

## К РАСЧЕТУ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. Н. Шепеленко (Новосибирск)

Изложен численный метод решения следующих задач гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами: задачи о построении профиля по заданному на нем давлению, задачи о построении каверны за произвольной дугой с последующим замыканием каверны на искусственный замыкатель, форма которого заранее не известна, и задачи Рябушинского [1] для плоского и осесимметричного случаев. Все плоские задачи для верхней полуплоскости решены с учетом силы тяжести, задача Рябушинского для осесимметричного случая — с учетом сил поверхностного натяжения. Учет сил поверхностного натяжения и силы тяжести (для верхней полуплоскости) для плоской задачи Рябушинского осуществлен в работе [2].

Алгоритм решения перечисленных выше плоских задач во многом сходен с тем, который был предложен в работе [2]. Отличие состоит в способе правки свободной границы, занимающем центральное место по значению в решении такого рода задач. В ранее опубликованных работах, посвященных численному решению задач гидродинамики со свободными границами (см., например, [3, 4]), описание способа правки свободной границы, как правило, отсутствует.

Преимущество численного метода решения плоских задач со свободными границами перед аналитическим, базирующимся на аппарате теории аналитических функций, состоит в том, что он без существенных изменений может быть применен к расчету аналогичных осесимметричных и сугубо пространственных задач. Пример такого расчета — расчет осесимметричной задачи Рябушинского приведен в конце работы. Применяемый метод, в отличие от приближенного метода Гарабедяна П. Р. [5], позволил получить решение этой задачи для сравнительно широкого класса форм кавитаторов.

1. Полностью метод решения иллюстрируется на задаче построения плоского профиля по заданному на нем давлению, которая ранее без учета сил тяжести была решена Л. И. Мальцевым [6]. Всяду ниже течение предполагается потенциальным, установившимся. В безразмерной записи уравнения такого течения имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -V_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_x \quad (1.1)$$

$$P = \frac{2(p - p_0)}{\rho V_0^2} = 1 - V^2 - Gz, \quad G = \frac{2gS}{V_0^2} \quad (1.2)$$

Здесь  $V_0, p_0$  — скорость и давление набегающего потока на оси  $x$ ;  $V, p$ , скорость и давление в потоке;  $g$  — ускорение силы тяжести, направленной вдоль оси  $z$ ,  $S$  — неко-

торый линейный размер. Число кавитации  $\sigma$  с давлением  $P$  связано соотношением  $\sigma = -P^0$ , где  $P^0$  — давление в каверне.

Решение задачи разыскивается внутри четырехугольника  $D$ , образованного (фиг. 1) осью  $x$ , искомым профилем, прямыми  $C_1, C_3$ , параллельными оси  $z$  и отстоящими на расстоянии  $\gamma$  от начала координат, и линией тока  $C_2$ , проходящей через точку  $(\gamma, R)$ . Величины параметров  $\gamma, R$  находятся из асимптотики течения: искомой профиль заменяется окружностью такого же диаметра и параметры  $\gamma, R$  выбираются таким образом, чтобы компонента скорости  $V_x$  в точках  $(\gamma, 0)$ ,  $(0, R)$  отличалась от скорости набегающего потока на заданную малую величину. Пренебрегая этой величиной, будем иметь

$$V_x = 1 \text{ на } C_1, C_2, C_3 \quad (1.3)$$

Если принять ось  $x$  и искомый профиль за нулевую линию тока, то условие (1.3) при помощи второго из уравнений (1.1) легко привести к виду

$$\psi = z \text{ на } C_1, C_3, \quad \psi = R \text{ на } C_2, \quad \psi = 0 \text{ на } C \quad (1.4)$$

