ПМТФ, № 3, 1960

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА С ПОЛОСТЬЮ, НЕПОЛНОСТЬЮ НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Б. А. Костандян

(Москва)

Рассматривается устойчивость вращательных движений твердого тела, имеющего цилиндрическую полость, частично наполненную несжимаемой однородной жидкостью.

Жуковским [1] подробно рассмотрена задача о движении твердого тела с полостями, заполненными несжимаемой жидкостью. В случае идеальной несжимаемой жидкости точное решение задачи об устойчивости твердого тела получено Н. Г. Четаевым [2] при полном наполнении и в предположении, что жидкость в начале движения покоится в полости.

В. В. Румянцев [3], исходя из полных уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, полностью или частично наполненной несжимаемой жидкостью, методом Ляпунова — Четаева получил достаточные условия устойчивости.

Теория движения твердого тела с полостью, не полностью наполненной жидкостью, в случае малых колебаний около положения равновесия сосуда с жидкостью рассматривалась в работах Г. Е. Павленко, Л. Н. Сретенского, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича, Н. Н. Моисеева.

Г. С. Нариманов [4] вывел уравнения малых возмущений стационарного вращения симметричного гироскопа, цилиндрическая полость которого заполнена жидкостью. Полагая толщину слоя жидкости достаточно малой по сравнению с параметрами полости и пренебрегая зависимостью величин параметров относительного движения жидкости от величины r, автор свел задачу к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

С. Л. Соболев [5] исследовал общую теорию движения волчка с симметричной полостью, полностью наполненной жидкостью, в линейной постановке [1].

В работе Стьювертсона [6] исследуется устойчивость тяжелого волчка, содержащего цилиндрическую полость, частично наполненную жидкостью, для малых перемещений относительно вертикального вращения твердой оболочки; рассматривается линеаризованное уравнение; влияние силы тяжести жидкости не учитывается; зависимость от времени всех величин, характеризующих движения системы, берется в виде $\exp(i\delta t)$. Стьювертсон отмечает, что уравнение удовлетворяется, если предположение относительно зависимости вида $\exp(i\delta t)$ возможно оправдать.

В работе исследуется устойчивость волчка с полостью, неполностью наполненной несжимаемой жидкостью, где используются некоторые положения, содержащиеся в работах С. Л. Соболева и К. Стьювертсона.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тяжелый волчок, вращающийся вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω. Пусть волчок имеет цилиндрическую полость, неполностью наполненную несжимаемой жидкостью.

Как известно, если полость имеет форму тела вращения и вращается вокруг оси симметрии, то содержащаяся идеальная жидкость остается в покое. В действительности все жидкости имеют вязкость и увлекаются вращением твердой оболочки. Предположим, что в невозмущенном движении (равномерное вращение вокруг оси симметрии волчка) жидкость вращается как одно твердое тело вместе с волчком. Будем рассматривать малые движения относительно динамического равновесия. В такой постановке движение жидкости по отношению к твердой оболочке считается малым, и в этом относительном движении силы вязкости отбрасываются, т. е. жидкость рассматривается как идеальная.

---

[1] Работа С. Л. Соболева известна автору в рукописи 1945 г. по фондам Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.

Введем три системы координатных осей в неподвижной точке 0 с общим началом:

а) неподвижная система координат XYZ; ось Z, направленная вертикально вверх, и оси X и Y, лежащие в горизонтальной плоскости, составляют правую тройку;

в) подвижная система xyz; ось z направлена вертикально вверх, и оси x и y расположены в горизонтальной плоскости и вращаются вокруг оси z с угловой скоростью ω;

с) подвижная система $x'y'z'$; ось z' направлена по оси симметрии волчка, а оси x' и y' вращаются вокруг z' с угловой скоростью ω.

Если ω достаточно велика, свободную поверхность можно рассматривать как цилиндрическую (на самом деле она будет параболоидом вращения с малым параметром).

