

**К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ**

УДК 539.3

**Б. В. Нерубайло**

**Институт прикладной механики РАН,  
117334 Москва**

К дифференциальным уравнениям с сингулярной правой частью может быть приведена проблема отыскания напряженно-деформированного состояния оболочек при сосредоточенных и локализованных силовых и температурных воздействиях. Как и в случае дифференциальных уравнений, описывающих поведение цилиндрических оболочек, здесь оказывается эффективным применение методов асимптотического синтеза (МАС), в основе которых лежит «склеивание» решений уравнений более низкого порядка и более простой структуры [1, 2].

Если принять классическую гипотезу Кирхгофа — Лява, для конических круговых оболочек можно записать уравнение, являющееся разрешающим [3, 4]:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \left[ x \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \tilde{N} + \frac{2}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \beta^2} - \frac{ic_0 \operatorname{ctg} \theta}{h} x \tilde{N} \right] + \frac{1}{\sin^4 \theta} \left( \frac{\partial^4 \tilde{N}}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial \beta^2} \right) = \\ = - \frac{ic_0}{h} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) x^2 p + \left( x \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) x^2 p + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 x^2 p}{\partial \beta^2} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, \beta$  — координаты произвольной точки поверхности оболочки;  $h$  — толщина оболочки;  $2\theta$  — угол конусности;  $c_0 = \sqrt{12(1-\nu^2)}$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\tilde{N}(x, \beta) = N_x(x, \beta) + N_\beta(x, \beta)$  — разрешающая комплексная функция усилий.

Пусть в сечении  $x = x_0$  действуют  $k$  равномерно распределенных по контуру сосредоточенных сил, тогда для нагрузки имеем

$$p(x, \beta) = \frac{P}{AB} \delta(x - x_0, \beta - \beta_0), \quad A = 1, \quad B = x \sin \theta, \quad (2)$$

где  $\delta(x - x_0, \beta - \beta_0)$  —  $\delta$ -функция Дирака;  $P$  — сосредоточенная сила.

В результате подстановки  $\delta$ -функции, а также функции  $\tilde{N}(x, \beta)$ , представленных в виде рядов по  $\beta$

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0, \beta - \beta_0) &= \frac{1}{\pi} \delta(x - x_0) \left[ \frac{1}{2} k + \sum_{n=1}^{\infty} \cos kn(\beta - \beta_0) \right], \\ \tilde{N}(x, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{N}_n(x) \cos kn(\beta - \beta_0), \end{aligned}$$

в (1) и замены  $z = (ic_0 \operatorname{ctg} \theta)x/h$  осуществляется переход к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left\{ z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} + 1 \right) \left[ z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} + 1 \right) - z - \frac{2k^2 n^2}{\sin^2 \theta} \right] + \frac{k^2 n^2 (k^2 n^2 - 1)}{\sin^4 \theta} \right\} \tilde{N}_n =$$

$$= -\frac{ic_0}{\pi h \sin \theta} \left[ z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} + 1 \right) z \delta(z - z_0) + \left( z \frac{d}{dz} + 1 \right) z \delta(z - z_0) - \frac{k^2 n^2}{\sin^2 \theta} z \delta(z - z_0) \right]. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) без правой части находится через обобщенные гипергеометрические функции, а частный интеграл неоднородного уравнения может быть определен методом вариации произвольных постоянных. Причем получающиеся интегралы удается взять при наличии в правой части  $\delta$ -функции Дирака, используя ее фильтрующее свойство

$$f(z)\delta(z - z_0) = f(z_0)\delta(z - z_0),$$

из которого имеем

$$f(z)\delta'(z - z_0) = f(z_0)\delta'(z - z_0) - f'(z) \Big|_{z=z_0} \delta(z - z_0),$$

$$\int f(z)\delta(z - z_0)dz = f(z_0)H(z - z_0)$$

( $H(z - z_0) = 1$  ( $z > z_0$ ),  $0$  ( $z < z_0$ ) — единичная функция Хевисайда).

Решение уравнения (3) без правой части записывается через обобщенную гипергеометрическую функцию в виде (при  $n \geq 2$ )

$$\tilde{N}_n = \sum_{l=1}^4 \tilde{C}_l z^{\rho_l} {}_2F_3(1 + \rho_l, 2 + \rho_l; 1 + \rho_l - \rho_1, *1 + \rho_l - \rho_2, 1 + \rho_l - \rho_3, 1 + \rho_l - \rho_4; z),$$

где  $\rho_{1-4} = \frac{1}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + 4kn(kn \pm 1) \sin^{-2} \theta} \right]$  — корни определяющего уравнения; знак \* показывает, что из членов  $1 + \rho_l - \rho_j$  нужно исключить член при  $l = j$ .

