение системы (2.14):

$$\begin{aligned} K_1(\lambda_{in}, r) &= \eta_{in}(r) J_0(\sigma_{in} r) + \gamma_{in}(r) J_1(\sigma_{in} r), \\ K_2(\lambda_{in}, r) &= \mu_{in}(r) J_0(\sigma_{in} r) + \psi_{in}(r) J_1(\sigma_{in} r). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Система уравнений, при решении которой определяются коэффициенты $P_{1in}, \ldots, P_{11in}$, а также выражения для $\eta_{in}(r)$, $\gamma_{in}(r)$, $\mu_{in}(r)$, $\psi_{in}(r)$ в данной работе не приводятся.

С учетом (2.21) и рекуррентных соотношений относительно функций Бесселя первого и второго рода [6] фундаментальное решение системы (2.14) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} K_1(\lambda_{in}, r) &= \sum_{j=1}^{2} D_{jin} [\eta_{jin}(r) J_0(\sigma_{jin} r) + \gamma_{jin}(r) J_1(\sigma_{jin} r)] + \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2} D_{(2+j)in} [\eta_{(2+j)in}(r) Y_0(\sigma_{jin} r) + \gamma_{(2+j)in}(r) Y_1(\sigma_{jin} r)], \\ K_2(\lambda_{in}, r) &= \sum_{j=1}^{2} D_{jin} [\mu_{jin}(r) J_0(\sigma_{jin} r) + \psi_{jin}(r) J_1(\sigma_{jin} r)] + \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{2} D_{(2+j)in} [\mu_{(2+j)in}(r) Y_0(\sigma_{jin} r) + \psi_{(2+j)in}(r) Y_1(\sigma_{jin} r)]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь $Y_\mu(\,\cdot\,)$ — функции Бесселя второго рода порядка μ ($\mu = 0{,}1$).

Подставляя (2.22) в граничные условия (2.15), получаем однородную систему уравнений относительно постоянных $D_{1in}, \ldots, D_{4in}$. Найдя ее нетривиальные решения, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений λ_{in}

$$\det [B_{mp}] = 0 \qquad (m = \overline{1,4}, \quad p = \overline{1,4}\,),$$

а также выражения для постоянных $D_{1in}, \ldots, D_{4in}$.

Без ограничения общности примем $D_{4in} = 1$. Остальные постоянные интегрирования можно определить при решении следующей системы неоднородных уравнений:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1in} \\ D_{2in} \\ D_{3in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{14} \\ B_{24} \\ B_{34} \end{bmatrix}.$$

3. Расчетные формулы. Заключительным этапом исследования является определение функций $f_1(r), \ldots, f_4(r)$, входящих в представления (2.4). Используя дифференциальные уравнения (2.9) и соответствующие граничные условия (2.5), имеем:

— для варианта граничных условий “а”

$$f_1(r) = [e_{15}(k-1)^2(2k+1)]^{-1}[-r^3 + (2k+1)r^2 - k(k+2)r + k^2],$$

$$f_2(r) = [e_{15}(k-1)^2]^{-1}[r^3 - (k+2)r^2 + (2k+1)r - k],$$

$$f_3(r) = \frac{e_{15}}{(C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)(1-k)}\,(0{,}5r^2 - kr), \qquad f_4(r) = \frac{e_{15}}{(C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)(k-1)}\,(0{,}5r^2 - r);$$

— для варианта граничных условий “б”

$$f_1(r) = -[(k-1)^2(2k+1)]^{-1}[-r^3 + (2k+1)r^2 - k(k+2)r + k^2],$$

$$f_2(r) = (k-1)^{-2}[r^3 - (k+2)r^2 + (2k+1)r - k];$$

— для варианта граничных условий “в”

$$f_3(r) = (k-1)^{-2}(-2r^2 + 4r + k^2 - 2k - 1).$$

Применяя к трансформанте (2.16) последовательно формулы обращения (2.10), а затем формулы конечных косинус-преобразований Фурье, с учетом (2.4) получаем следующие разложения для $v(r,z,t)$, $\varphi(r,z,t)$:

$$v(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1}\Big[H_1(r,n,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in},n,t)K_1(\lambda_{in}r)\|K_{in}\|^{-2}\Big]\cos{(j_n z)},$$

$$\varphi(r,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1}\Big[H_2(r,n,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in},n,t)K_2(\lambda_{in}r)\|K_{in}\|^{-2}\Big]\cos{(j_n z)}.$$

Здесь

$$\Omega_n = \begin{cases} L, & n = 0, \\ L/2, & n \neq 0. \end{cases}$$

При исследовании прямого пьезоэффекта разность потенциалов $Q(t_*)$ между электродированными радиальными плоскостями пьезокерамического цилиндра определяется следующим образом [7]:

— для варианта граничных условий “а”

$$Q(t_*) = Q(b,t_*) - Q(a,t_*);$$

— для варианта граничных условий “б”

$$Q(t_*) = \varphi^*(b,z_*,t_*) - \varphi^*(a,z_*,t_*).$$

Здесь

$$Q(b,t_*) = (h_2 - h_1)^{-1} \int\limits_{h_1}^{h_2} \varphi(b, z_*, t_*)\,dz_*, \qquad Q(a,t_*) = (h_4 - h_3)^{-1} \int\limits_{h_3}^{h_4} \varphi(a, z_*, t_*)\,dz_*,$$

$h_1, \ldots, h_4$ — границы электродированных внешних и внутренних цилиндрических поверхностей.