2. Уравнение движения. Пусть направляющие косинусы оси z' относительно XYZ будут l_1, m_1, n_1. В положении динамического равновесия $l_1 = m_1 = 0$, $n_1 = 1$. Если считать малыми отклонения от равномерного движения, то уравнение движения волчка будет

$$A_1\ddot{l}_1 + C_1\omega\dot{m}_1 - M_Y = 0, \qquad A_1\ddot{m}_1 - C_1\omega\dot{l}_1 + M_X = 0 \tag{2.1}$$

где A_1 и C_1 — главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки 0, M_X и M_Y — проекции момента всех сил, действующих на оболочку относительно точки 0. Момент действующих сил состоит из момента силы тяжести всей системы и силы давления жидкости. Следовательно,

$$M_X = -M_1gh_1m_1 + \iint\limits_S p\,[Y\cos(nZ) - Z\cos(nY)]\,dS$$

$$M_Y = M_1gh_1l_1 + \iint\limits_S p\,[Z\cos(nX) - X\cos(nZ)]\,dS \tag{2.2}$$

Здесь S — поверхность соприкасания жидкости и твердой оболочки, p — давление жидкости, M — масса оболочки, h_1 — расстояние центра тяжести оболочки от неподвижной точки 0.

Уравнения малых движений жидкости относительно вращающихся осей xyz будут

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v = -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u = -\frac{\partial p_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} \tag{2.3}$$

где (u, v, w) — вектор относительной скорости, величина p_1 связана с давлением по формуле

$$p_1 = \frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \tag{2.4}$$

(g — ускорение силы тяжести). К уравнениям (2.3) нужно присоединить уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.5}$$

Подставляя выражение p из (2.4) в (2.2) с точностью до малых высшего порядка, будем иметь

$$M_X = -M_1gh_1m_1 + \rho\iint\limits_S p_1\,[Y\cos(nZ) - Z\cos(nY)]\,dS +$$

$$+ \iiint\limits_V (-\rho gY - \omega^2\rho YZ)\,dV \tag{2.6}$$

$$M_Y = M_1gh_1l_1 + \rho\iint\limits_S p_1\,[Z\cos(nX) - X\cos(nZ)]\,dS + \iiint\limits_V (\rho gX + \omega^2\rho XZ)\,dV$$

Здесь имеется в виду, что свободная поверхность является цилиндром, и давление на ней постоянно. В правой части формул (2.6) объемные интегралы распространены по области, занятой жидкостью. Для этих объемных интегралов получим следующие значения

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_V \rho Y dV = hM_2 m_1, && \iiint \rho YZ dV = A_{2YZ} \\ &\iiint\limits_V \rho X dV = hM_2 l_1, && \iiint \rho XZ dV = A_{2XZ} \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Здесь h — расстояние центра тяжести жидкости от неподвижной точки 0 в невозмущенном движении, M_2 — масса жидкости, A_{2YZ}, A_{2XZ}— центробежные моменты инерции цилиндрического слоя жидкости относительно точки 0.

Для точки 0 имеем главные моменты инерции, поэтому тензор инерции относительно осей XYZ можем вычислить через главные моменты и направляющие косинусы этих осей.

С точностью до малых высшего порядка

$$A_{2XZ} = (A_2 - C_2)\, l_1, \quad A_{2YZ} = (A_2 - C_2)\, m_1 \qquad (2.8)$$

где A_2, A_2, C_2 — главные моменты инерции слоя жидкости относительно точки 0. Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.6), получим

$$\begin{aligned} M_X = & -(M_1 h_1 + M_2 h)\, g m_1 + (A_2 - C_2)\, \omega^2 m_1 + \rho \iint p_1 [Y \cos(nZ) - \\ & - Z \cos(nY)]\, dS \end{aligned} \qquad (2.9)$$

$$M_Y = (M_1 h_1 + M_2 h)\, g l_1 + (A_2 - C_2)\, \omega^2 l_1 + \rho \iint p_1 [Z \cos(nX) - X \cos(nZ)]\, dS$$

Если обозначить через l, m, n направляющие косинусы оси z' по осям xyz, то $n = n_1$ и $l_1 + i m_1 = (l + im)\, e^{i\omega t}$. Умножая первое уравнение системы (2.1) на i и складывая со вторым, получим

$$A_1 \ddot{\xi} - (C_1 - 2A_1)\, \omega i \dot{\xi} + L\omega^2 \xi - \rho \iint\limits_S \mu p_1 dS = 0 \qquad (2.10)$$

Здесь

$$\xi = l + im, \qquad L = C_1 - A_1 + C_2 - A_2 - \frac{g}{\omega^2}(h_1 M_1 + h M_2) \qquad (2.11)$$

$$\mu = z\,[\cos(nx) + i \cos(ny)] - (x + iy) \cos(nz)$$

В невозмущенном движении предполагается, что жидкость не движется относительно оболочки.

