УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРЕЩИНЫ И ТОНКИЕ ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

В. Н. Максименко, Г. В. Недогибченко

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

С использованием комплексных потенциалов решается смешанная задача линейной теории упругости для бесконечной анизотропной пластины с разрезами и тонкими абсолютно жесткими включениями, расположенными произвольно вдоль незамкнутых гладких кривых. Построены специальные представления решений, получена разрешающая система сингулярных интегральных уравнений. Изложен алгоритм численного определения напряженно-деформированного состояния пластины, в том числе коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах разрезов и жестких включений. Приведены результаты расчетов.

Введение. Процессы хрупкого разрушения конструкций в период эксплуатации обычно начинаются вблизи технологических или конструктивных концентраторов напряжений, например разрезов или жестких остроконечных включений. Одним из методов определения упругого и предельного равновесия деформируемых твердых тел, содержащих остроконечные включения, и изучения взаимного влияния близкорасположенных включений и разрезов является метод интегрального представления решений, приводящего к сингулярным интегральным уравнениям. В [1] составлена система таких уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние изотропной пластины с конечным числом криволинейных жестких включений и разрезов при воздействии различных силовых нагрузок. В ряде случаев приведены точные или асимптотические формулы (полученные с использованием малого параметра при больших расстояниях между дефектами) или численные алгоритмы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах разрезов и включений. В [2] изучается напряженно-деформированное состояние пакета изотропных пластин, жестко соединенных вдоль кривых.

В работах [3–6] развиты методы исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин с разрезами сложной формы, а также с разрезами в сочетании с отверстиями и прямолинейными упругими стопорами. В настоящей работе впервые для анизотропных пластин построены общие представления решений задачи взаимодействия разрезов и тонких абсолютно жестких включений при следующих ограничениях: объекты расположены вдоль гладких незамкнутых кривых и не касаются друг друга, берега разрезов не контактируют между собой. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, эффективно решаемой численными методами. Преимуществом рассматриваемого подхода является единая форма интегральных уравнений на контурах разрезов и включений, что упрощает построение алгоритма численного решения. Приводятся результаты численного исследования ряда новых задач для анизотропных и изотропных (с помощью предельного перехода в параметрах анизотропии) пластин. Отмечается высокая точность предлагаемого алгоритма, проводится сравнение с решениями, полученными ранее другими авторами.

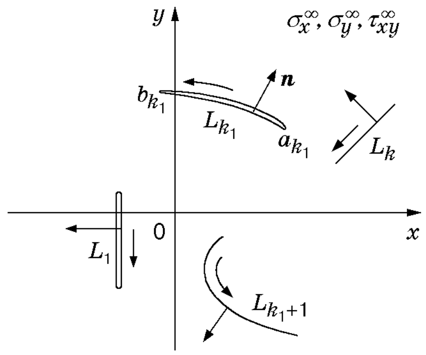

Рис. 1

Постановка задачи. Рассматривается упругая прямолинейно-анизотропная пластина постоянной толщины, занимающая плоскость $z = x + iy$. На бесконечности действуют равномерно распределенные напряжения σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞. В пластине вдоль гладких кривых $L_j = (a_j, b_j)$ при $j = 1, \ldots, k_1$ расположены сквозные разрезы (трещины) и при $j = k_1 + 1, \ldots, k$ — тонкие абсолютно жесткие включения (рис. 1); $L = \bigcup\limits_{j=1}^{k} L_j$, $L^{(1)} = \bigcup\limits_{j=1}^{k_1} L_j$, $L^{(2)} = \bigcup\limits_{j=k_1+1}^{k} L_j$. Для каждой кривой выбраны нормали $\boldsymbol{n}\,(t)$, направленные вправо при движении от a_j к b_j. По предположению берега разрезов не контактируют между собой и подвержены действию самоуравновешенных непрерывно распределенных нагрузок $P(t)$:

$$X_n^\pm(t) + iY_n^\pm(t) = \pm P(t), \qquad t \in L^{(1)}. \tag{1}$$

Криволинейные включения могут перемещаться как единое жесткое целое:

$$u^\pm(t) + iv^\pm(t) = g_1(t) + ig_2(t) = G(t), \quad t \in L^{(2)}; \quad G(t) = c_j + i\varepsilon_j t, \quad t \in L_j. \tag{2}$$

Здесь c_j — комплексная константа, ε_j — неизвестный или заданный угол поворота жесткого включения L_j. Знаки “+” и “−” соответствуют левому и правому берегам разреза или включения.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние плоскости.