4. Численный анализ результатов. В качестве примера рассмотрим пьезокерамический цилиндр ($a = 0{,}5b$, $h = 1{,}5b$), изготовленный из состава ЦТС-19 [1]. В таблице приведены собственные значения λ_{in} ($i = \overline{1,3}$) для первых трех мод осесимметричных волн кручения цилиндра при различном количестве полуволн вдоль его образующей ($n = \overline{0,3}$). Из таблицы следует, что скорость распространения волн зависит от способа измерения электрического сигнала (варианты граничных условий “а”, “б”). При подключении прибора с большим входным сопротивлением (вариант граничных условий “а”) собственные значения больше. Кроме того, в этом случае наблюдается перестройка тонов колебаний. При фиксированном значении i с увеличением n появляются более низкие частоты.

Собственные значения λ_{in} для первых трех мод осесимметричных волн кручения цилиндра

i	λ_{in}							
	Вариант граничных условий “а”				Вариант граничных условий “б”			
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	0,181	0,489	0,358	0,435	0,148	0,307	0,473	0,585
2	0,922	0,685	0,386	0,473	0,224	0,687	0,781	0,844
3	1,484	1,251	0,515	0,665	0,642	1,261	1,861	1,975

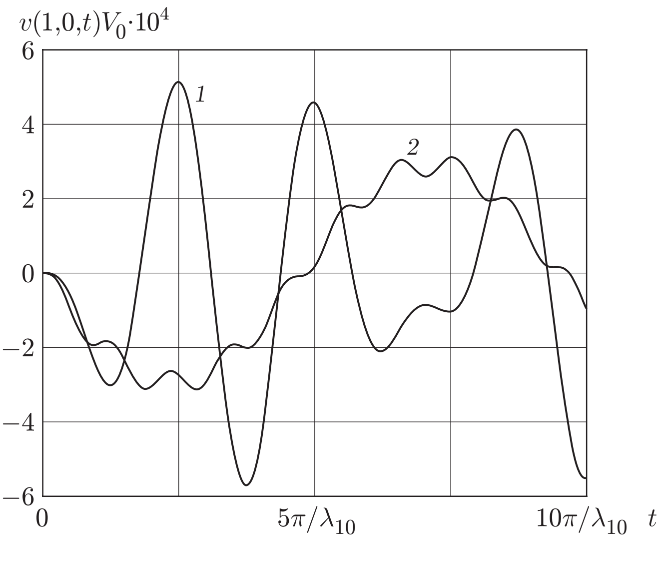

Рис. 1

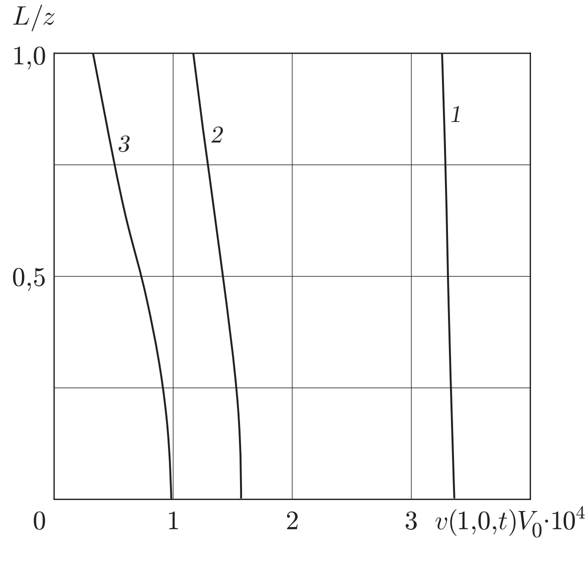

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость тангенциальных перемещений внешней криволинейной поверхности цилиндра от времени:
1 — $\theta = 0{,}6\lambda_{10}$; *2* — $\theta = 0{,}2\lambda_{10}$

Рис. 2. Изменение относительных перемещений по высоте цилиндра:
1 — $a = 0{,}75b$; *2* — $a = 0{,}5b$; *3* — $a = 0{,}25b$

На рис. 1 показана зависимость тангенциальных перемещений внешней криволинейной поверхности цилиндра от времени t в случае приложения электрической нагрузки $V(z,t) = V(t) = V_0 \sin \theta t$ при различных частотах вынужденных колебаний θ (λ_{10} — собственные значения основного тона колебаний).

Результаты расчета показывают, что допущение о стационарном режиме вынужденных колебаний можно использовать только при существенном различии частотных характеристик внешнего воздействия и основного тона собственных значений цилиндра.

На рис. 2 показано изменение относительных перемещений по высоте цилиндра ($r = 1$, $\theta = 0{,}3\lambda_{10}$, $h = b$) в случае приложения осесимметричной электрической нагрузки на половине исследуемого элемента ($h_1 = h_3 = 0$, $h_2 = h_4 = h/2$) при различной толщине стенок цилиндра. Из рис. 2 следует, что на характер изменения исследуемых величин существенное влияние оказывает уменьшение толщины элемента.

Следует отметить, что построенный алгоритм позволяет получать решения для рассматриваемого цилиндра и при других физически реализуемых электрических и механических краевых условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гринченко В. Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. Киев: Наук. думка, 1989.
2. **Шульга Н. А.** Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. Киев: Наук. думка, 1990.
3. **Сеницкий Ю. Э.** Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 116–122.
4. **Ермолов И. Н.** Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля. М.: Машиностроение, 1986.
5. **Сеницкий Ю. Э.** Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57–63.
6. **Янке Е.** Специальные функции: Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М.: Наука, 1977.
7. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 5/XII 2007 г.