В возмущенном движении нормальная составляющая скорости жидкости $(u,\ v,\ w)$ на поверхности S должна совпадать с нормальной составляющей скорости твердой оболочки на той же поверхности.

Скорости твердой оболочки относительно координат xyz будут $\vec{v} = (\dot{l} z,\ \dot{m} z, -\dot{l} x - \dot{m} y)$;следовательно, получим соотношение

$$\begin{aligned} u_n \equiv & \; u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz) = \\ = & \; \dot{l}\,[z \cos(nx) - x \cos(nz)] + \dot{m}\,[z \cos(ny) - y \cos(nz)] \end{aligned} \qquad (2.12)$$

которое можно записать в виде

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\,\bar{\mu} + \frac{d\bar{\xi}}{dt}\,\mu\right) \qquad \text{на } S \qquad (2.13)$$

Предполагая, что свободная поверхность состоит из одних и тех же частиц во время движения, и принимая на этой поверхности $p = \mathrm{const}$, получим

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + u\frac{\partial p_1}{\partial x} + v\frac{\partial p_1}{\partial y} + w\frac{\partial p_1}{\partial z} - gw + \omega^2(xu + yv) = 0 \qquad (2.14)$$

$$p = \mathrm{const}$$

Если ω — достаточно большое, как уже отметили, свободная поверхность с точностью до малых высшего порядка будет иметь форму цилиндра, и при таких значениях ω в возмущенном движении волновое движение свободной поверхности не рассматривается. При таких предположениях получается условие устойчивости вертикального вращения волчка с жидкостью.

Предполагаем, что свободная поверхность мало отличается от цилиндрической формы. Для проверки этого предположения нужно исследовать волновое движение свободной поверхности и найти условие устойчивости ее формы. Возможно, что частоты колебаний свободной поверхности и волчка будут близки, и тогда амплитуда колебания свободной поверхности будет возрастать, нарушая тем самым цилиндрическую форму свободной поверхности.

Условие (2.14) с точностью до малых высшего порядка приводится к

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \omega^2(xu + yv) = 0 \qquad (2.15)$$

на свободной поверхности.

Пусть система — твердая оболочка + жидкость вращается вокруг оси симметрии, и в момент $t = t_0$ вся система получает некоторое возмущение ξ_0 и $\dot{\xi}_0$. Пусть начальная скорость жидкости будет такая же, как у твердого тела, т. е. $u_0 = \dot{l}_0 z$, $v_0 = \dot{m}_0 z$, $w_0 = -\dot{l}_0 x - \dot{m}_0 y$.

3. Так как в рассматриваемом случае уравнения движения и граничные условия линейные, то удобно использовать операционный метод для исключения времени. Пусть u — непрерывная и однозначная функция действительного аргумента t, определенная для $t \geqslant 0$. Образом этой функции называется интеграл

$$U = \lambda \int_0^\infty u e^{-\lambda t} dt \qquad (3.1)$$

где $\lambda = \alpha_1 + i\beta_1$ — комплексный параметр, функция $R(\lambda) = \alpha_1 > 0$ такая, что интеграл (3.1) сходится.

Применяя операцию (3.1) к уравнениям (2.3) и (2.5), получим

$$\lambda U - 2\omega V = -\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda u_0, \quad \lambda V + 2\omega U = -\frac{\partial P}{\partial y} + \lambda v_0 \qquad (3.2)$$

$$\lambda W = -\frac{\partial P}{\partial z} + \lambda w_0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \qquad (3.3)$$

Здесь через U, V, W, P и Ξ обозначены соответственно образы функций u, v, w, p_1 и ξ.