Вид потенциалов. Пусть μ_1 и μ_2 — неравные корни характеристического уравнения [7] $a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0$, где a_{ij} — коэффициенты деформаций из закона Гука. Считаем, что $\operatorname{Im}\mu_1 > 0$, $\operatorname{Im}\mu_2 > 0$.

Потенциалы Лехницкого по аналогии с [4] предлагается искать в виде

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \Phi_{\nu 0} + \Phi_{\nu 1}(z_\nu) + \Phi_{\nu 2}(z_\nu), \qquad \nu = 1,\, 2. \tag{3}$$

Здесь $z_\nu = x + \mu_\nu y$, $\Phi_{\nu 0}$ — известные постоянные, определяемые усилиями на бесконечности для плоскости без дефектов [8];

$$\Phi_{\nu 1}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L^{(1)}} \frac{\omega_\nu(\tau)\, d\tau_\nu}{\tau_\nu - z_\nu}; \qquad \Phi_{\nu 2}(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L^{(2)}} \frac{\mu_\nu(\tau)\, d\tau_\nu}{\tau_\nu - z_\nu};$$

$d\tau_\nu = (\mu_\nu \cos\varphi(\tau) - \sin\varphi(\tau))\, ds = M_\nu(\tau)\, ds$; $\varphi(\tau)$ — угол, образуемый нормалью $\boldsymbol{n}(\tau)$ с осью x; ds — дифференциал длины дуги кривой.

Система интегральных уравнений задачи. Следуя [3, 7], краевые условия (1), (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} a(t)\Phi_1^\pm(t_1) + b(t)\bar\Phi_1^\pm(t_1) + \Phi_2^\pm(t_2) = F^\pm(t), \qquad t \in L^{(1)}, \\ A(t)\Phi_1^\pm(t_1) + B(t)\bar\Phi_1^\pm(t_1) + \Phi_2^\pm(t_2) = W^\pm(t), \qquad t \in L^{(2)}, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$a(t) = a_0\,\frac{M_1(t)}{M_2(t)}; \quad b(t) = b_0\,\frac{\bar M_1(t)}{M_2(t)}; \quad a_0 = \frac{\mu_1 - \bar\mu_2}{\mu_2 - \bar\mu_2}; \quad b_0 = \frac{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}{\mu_2 - \bar\mu_2};$$

$$A(t) = A_0\,\frac{M_1(t)}{M_2(t)}; \quad B(t) = B_0\,\frac{\bar M_1(t)}{M_2(t)}; \quad A_0 = \frac{\bar p_2 q_1 - p_1 \bar q_2}{\bar p_2 q_2 - p_2 \bar q_2}; \quad B_0 = \frac{\bar p_2 \bar q_1 - \bar p_1 \bar q_2}{\bar p_2 q_2 - p_2 \bar q_2};$$

$$F^{\pm}(t) = \pm\frac{X_n^{\pm}(t) + \bar{\mu}_2 Y_n^{\pm}(t)}{(\mu_2 - \bar{\mu}_2)M_2(t)}; \quad W^{\pm}(t) = W(t) = \Big(\bar{p}_2\,\frac{dg_2}{ds} - \bar{q}_2\,\frac{dg_1}{ds}\Big)\frac{1}{(\bar{p}_2 q_2 - p_2\bar{q}_2)M_2(t)};$$

$$p_\nu = a_{11}\mu_\nu^2 - a_{16}\mu_\nu + a_{12}; \quad q_\nu = a_{12}\mu_\nu + a_{22}\mu_\nu^{-1} - a_{26}, \quad \nu = 1,\,2.$$

Вследствие самоуравновешенности нагрузок $F^+(t) = F^-(t) = F(t)$.