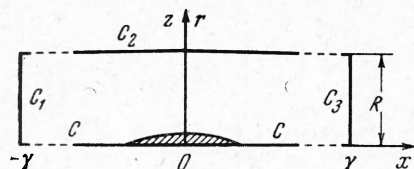
Задачу удобно решать во вспомогательной плоскости  $x\psi$ , ибо в этой плоскости область изменения переменных известна. Искомой будем считать функцию  $z(x, \psi)$ . Совершив переход к переменным  $x, \psi$ , получим для  $z$  следующее уравнение:

$$az_{xx} - 2bz_{x\psi} + cz_{\psi\psi} = 0, \quad a = z_\psi^2, \quad b = z_x z_\psi, \quad c = 1 + z_x^2 \quad (1.5)$$

Скорость потока через функцию  $z(x, \psi)$  выражается формулой

$$V^2 = \frac{1 + z_x^2}{z_\psi^2} \quad (1.6)$$

Область  $D$  при этом перейдет в прямоугольник  $\omega (-\gamma \leq x \leq \gamma, 0 \leq \psi \leq R)$ . Заметим, что особенность якобиана преобразования в критических точках течения влияет на решение задачи лишь в незначительной окрестности этих точек.



Фиг. 1

Задача, таким образом, сводится к решению в области  $\omega$  уравнения (1.5) при следующих граничных условиях (фиг. 2):

$$z = \psi \text{ на } \Gamma \quad (1.7)$$

$$P(x) - 1 + \frac{1 + z x^2}{z \psi^2} + Gz = 0 \text{ на } \Gamma^* \quad (1.8)$$

где  $P(x)$  — заданное давление.

Алгоритм решения задачи состоит в попеременном интегрировании уравнения (1.5) при фиксированной свободной границе и краевых условиях (1.7) и в пересчете свободной границы по условию (1.8). Итерации прекращаются после того, как искомые величины и характеристики потока перестанут меняться. Их предельное значение берется в качестве решения задачи [2].

Для интегрирования уравнения (1.5) используются схемы дробных шагов, обладающие свойством полной аппроксимации, например схема Дугласа [7,8]

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(z^{n+1/2} - z^n) &= \varepsilon [a^n \Lambda_{11} z^{n+1/2} - (2b^n \Lambda_{12} - c^n \Lambda_{22}) z^n] + \\ &+ (1 - \varepsilon) [(a^n \Lambda_{11} - 2b^n \Lambda_{12}) z^n + c^n \Lambda_{22} z^{n+1/2}] \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\tau^{-1}(z^{n+1} - z^{n+1/2}) = [\varepsilon a^n \Lambda_{22} + (1 - \varepsilon) a^n \Lambda_{11}] (z^{n+1} - z^n)$$

или схема стабилизирующего оператора [7,9,10]

$$\tau^{-1}(E - \mu \Lambda_{11})(E - \mu \Lambda_{22})(z^{n+1} - z^n) = (a^n \Lambda_{11} - 2b^n \Lambda_{12} + c^n \Lambda_{22}) z^n \quad (1.10)$$

Здесь  $\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{22}$  — центральные разностные операторы,  $E$  — единичный оператор. Схемы реализуются трехточечной прогонкой по направлениям  $x$  и  $\psi$ . В качестве начальной интегральной поверхности берется линейчатая поверхность

$$z^\bullet(x, \psi) = \left( i - \frac{z^\circ(x, 0)}{K} \right) \psi + z^\circ(x, 0) \quad (1.11)$$

где  $z^\circ(x, 0)$  — уравнение начальной нулевой линии тока.