Граничные условия (2.13) и (2.15) преобразуются к виду

$$U_n = \frac{1}{2}\lambda\left[(\Xi - \xi_0)\bar{\mu} + (\bar{\Xi} - \bar{\xi}_0)\mu\right] \quad \text{на } S \qquad (3.4)$$

$$\lambda(P - p_{10}) + \omega^2(xU + yV) = 0 \qquad (3.5)$$

на свободной поверхности, где

$$P_{10} = \frac{1}{2}\omega^2 b^2 - \frac{p_0}{\rho} = \mathrm{const}.$$

Уравнение движения волчка (2.10) преобразуется к виду (3.6)

$$A_1(\lambda^2\Xi - \lambda^2\xi_0 - \lambda\dot{\xi}_0) - (C_1 - 2A_1)\omega i(\lambda\Xi - \lambda\xi_0) + L\omega^2\Xi - \rho\iint_S \mu P dS = 0$$

Из системы уравнений (3.2) находим

$$
\begin{gathered}
U=\frac{1}{\lambda^2+4\omega^2}\left(-\lambda\frac{\partial P}{\partial x}-2\omega\frac{\partial P}{\partial y}+\lambda^2 u_0+2\omega\lambda v_0\right)\\
V=\frac{1}{\lambda^2+4\omega^2}\left(2\omega\frac{\partial P}{\partial x}-\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+\lambda^2 v_0-2\omega\lambda u_0\right)\\
W=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial P}{\partial z}+w_0
\end{gathered}\tag{3.7}
$$

Подставляя значения U, V, W из (3.7) в (3.3) и имея в виду значения u_0, v_0 и w_0, получим

$$
\mathrm{L}(P)\equiv\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\left(1+\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0\tag{3.8}
$$

Для дальнейшего удобно воспользоваться цилиндрическими координатами $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r=z$. Если нормаль взять внешней по отношению к жидкости, то для μ получим

$$
\mu=ze^{i\theta}\quad\text{при } r=a,\qquad \mu=ze^{-i\theta}\quad\text{при } r=b,\qquad \mu=\pm re^{i\theta}\quad\text{при } z=h\pm c\tag{3.9}
$$

Здесь a и b — радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей, а $2c$ — высота цилиндрической полости.

В цилиндрических координатах граничные условия будут

$$
\begin{gathered}
\lambda r\frac{\partial P}{\partial r}+2\omega\frac{\partial P}{\partial\theta}=-\frac{1}{2}\lambda rz(\lambda^2+4\omega^2)\left[(\Xi-\xi_0)e^{-i\theta}+\right.\\
\left.+(\bar\Xi-\bar\xi_0)e^{i\theta}\right]+\frac{1}{2}r\lambda z(\lambda+2\omega i)\left[\dot\xi_0 e^{-i\theta}+\left(\frac{d\bar\xi}{dt}\right)_0 e^{i\theta}\right]\\
r=a
\end{gathered}\tag{3.10}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda r\frac{\partial P}{\partial r}+2\omega\frac{\partial P}{\partial\theta}-\frac{\lambda(\lambda^2+4\omega^2)}{\omega^2}P=\lambda P_{10}+\\
+\frac{1}{2}r\lambda z(\lambda+2\omega i)\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 e^{-i\theta}+\left(\frac{d\bar\xi}{dt}\right)_0 e^{i\theta}\right]\\
r=b
\end{gathered}\tag{3.11}
$$

При $z=h\pm c$ из (3.4) получим

$$
\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{r\lambda^2}{2}\left[(\Xi-\xi_0)e^{-i\theta}+(\bar\Xi-\bar\xi_0)e^{i\theta}\right]+\frac{r\lambda}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 e^{-i\theta}-\left(\frac{d\bar\xi}{dt}\right)_0 e^{i\theta}\right]\tag{3.12}
$$

Ищем решение уравнения (3.8) в виде

$$
P(r,\ \theta,\ z)=P_1(r,\ z)e^{-i\theta}+P_2(r,\ z)e^{i\theta}\tag{3.13}
$$

где P_1 и P_2 — функции от r и z. Тогда

$$
\mathrm{L}(P)=\mathrm{L}_1(P_1)e^{-i\theta}+\mathrm{L}_1(P_2)e^{i\theta}\tag{3.14}
$$