Используя представления (3) и формулы Сохоцкого — Племеля, из (4) получаем систему сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных плотностей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, а также соотношения для $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ на разрезах и $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ на жестких включениях:

$$\begin{gathered}\int\limits_{L^{(1)}} \frac{\omega_1(\tau)}{\tau_1 - t_1}\,d\tau_1 + \int\limits_{L^{(1)}} \omega_1(\tau)K_{11}(t,\tau)\,ds + \int\limits_{L^{(1)}} \bar{\omega}_1(\tau)K_{12}(t,\tau)\,ds + \\ + \int\limits_{L^{(2)}} \mu_1(\tau)K_{13}(t,\tau)\,ds + \int\limits_{L^{(2)}} \bar{\mu}_1(\tau)K_{14}(t,\tau)\,ds = f_1^{**}(t), \quad t \in L^{(1)}, \\ \int\limits_{L^{(2)}} \frac{\mu_1(\tau)}{\tau_1 - t_1}\,d\tau_1 + \int\limits_{L^{(2)}} \mu_1(\tau)K_{21}(t,\tau)\,ds + \int\limits_{L^{(2)}} \bar{\mu}_1(\tau)K_{22}(t,\tau)\,ds + \\ + \int\limits_{L^{(1)}} \omega_1(\tau)K_{23}(t,\tau)\,ds + \int\limits_{L^{(1)}} \bar{\omega}_1(\tau)K_{24}(t,\tau)\,ds = f_2^{**}(t), \quad t \in L^{(2)};\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a(t)\omega_1(t) + b(t)\bar{\omega}_1(t) + \omega_2(t) = 0, &\qquad t \in L^{(1)}, \\ A(t)\mu_1(t) + B(t)\bar{\mu}_1(t) + \mu_2(t) = 0, &\qquad t \in L^{(2)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$f_1^{**}(t) = \frac{\pi i \bar{F}(t)}{\bar{b}(t)} - \pi i\Big[\frac{\bar{a}(t)}{\bar{b}(t)}\,\bar{\Phi}_{10} + \Phi_{10} + \frac{1}{\bar{b}(t)}\,\bar{\Phi}_{20}\Big], \qquad t \in L^{(1)};$$

$$f_2^{**}(t) = \frac{\pi i \bar{W}(t)}{\bar{B}(t)} - \pi i\Big[\frac{\bar{A}(t)}{\bar{B}(t)}\,\bar{\Phi}_{10} + \Phi_{10} + \frac{1}{\bar{B}(t)}\,\bar{\Phi}_{20}\Big], \qquad t \in L^{(2)}.$$

Здесь ядра $K_{ij}(t,\tau)$ регулярны.

Систему дополним уравнениями

$$\int\limits_{L_j} \omega_1(\tau)\,d\tau_1 = 0, \quad j = 1,\ldots,k_1, \qquad \int\limits_{L_j} \mu_1(\tau)\,d\tau_1 = 0, \quad j = k_1+1,\ldots,k, \tag{7}$$

представляющими собой условия однозначности смещений при обходе контура каждого из разрезов и равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на каждое жесткое включение.

Неизвестные углы поворота жестких включений при нагружении пластины определяются условием равенства нулю главного момента сил, действующих на каждое включение. С учетом соотношений [8]

$$M\Big|_A^B = 2\mathrm{Re}\Big\{\sum_{\nu=1}^{2} F_\nu(z_\nu) - z_\nu\varphi_\nu(z_\nu)\Big\}\Big|_A^B, \quad \Phi_\nu = \frac{d\varphi_\nu}{dz_\nu}, \quad \varphi_\nu = \frac{dF_\nu}{dz_\nu}$$

это условие приводится к виду

$$2\mathrm{Re}\Big\{\int\limits_{L_j}(\tau_1-\tau_2A_0-\bar\tau_2\bar B_0)\mu_1(\tau)\,d\tau_1\Big\}=0,\qquad j=k_1+1,\dots,k. \tag{8}$$

Таким образом, для определения плотностей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ получена система (5)–(8).

Численное решение. При введении параметризации кривых $L_j=\{t=\tau^j(\xi),\ \xi\in[-1,1]\}$ и обозначений

$$\omega_1(\tau^j(\xi))=\chi_j(\xi)=\chi_j^0(\xi)/\sqrt{1-\xi^2},\qquad j=1,\dots,k_1,$$

$$\mu_1(\tau^j(\xi))=\chi_j(\xi)=\chi_j^0(\xi)/\sqrt{1-\xi^2},\qquad j=k_1+1,\dots,k$$

(5)–(8) сводится к канонической системе интегральных уравнений

$$\sum_{p=1}^{k}\int\limits_{-1}^{1}\big\{K_1^{jp}(\xi,\eta)\chi_p(\eta)+K_2^{jp}(\xi,\eta)\overline{\chi_p(\eta)}\,\big\}\,d\eta=f_j(\xi),\quad j=1,\dots,k,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\chi_j(\eta)(\tau_1^j(\eta))'\,d\eta=0,\qquad j=1,\dots,k,$$

$$\mathrm{Re}\Big\{\int\limits_{-1}^{1}K^J(\eta)\chi_j(\eta)\,d\eta\Big\}=0,\qquad j=k_1+1,\dots,k,$$

где функции $K_1^{jj}(\xi,\eta)$ имеют особенности типа Коши.