Общее решение уравнения (3) при  $n > 2$  принимает вид [3, 4]

$$\tilde{N}_n = \frac{ic_0}{\pi h \sin \theta} \sum_{l=1}^4 y_l(z) \left\{ \tilde{C}_l + (-1)^{l-1} \left\{ H(z - z_0) \left[ \left( 4 - \frac{k^2 n^2}{\sin^2 \theta} \right) f_{1l}(z) - 5f'_{2l}(z) + f''_{3l}(z) \right]_{z=z_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta(z - z_0) \left[ 5f_{2l}(z) - 2f'_{3l}(z) \right]_{z=z_0} + f_{3l}(z_0)\delta'(z - z_0) \right\} \right\}.$$

Здесь

$$C_l = (-1)^{l-1} \frac{ic_0}{\pi h \sin \theta} \left\{ H(z - z_0) \left[ \left( 4 - \frac{k^2 n^2}{\sin^2 \theta} \right) f_{1l}(z) - 5f'_{2l}(z) + f''_{3l}(z) \right]_{z=z_0} + \right. \\ \left. + \delta(z - z_0) \left[ 5f_{2l}(z) - 2f'_{3l}(z) \right]_{z=z_0} + f_{3l}(z_0)\delta'(z - z_0) \right\};$$

$$f_{1l} = \frac{z\varphi_l}{W_n}; \quad f_{2l}(z) = \frac{z^2\varphi_l}{W_n}; \quad f_{3l}(z) = \frac{z^3\varphi_l}{W_n};$$

$\varphi_l$  — миноры;  $W_n(y_1(z), y_2(z), y_3(z), y_4(z))$  — определитель Вронского, в котором

$$y_l(z) = z^{\rho_l} {}_2F_3(1 + \rho_l, 2 + \rho_l; 1 + \rho_l - \rho_1 \dots * 1 + \rho_l - \rho_4; z);$$

$$y_l^{(m)}(z) = \rho_l(\rho_l - 1) \dots (\rho_l - m + 1) z^{\rho_l - m} {}_3F_4(1 + \rho_l, 2 + \rho_l, 1 + \rho_l; 1 + \rho_l - \rho_1 \dots 1 + \rho_l - \rho_4; z).$$

Численная реализация такого типа решений с учетом зависимостей, связывающих разрешающее комплексное усилие и другие искомые факторы, представляет определенные трудности даже для рассматриваемой здесь сосредоточенной нагрузки. Вычислительные

процедуры усложняются при использовании построенного решения как функции Грина. Поэтому путь построения эффективного решения сформулированной здесь проблемы — применение методов асимптотического синтеза, согласно которым решение разрешающего уравнения (1) строится на основе приближенных уравнений типа краевого эффекта, полубезмоментной теории, уравнений пологих оболочек, изгибного или тангенциального состояния. Причем «склеивание» решений приближенных уравнений осуществляется при  $\bar{n}, n^*$  — номерах гармоник, определяемых формулами [1, 2]

$$k^4 n^4 \approx 2\sqrt{3}(R_0/h), \quad \bar{n}^4 n^4 \approx 2(1 - \nu^2)(R_0/h)^{5/2}$$

соответственно (берутся целые значения  $n$  по этим формулам), где  $R_0$  — радиус оболочки, отвечающий точке приложения сосредоточенной нагрузки; при действии нагрузки по прямоугольной, эллиптической или круговой областям он соответствует радиусу окружности, проходящей через центр области.

В случае полубезмоментной теории, описывающей так называемое основное напряженно-деформированное состояние конической оболочки, разрешающее уравнение относительно амплитудного значения окружного перемещения  $v_n(x)$  имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ x \left[ \operatorname{tg}^2 \theta + c_0^2 \frac{x^2}{h^2} \right] \frac{d^2}{dx^2} v_n(x) \right\} - 2\mu_n^2 \operatorname{tg} \theta \left\{ \frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} v_n(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left[ \frac{1}{x} v_n(x) \right] \right\} + 4 \frac{\mu_n^4}{x^3} v_n(x) = \\ = \frac{2knP}{\pi D \sin 2\theta} \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^2 \delta(x - x_0)] + \left( 1 - \frac{k^2 n^2}{\sin^2 \theta} \right) \varepsilon(x - x_0) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость.