Для пересчета свободной границы используется следующее разностное представление интеграла Бернулли (1.8):

$$1 + (z_x^k)^2 + (P - 1 + Gz) z_\psi^k (\xi z^{k+1} + z_\psi^k - \xi z^k) = 0 \quad (1.12)$$

$$P^k = P(x) \chi(k) \quad (1.13)$$

$$z_x = \frac{z_{i+10} - z_{i-10}}{h_i + h_{i+1}}, \quad z_\psi = \xi z_{i0} + \eta z_{i1} + \zeta z_{i2} \quad (1.14)$$

$$\xi = -(\eta + \zeta), \quad \eta = (l_1 + l_2) / l_1 l_2, \quad \zeta = -1 / \eta l_2^2$$

Здесь  $h_i$  — шаг по оси  $x$ ;  $l_j$  — шаг по оси  $\psi$ ;  $k$  — номер корректировки профиля;  $\chi(k)$  — положительная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\chi(0) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \chi(k) = 1$$

Вместо явной схемы (1.12) для корректировки профиля можно применять неявную схему [2]

$$1 + z_x^k z_x^{k+1} + (P - 1 + Gz) z_\psi^k (\xi z^{k+1} + z_\psi^k - \xi z^k) = 0 \quad (1.15)$$

осуществляя корректировку однократной прогонкой этого соотношения вдоль свободной границы.

Счет задачи организован следующим образом. Положив  $z^\circ(x, 0) = 0$ , интегрируем уравнение (1.5) по схеме (1.9) или (1.10), затем либо по формуле (1.12) явным счетом, либо по схеме (1.15) прогонкой производится первая корректировка профиля. После этого идет многократное повторение следующего счетного цикла — интегрирование уравнения (1.5) по схеме (1.9) или (1.10) при граничных условиях (1.7) и условии

$$z = z^k(x, 0) \text{ на } \Gamma^* \quad (1.16)$$

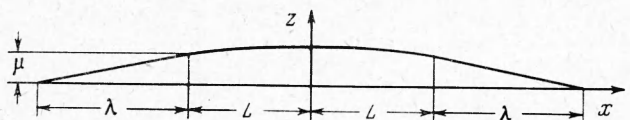
где  $z^k(x, 0)$  — уравнение профиля после  $k$ -й корректировки и корректировка профиля по условию (1.8) в реализации (1.12) или (1.15). Счет прекращается после установления.

Интегрирование уравнения (1.5) (решение задачи Дирихле) для каждой корректировки профиля проводится неполностью, достаточно двух-трех итераций по параметру

т. Расчеты проводились при значениях параметров задачи  $\tau = 0.2$ ,  $\gamma = 10\beta$ ,  $\beta = 2.5$ ,  $R = 10$ . Функция  $\chi(k)$  выбрана в виде

$$\chi(k) = \frac{v^k - 1}{v^k}, \quad v = 1.04 \quad (1.17)$$

Сетка в плоскости  $(x, \psi)$  неравномерна, сетка по  $\psi$  сгущается к оси  $x$ , сетка по  $x$  сгущается в критических точках течения и в задачах с каверной в концах каверны<sup>1</sup>



Фиг. 3

В качестве теста была сосчитана следующая задача. Было взято аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина невесомой жидкостью по схеме с зеркалом [11, 12], подсчитано давление между критическими точками и по этому давлению восстановлен профиль. Геометрия задачи взята следующей (см. фиг. 3):  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\sigma = 0.4$ . Расчеты (см. табл. 1) проведены дважды, с использованием для корректировки профиля схемы (1.12) и схемы (1.15), различия в результатах наблюдаются лишь в четвертом знаке после запятой (в таблице проставлен результат, полученный с использованием схемы (1.12)). Последние два столбца таблицы содержат результаты расчетов с учетом силы тяжести:  $G = 0.1962$ , что при  $S = 1$  м соответствует скорости набегающего потока, равной 10 м/сек.