где

$$
\mathrm{L}_1(A)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)-\frac{A}{r^2}+\left(1+\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\tag{3.15}
$$

Таким образом, задача приводится к нахождению функций P_1 и P_2, которые удовлетворяют уравнению $\mathrm{L}_1(P_i)=0$ и соответствующим граничным условиям. Оказывается, что граничные условия (3.10), (3.11) и (3.12) также распадаются на две системы, в которые функции P_1 и P_2 входят независимо одна от другой. Такой подход будет характеризовать вынужденное движение жидкости. Другие решения уравнения (3.8) будут соответствовать собственному колебанию жидкости при нулевых граничных условиях, которые не влияют на опрокидывающую пару, действующую на твердую оболочку. На поверхности соприкасания жидкости и твердой оболочки $\mu = A(r, z)e^{i\theta}$, откуда, а также из (2.10), следует, что $P_2(r, z)$ не оказывает влияния на оболочку.

Граничные условия для P_1 будут

$$\lambda r \frac{\partial P_1}{\partial r} - 2\omega i P_1 = -\frac{a}{2}\lambda z(\lambda^2 + 4\omega^2)(\Xi - \xi_0) + \frac{a}{2}\lambda z(\lambda + 2\omega i)\dot{\xi}_0 \quad \text{при } r = a \tag{3.16}$$

В условии (3.11) p_{10} можно принять равным нулю, так как

$$\iint\limits_S \mu ds = 0 \tag{3.17}$$

На свободной поверхности для P_1 получится следующее условие

$$\lambda r \frac{\partial P_1}{\partial r} - \left[\frac{\lambda(\lambda^2 + 4\omega^2)}{\omega^2} + 2\omega i\right] P_1 = \frac{b}{2}\lambda z(\lambda + 2\omega i)\cdot\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 \quad \text{при } r = b \tag{3.18}$$

На торцах цилиндра функция P_1 должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{r\lambda^2}{2}(\Xi - \xi_0) - \frac{r\lambda}{2}\dot{\xi}_0 \quad \text{при } z = h \pm c \tag{3.19}$$

Таким образом, решение задачи приводится к решению уравнения (3.15) при граничных условиях (3.16), (3.18) и (3.19). Методом разделения переменных Фурье легко найти, что функции

$$r, \; r^{-1}, \; rz, \; [AI_1(\sqrt{\beta}kr) + BK_1(\sqrt{\beta}kr)](C\sin kz + D\cos kz)$$

являются решениями уравнений (3.15); здесь $I_1(\alpha)$, $K_1(\alpha)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода.

Составим такие комбинации этих функций, чтобы удовлетворялись граничные условия для P_1. Наиболее общее решение такого вида будет

$$P_1(r, z) = \frac{1}{2}rz[\lambda^2(\Xi - \xi_0) - \lambda\dot{\xi}_0] + \sum_k^\infty A_k[B_k I_1(\sqrt{\beta}kr)] +$$
$$+ C_k K_1(\sqrt{\beta}kr)]\cos k(z - h + c) + B_0 r + \frac{C_0}{r} \tag{3.20}$$
$$(b \leqslant z \leqslant a, \; |z - h| \leqslant c)$$

Граничное условие (3.19) удовлетворяется, если

$$k = \frac{\pi}{2c}(2j + 1) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Параметр β связан с λ формулой $\beta = 1 + 4\omega^2/\lambda^2$. Подставляя (3.20) в (3.16), получим

$$\frac{1}{2}az[\lambda^2(\Xi - \xi_0) - \lambda\dot{\xi}_0](\lambda - 2\omega i) + B_0 a(\lambda - 2\omega i) -$$
$$- \frac{C_0}{a}(\lambda + 2\omega i) + \sum_k^\infty A_k\Big\{\lambda a\frac{d}{dr}[B_k I_1(\sqrt{\beta}kr) +$$
$$+ C_k K_1(\sqrt{\beta}kr)]_{r=a} - 2\omega i[B_k I_1(\sqrt{\beta}ka) + C_k K_1(\sqrt{\beta}ka)] \times \tag{3.21}$$
$$\times \cos k(z - h + c)\Big\} = -\frac{1}{2}a\lambda z[(\lambda^2 + 4\omega^2)(\Xi - \xi_0) + (\lambda + 2\omega i)\dot{\xi}_0]$$