Примыкающий непосредственно к зоне приложения нагрузки краевой эффект (точечный при сосредоточенной силе, локальный при нагружении по конечной области) описывается уравнением относительно амплитудного значения нормального перемещения [5]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ x \frac{d^2}{dx^2} w_n(x) \right] - \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} w_n(x) \right] + \frac{c_0^2}{x h^2 \operatorname{tg}^2 \theta} w_n(x) = \frac{P}{\pi D \sin \theta} \delta(x - x_0). \quad (5)$$

Напряженное состояние с высокой изменчивостью достаточно точно определяется из уравнений теории пологих оболочек:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \frac{\theta}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\theta}{x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w = p(x, \beta) \\ \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения сводятся к одному относительно функции  $\tilde{F}$ :

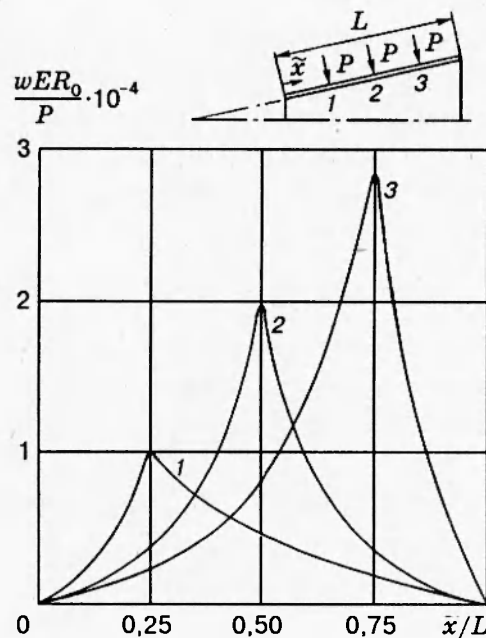
$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{F} - \frac{i\theta c_0}{h} \frac{1}{x} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} = \frac{1}{D} p(x, \beta), \quad \tilde{F} = w + \frac{i\theta c_0}{Eh^2} \varphi. \quad (6)$$

Если представить разрешающую функцию  $\tilde{F}(x, \beta)$  в виде

$$\tilde{F}(x, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_n(x) \cos kn(\beta - \beta_0) \quad (7)$$

и подставить (2), (7) в (6), сделав замену  $z = a_0 x$ ,  $a_0 = i\theta c_0 h^{-1}$ , то получим

$$\nabla_n^2 \nabla_n^2 \tilde{F}_n(z) - \frac{1}{z} \frac{d^2}{dz^2} \tilde{F}_n(z) = \frac{P}{\pi D a_0^2} \frac{1}{z} \delta(z - z_0). \quad (8)$$



При больших номерах гармоник ( $n > n^*$ ) система уравнений распадается на два независимых уравнения, одно из которых дает изгибное состояние, а другое — тангенциальное.

В случае изгибного состояния вместо уравнения (6) используется следующее более простое уравнение относительно амплитудного значения нормального перемещения  $w_n(x)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{k^2 n^2}{x^2} \right) w_n(x) = \frac{P}{\pi D} \delta(x - x_0). \quad (9)$$

После нахождения амплитудных значений разрешающих функций, определяемых уравнениями (3)–(5), (8), (9), а также амплитудных значений искомых перемещений, усилий, моментов дальнейшая процедура построения решения сводится к «склеиванию» при номерах гармоник  $\bar{n}$ ,  $n^*$  различных элементарных решений в зависимости от применяемого МАС [1, 2].

Приведем значения нормального перемещения в точке приложения ( $\tilde{x}_0/R_0 = 2,6$ ) сосредоточенной силы  $P$  для конической оболочки со свободным опиранием краев и с параметрами  $L/R_0 = 5,2$ ,  $R_0/h = 100$ ,  $\theta = 11^\circ$ :

Теория (метод)	1	2	3	4	5	6
$wER_0P^{-1}$	19371	19147	21938	19355	19655	19707

Здесь цифры 1–6 соответствуют общей теории оболочек, теории пологих оболочек, полубезмоментной теории с краевым эффектом, 1-, 2-, 3-му МАС.

На рисунке кривыми 1–3 показано изменение радиального перемещения вдоль нулевой образующей оболочки ( $\beta = 0$ ) для случая приложения сосредоточенной силы  $P$  в одной из трех точек, расположенных на расстоянии  $\tilde{x} = 0,25L$ ;  $0,5L$ ;  $0,75L$  от края оболочки с меньшим диаметром. Кривые 1–3 отвечают случаям приложения силы в точках 1–3. Числовая информация получена на основе 2-го МАС.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N2J000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В. О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 1. С. 54–56.
2. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991.
3. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
4. Гурьянов Н. Г. Коническая оболочка под действием сосредоточенной силы // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. Вып. 6. С. 321–334.
5. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966.

*Поступила в редакцию 30/1 1995 г.*

---