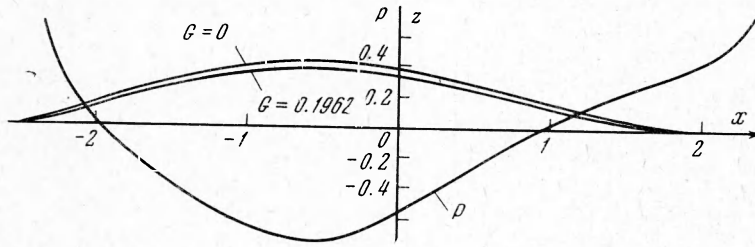
Таблица 1

| Аналитическое решение |        |        | Численное решение |        |        |        |
|-----------------------|--------|--------|-------------------|--------|--------|--------|
| x                     | z      | V      | z                 | V      | z      | V      |
| 0.000                 | 0.2540 | 1.1832 | 0.2518            | 1.1832 | 0.2242 | 1.1644 |
| 0.026                 | 0.2540 | 1.1832 | 0.2517            | 1.1832 | 0.2241 | 1.1644 |
| 0.080                 | 0.2536 | 1.1832 | 0.2513            | 1.1832 | 0.2233 | 1.1645 |
| 0.159                 | 0.2523 | 1.1832 | 0.2501            | 1.1832 | 0.2227 | 1.1645 |
| 0.261                 | 0.2494 | 1.1832 | 0.2473            | 1.1832 | 0.2202 | 1.1648 |
| 0.380                 | 0.2441 | 1.1832 | 0.2423            | 1.1832 | 0.2157 | 1.1651 |
| 0.506                 | 0.2360 | 1.1832 | 0.2347            | 1.1832 | 0.2039 | 1.1657 |
| 0.625                 | 0.2256 | 1.1832 | 0.2250            | 1.1832 | 0.2001 | 1.1665 |
| 0.724                 | 0.2142 | 1.1832 | 0.2146            | 1.1832 | 0.1906 | 1.1673 |
| 0.792                 | 0.2044 | 1.1832 | 0.2060            | 1.1832 | 0.1827 | 1.1679 |
| 0.817                 | 0.2000 | 1.1832 | 0.2019            | 1.1832 | 0.1790 | 1.1682 |
| 1.095                 | 0.1444 | 1.0475 | 0.1423            | 1.0475 | 0.1230 | 1.0359 |
| 1.303                 | 0.1027 | 0.9986 | 0.0994            | 0.9986 | 0.0838 | 0.9904 |
| 1.465                 | 0.0703 | 0.9589 | 0.0662            | 0.9599 | 0.0540 | 0.9543 |
| 1.592                 | 0.0450 | 0.9232 | 0.0404            | 0.9232 | 0.0313 | 0.9199 |
| 1.688                 | 0.0257 | 0.8839 | 0.0207            | 0.8839 | 0.0146 | 0.8823 |
| 1.758                 | 0.0119 | 0.8360 | 0.0066            | 0.8360 | 0.0030 | 0.8357 |
| 1.801                 | 0.0032 | 0.7642 | 0.0090            | 0.8149 | 0.0000 | 0.8473 |
| 1.817                 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000            | 0.8382 | 0.0000 | 0.8677 |
| 2.326                 |        | 0.9394 |                   | 0.9466 |        | 0.9544 |
| 3.383                 |        | 0.9779 |                   | 0.9800 |        | 0.9828 |
| 4.631                 |        | 0.9891 |                   | 0.9907 |        | 0.9920 |
| 5.952                 |        | 0.9936 |                   | 0.9951 |        | 0.9958 |
| 7.308                 |        | 0.9958 |                   | 0.9972 |        | 0.9976 |
| 8.682                 |        | 0.9970 |                   | 0.9983 |        | 0.9985 |
| 10.067                |        | 0.9978 |                   | 0.9989 |        | 0.9991 |

На фиг. 4 проиллюстрированы результаты счета профиля по произвольно заданному давлению (график давления начерчен от руки на миллиметровке) с учетом и без учета силы тяжести.