Разлагая z в ряды Фурье по косинусам в интервале $|z-h|\leqslant c$

$$z = h + \sum_k A_k \cos k(z-h+c), \qquad A_k = -\frac{2}{ck^2}$$

и приравнивая коэффициенты разложения, для определения неизвестных коэффициентов из (3.12), получим

$$B_0 a(\lambda-2\omega i) - \frac{C_0}{a}(\lambda+2\omega i) = -\frac{ha\lambda}{2}\{(\lambda^2+4\omega^2)(\Xi-\xi_0) + (\lambda+2\omega i)\xi_0 + (\lambda-2\omega i)[\lambda(\Xi-\xi_0)-\dot{\xi}_0]\} \tag{3.22}$$

$$B_k[\lambda\sqrt{\beta}kaI_0(\sqrt{\beta}ka) - I_1(\sqrt{\beta}ka)(\lambda+2\omega i)] - C_k[\lambda\sqrt{\beta}kaK_0(\sqrt{\beta}ka) + K_1(\sqrt{\beta}ka)(\lambda+2\omega i)] = -\lambda a[(\Xi-\xi_0)(\lambda^2+2\omega^2-\omega i\lambda)+2\omega i\dot{\xi}_0] \tag{3.23}$$

Подставляя (3.20) в (3.18), аналогично предыдущему, получим

$$B_0 b\left[-\lambda+\frac{\lambda(\lambda^2+4\omega^2)}{\omega^2}+2\omega i\right] + \frac{C_0}{b}\left[\lambda+\frac{\lambda(\lambda^2+4\omega^2)}{\omega^2}+2\omega i\right] = \frac{bh\lambda}{2}\left\{\lambda^2(\Xi-\xi_0)-\lambda\dot{\xi}_0-\left[2\omega i+\frac{\lambda(\lambda^2+4\omega^2)}{\omega^2}\right][\lambda(\Xi-\xi_0)-\dot{\xi}_0]-(\lambda+2\omega i)\xi_0\right\} \tag{3.24}$$

$$B_k\left[\lambda\sqrt{\beta}kbI_0(\sqrt{\beta}kb) - I_1(\sqrt{\beta}kb)\left(\lambda+2\omega i+\lambda\frac{\lambda^2+4\omega^2}{\omega^2}\right)\right] - C_k\left[\lambda\sqrt{\beta}kK_0(\sqrt{\beta}kb) + K_1(\sqrt{\beta}kb)\left(\lambda+2\omega i+\lambda\frac{\lambda^2+4\omega^2}{\omega^2}\right)\right] = -\frac{b}{2}(\Xi-\xi_0)\frac{\lambda^2}{\omega^2}(\lambda^3+3\omega^2\lambda+2\omega^3 i) - \frac{\lambda^2 b}{\omega^2}(\lambda^2+4\omega^2)\dot{\xi}_0. \tag{3.25}$$

Из (3.22), (3.23), (3.24) и (3.25) определяются все неизвестные коэффициенты. Определитель системы (3.22) и (3.24)

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{\lambda^2+4\omega^2}{\omega^2}\left[(\omega^2+\lambda^2-2\lambda\omega i)\frac{a}{b}+\frac{b}{a}(\lambda^2-\omega^2+2\lambda\omega i)\right] \tag{3.26}$$

Коэффициенты B_0 и C_0 имеют следующее выражение

$$B_0 = -\frac{h(\Xi-\xi_0)\lambda}{2\omega^2\Delta_1(\lambda)}(\lambda^3+5\omega^2\lambda+2\omega^3 i)\left[\frac{2a}{b}(\lambda^2+2\omega^2-i\omega\lambda) - \frac{b\lambda}{a}(\lambda+2\omega i)\right]+\varphi_0(\lambda) \tag{3.27}$$

$$C_0 = -\frac{abh(\Xi-\xi_0)}{2\omega^2\Delta_1(\lambda)}\lambda(3\lambda^2+4\omega^2-4\omega i\lambda)(3\omega^2\lambda+2\omega^3 i+\lambda^3)+\psi_0(\lambda)$$