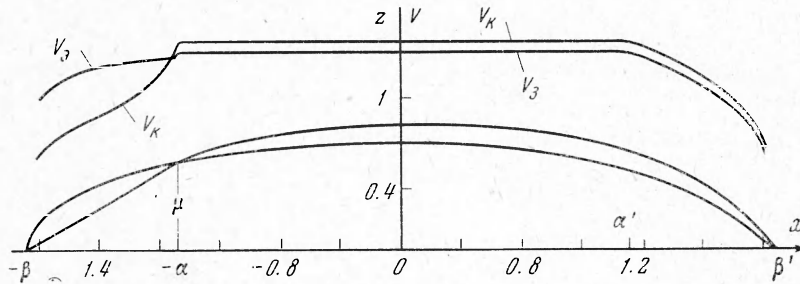
<sup>1</sup> В тестовых расчетах (табл. 1) сетка по  $x$  переносится с аналитического решения.

2. Аналогично может быть решена задача о построении каверны заданной длины за произвольной дугой. Замыкание каверны производится при помощи искусственного замыкателя, форма которого заранее не известна. Задача решается по общей схеме, изложенной выше.



Фиг. 4

Пусть  $W(x)$ ,  $x \in (-\beta, -\alpha)$  (фиг. 5) — уравнение дуги кавитатора. В качестве начального профиля возьмем прямую, соединяющую точки  $(-\alpha, \mu)$  и  $(\beta', 0)$ .



Фиг. 5

Корректировку свободной границы (границы каверны и замыкателя) будем проводить по одной из схем (1.12) или (1.15), вычисляя

$$Q^k = p^k - 1$$

по формуле

$$Q^k = Q^{*k}, \quad x \in (-\alpha, \alpha'), \quad Q^k = Q^{*k} \cdot v(x), \quad x \in (\alpha', \beta') \quad (2.1)$$

$$Q^{*k} = - \left[ Gz + \frac{1 + z_x^2}{z_\psi (z_\psi + \xi (z^* - z))} \right]_{x=-\alpha+h}^k \quad (2.2)$$

$$z^* = W(-\alpha) + hW'(-\alpha)$$

Здесь  $h$  — ближайший справа к точке  $-\alpha$  — шаг по оси  $x$ ;  $z_x, z_\psi$  имеют вид (1.14);  $v(x)$  — положительная монотонная функция с непрерывной производной, причем

$$v(\alpha') = 1, \quad v(\beta') = 0$$

Условие (2.2) есть условие гладкого сопряжения свободной поверхности с кавитатором, условие (2.1) — условие постоянства давления внутри каверны.

На фиг. 5 изображены форма каверны и замыкателя для двух дуг (кавитаторов) соответственно наклонной прямой и дуги эллипса

$$W(x) = \mu(\beta + x) / (\beta - \alpha), \quad W(x) = \mu \sqrt{(\beta^2 - x^2) / (\beta^2 - \alpha^2)}$$

Для расчетов было принято

$$v(x) = (\beta' - x) / (\beta' - \alpha'), \quad \alpha = \alpha' = 1.5, \quad \beta = \beta' = 2.5, \quad \mu = 0.5773$$

Корректировка свободной границы проводилась по схеме (1.15). Число кавитации  $\sigma$  равно соответственно 0,8970 и 0,6969. Сила тяжести при счете не учитывалась.

3. Частным случаем только что рассмотренной задачи является задача о кавитационном течении тяжелой жидкости около произвольной дуги по схеме с зеркалом (задача Рябушинского). На фиг. 6 изображена форма свободной поверхности, полученная при обтекании клина и дуги эллипса без учета силы тяжести.

С учетом силы тяжести были просчитаны два случая обтекания дуги эллипса. Результаты сведены в табл. 2. Случай  $G = 0,7848$  соответствует при  $S = 1$  м скорости набегающего потока, равной 5 м/сек. Через  $H$  обозначена максимальная высота каверны.

Таблица 2

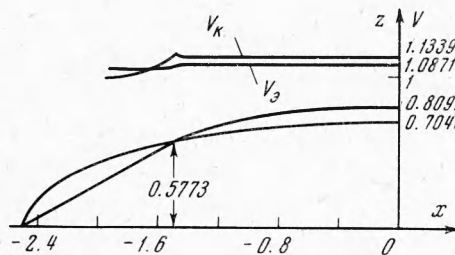
| $G$    | $H$    | $V(O, H)$ | $\sigma$ |
|--------|--------|-----------|----------|
| 0.0000 | 0.5740 | 1.2368    | 0.5297   |
| 0.1962 | 0.5705 | 1.2328    | 0.6318   |
| 0.7848 | 0.5612 | 1.2225    | 0.9349   |

Корректировка профиля проводилась по схеме (1.12)

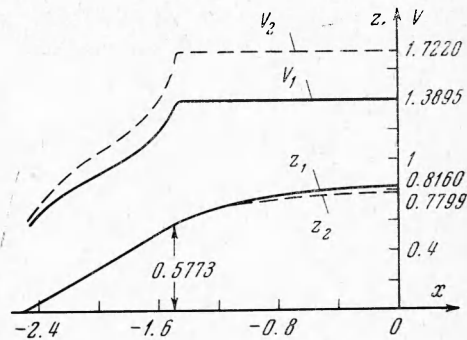
Заметим, что если в качестве  $C_2$  (фиг. 1) взять не линию тока, а прямую  $z = R$ , то при произвольном  $R$  будем иметь кавитационное течение в канале. На фиг. 7 изображены для сравнения формы

свободной поверхности, возникающие при кавитационном обтекании клина, по схеме с зеркалом в полуплоскости (сплошной линией) и в канале (пунктирной линией) шириной  $2R = 4$ . Число кавитации  $\sigma$  равно соответственно 0.9309 и 1.9704

4. Изложенный выше численный метод решения плоских задач можно использовать для решения аналогичных осесимметричных задач. Для примера рассмотрим задачу Рябушинского для осесимметричного случая с учетом поверхностного натяжения.



Фиг. 6



Фиг. 7

В этом случае вместо уравнений (1.1), (1.2) будем иметь следующие:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -r \frac{\partial \phi}{\partial r} = -rV_r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = r \frac{\partial \phi}{\partial x} = rV_x \tag{4.1}$$

$$P = 1 - V^2 \tag{4.2}$$

Если каверну считать оболочкой равного сопротивления [13], то условие на ней можно записать так:

$$V^2 = \sigma + 1 + T(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{4.3}$$

Здесь  $T$  — удельное натяжение,  $\kappa_1, \kappa_2$  — главные кривизны поверхности каверны. Условия (1.4) теперь примут вид

$$\psi = 1/2 r^2 \text{ на } C_1, C_3, \quad \psi = 1/2 R^2 \text{ на } C_2, \quad \psi = 0 \text{ на } C \tag{4.4}$$

а уравнение для функции  $z(x, \psi) = r^2(x, \psi)$ , см. (1.5), изменит лишь коэффициент  $c$

$$c = 4z + z_x^2 \tag{4.5}$$

скорость потока выразится формулой

$$V^2 = \frac{4z + z_x^2}{z z_\psi^2} \tag{4.6}$$

Задача сводится к решению уравнения (1.5) в области  $\omega'(-\gamma \leq x \leq \gamma, 0 \leq \psi \leq 1/2 R^2)$  уравнения (1.5) с учетом (4.5) при следующих граничных условиях (фиг. 2):

$$z = 2\psi \text{ на } \Gamma, \quad z = F_q(x) = W_q^2(x) \text{ на } \Gamma_q, \quad q = 1, 2 \tag{4.7}$$

Здесь  $W_q(x)$  — уравнения кавитатора и замыкателя, и условия (4.3) на  $\Gamma'$ . Для интегрирования уравнения (1.5), (4.5) используется одна из схем дробных шагов (1.9), (1.10), начальная интегральная поверхность задается формулой

$$z^\circ(x, \psi) = 2 \left( 1 - \frac{z^\circ(x, 0)}{R^2} \right) \psi + z^\circ(x, 0) \tag{4.8}$$