где $\varphi_0(\lambda)$ и $\psi_0(\lambda)$ — члены, не зависящие от Ξ. Аналогично определяются B_k и C_k из системы (3.23) и (3.25), определитель которой

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{3.28}$$

где

$$a_{11}(\lambda) = \lambda\sqrt{\beta}kaI_0(\sqrt{\beta}ka) - I_1(\sqrt{\beta}ka)(\lambda+2\omega i)$$

$$a_{12}(\lambda) = -\lambda\sqrt{\beta}kaK_0(\sqrt{\beta}ka) - K_1(\sqrt{\beta}ka)(\lambda+2\omega i)$$

$$a_{21}(\lambda) = \lambda\sqrt{\beta}kbI_0(\sqrt{\beta}kb) - I_1(\sqrt{\beta}kb)\left(\lambda+2\omega i+\lambda\frac{\lambda^2+4\omega^2}{\omega^2}\right) \tag{3.29}$$

$$a_{22}(\lambda) = -\lambda\sqrt{\beta}kbK_0(\sqrt{\beta}kb) - K_1(\sqrt{\beta}kb)\left(\lambda+2\omega i+\lambda\frac{\lambda^2+4\omega^2}{\omega^2}\right)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что корни $\Delta_1(\lambda)$ лежат на мнимой оси.

Значениям корней $\Delta_1(\lambda) = 0$ и $\Delta(\lambda) = 0$ соответствуют собственные колебания жидкости.

4. Вычислим поверхностный интеграл в уравнении (3.6), которое характеризует влияние относительных движений жидкости на оболочку волчка. На поверхности соприкасания жидкости и твердой оболочки μ содержит множитель $\exp(i\theta)$; поэтому

$$\iint\limits_S \mu P dS = \iint\limits_{S_1} zP_1(a, z)\,dS - \iint\limits_{S_2} rP_1(r, h+c)\,dS + \iint\limits_{S_3} rP_1(r, h-c)\,dS \qquad (4.1)$$

где S_1 область $r = a$, $|z-h| \leqslant c$, а S_2 и S_3 область $b \leqslant r \leqslant a$.

Интеграл

$$\iint\limits_{S_1} zP_1(a, z)\,dS = 2\pi a \int\limits_{h-c}^{h+c} zP_1(a, z)\,dz = \qquad (4.2)$$

$$= 4a\pi \left\{ \frac{a}{6}[\lambda^2(\Xi - \xi_0) - \lambda\xi_0]\, 2c(3h^2 - c^2) + \right.$$

$$\left. + \left(B_0 a + \frac{C_0}{a} z\right) 2hc + \frac{2}{c} \sum_k^{\infty} \frac{1}{k^4} [B_k I_1(\sqrt{\beta}\, ka) + C_k K_1(\sqrt{\beta}\, ka)] \right\}$$

Остальные два интеграла в левой части (4.1)

$$-\iint\limits_{S_2} rP_1(r, h+c)\,dS + \iint\limits_{S_3} rP_1(r, h-c)\,dS = \qquad (4.3)$$

$$= \frac{\pi c}{2}(a^4 - b^4)[\lambda^2(\Xi - \xi_0) - \lambda\xi_0] -$$

$$- 16\pi \sum_k^{\infty} \frac{1}{\beta k^4} \{B_k[\sqrt{\beta}\, kr^2 I_0(\sqrt{\beta} kr) - 2rI_1(\sqrt{\beta} kr)] -$$

$$- C_k[\sqrt{\beta}\, kr^2 K_0(\sqrt{\beta}\, kr) + 2rK_1(\sqrt{\beta} kr)]\}_b^a$$

Подставляя значение интеграла (4.1) в уравнение (3.6), получим следующее характеристическое уравнение

$$A_1\lambda^2 - (C_1 - 2A_1)\,\omega i\lambda + L\omega^2 - \frac{4}{3}\rho\pi a^2 c(3h^2 - c^2)\lambda^2 +$$

$$+ \lambda \frac{2\pi h^2 c a \rho}{\omega^2 \Delta_1(\lambda)} \left\{ (\lambda^3 + 5\omega^2\lambda + 2\omega^3 i)\left[\frac{2a}{b}(\lambda^2 + 2\omega^2 - i\omega\lambda) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{b}{a}(\lambda + 2\omega i)\lambda\right] a - b\lambda(3\lambda^2 + 4\omega^2 - 4\omega i\lambda)(\lambda^3 + 3\omega^2\lambda + 2\omega^3 i) \right\} +$$

$$+ \rho \frac{\pi c}{2}(a^4 - b^4) - \frac{8\pi\rho}{c\Delta(\lambda)} \sum_k^{\infty} \frac{1}{\beta k^4} \{[(\beta + 2)\, aI_1(\sqrt{\beta}\, ka) -$$

$$- \sqrt{\beta}\, ka^2 I_0(\sqrt{\beta}\, ka) + \sqrt{\beta}\, kb^2 I_0(\sqrt{\beta}\, kb) - 2bI_1(\sqrt{\beta}\, kb)]\, D_1(\lambda) +$$

$$+ D_2(\lambda)[(\beta + 2)\, aK_1(\sqrt{\beta}\, ka) + \sqrt{\beta}\, ka^2 K_0(\sqrt{\beta}\, ka) -$$

$$- kb^2 \sqrt{\beta}\, K_0(\sqrt{\beta}\, kb) - 2bK_1(\sqrt{\beta}\, kb)]\} = 0 \qquad (4.4)$$

Здесь

$$D_1(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{vmatrix}, \qquad D_2(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{11}(\lambda), & b_{11}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda), & b_{21}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$b_{11}(\lambda) = a\lambda(\lambda^2 + 2\omega - \lambda\omega i)$$

$$b_{21}(\lambda) = \frac{b\lambda^2}{2\omega^2}(\lambda^3 + 3\omega^2\lambda + 2\omega^3 i)$$

Для устойчивости волчка необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения (4.4) имели неположительные вещественные части, т. е. $R(\lambda) \leqslant 0$.

Если рассматривать значение λ только в отрезке $-2\omega i \leqslant \lambda \leqslant 2\omega i$ и отбросить влияние силы тяжести жидкости, то получатся результаты Стьювертсона. Заметим, что определение корней трансцендентного уравнения (4.4) связано с большими трудностями. В уравнении (4.4) выражения, стоящие под знаком суммы, меняют свой знак только для отрицательных β, т. е. $-2\omega i \leqslant \lambda \leqslant 2\omega i$. Для положительных β функции I_i и K_i положительны, и при больших значениях β можно использовать асимптотические формулы. В характеристическом уравнении (4.4), если положить $\rho = 0$, т. е. отбросить влияние жидкости на волчок, то условие устойчивости совпадает с известным условием устойчивости твердого волчка

$$C_1^2\omega^2 - 4A_1 g h_1 M_1 > 0$$

Введем $\lambda = 2\omega i\sigma$; тогда характеристическое уравнение для σ будет иметь действительные коэффициенты и условие устойчивости приведется к требованию, чтобы все корни были действительные.

Упростить характеристическое уравнение в общем случае невозможно. Когда количество жидкости по сравнению с массой оболочки мало, можно использовать рассуждение, приведенное в § 5 работы Стьювертсона.

Для определения корней характеристического уравнения можно применить метод последовательных приближений.

В работе не исследовался спектр оператора (3.8). Для оправдания нахождения решений вида (3.20) необходимо установить, что спектр оператора (3.8) для области вида полого цилиндра дискретен.

Институт механики АН СССР

Поступила
10 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж у к о в с к и й Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехтеоретиздат, М.— Л., 1949.
2. Ч е т а е в Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
3. Р у м я н ц е в В. В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
4. Н а р и м а н о в Г. С. О движении симметрического гироскопа, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.
5. С о б о л е в С. Л. О движении волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
6. S t e w a r t s o n K. On the stability of a spining top containing liquid. J. fluid mechan. 1959, vol. 5, part. 4.