Система решается с помощью квадратурных формул по схеме, описанной в [3], после чего с заданной точностью могут быть определены значения потенциалов и напряжений в любой точке пластины [7] и вычислены значения коэффициентов интенсивности напряжений K_1, K_2 в вершинах трещин и жестких включений [3]:

$$(\sigma_x,\tau_{xy},\sigma_y)=2\mathrm{Re}\Big\{\sum_{\nu=1}^{2}(\mu_\nu^2,-\mu_\nu,1)\Phi_\nu(z_\nu)\Big\},\quad K_1=\lim_{\substack{r\to0\\ \theta=0}}\sigma_n\sqrt{2\pi r},\quad K_2=\lim_{\substack{r\to0\\ \theta=0}}\tau_n\sqrt{2\pi r}.$$

Здесь r и θ — полярные координаты точки в системе с полюсом в вершине и полярной осью, направленной по касательной к кривой; $\sigma_n=0{,}5(\sigma_x+\sigma_y)+0{,}5(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\varphi+\tau_{xy}\sin2\varphi$; $\tau_n=-0{,}5(\sigma_x-\sigma_y)\sin2\varphi+\tau_{xy}\cos2\varphi$; φ — угол между нормалью к кривой в ее вершине и осью x.

Примеры вычислений. Ниже приводятся результаты вычисления коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах разрезов и тонких абсолютно жестких включений в изотропной и анизотропной (ортотропной) пластинах, подверженных одноосному растяжению. Рассматриваются следующие материалы: 1 — изотропный материал ($E=720$ ГПа, $\nu=0{,}25$); 2 — анизотропный композит ($E_1=780$ ГПа, $E_1/E_2=3$, $G=120$ ГПа, $\nu=0{,}25$); 3 — графитоэпоксидный композит ($E_1=276{,}1$ ГПа, $E_1/E_2=25$, $G=5{,}52$ ГПа, $\nu=0{,}25$); 4 — стеклоэпоксидный композит ($E_1=53{,}84$ ГПа, $E_1/E_2=3$, $G=8{,}63$ ГПа, $\nu=0{,}25$). Здесь E, E_1 и E_2 — модули упругости; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Для изотропного материала при вычислениях введена "слабая анизотропия" с отношением $E_1/E_2=0{,}9996$.

α	$K_1(a)/(p\sqrt{\pi R})$		$K_2(a)/(p\sqrt{\pi R})$	
	Настоящая работа	Данные [1]	Настоящая работа	Данные [1]
0	−0,157 10	−0,157 10	0,035 73	0,035 73
$\pi/12$	−0,122 00	−0,122 00	0,093 23	0,093 23
$\pi/6$	−0,074 20	−0,074 24	0,105 70	0,105 70
$\pi/4$	−0,026 64	−0,026 66	0,069 76	0,069 77
$\pi/3$	0,008 00	0,008 00	−0,004 91	−0,004 91
$5\pi/12$	0,020 48	0,020 46	−0,098 32	−0,098 34
$\pi/2$	0,007 38	0,007 37	−0,185 50	−0,185 50

На рис. 2–4 и в таблице представлены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений K_1, K_2 в вершинах жесткого включения, имеющего форму полуокружности, от угла α, характеризующего расположение этого включения в одноосно растягиваемой плоскости.

На рис. 2 приведены результаты расчетов для анизотропного материала 2 для двух случаев: 1) главное направление анизотропии совпадает с направлением оси x (сплошные кривые); 2) главное направление анизотропии совпадает с направлением оси y (штриховые кривые). На рис. 3 представлены результаты вычислений для материалов 1 и 3 (штриховые и сплошные кривые соответственно). Из рис. 2 и 3 следует, что коэффициенты интенсивности напряжений во всем диапазоне значений α существенно зависят от параметров анизотропии и угла между осью анизотропии и направлением растягивающей нагрузки на бесконечности.

На рис. 4 для материалов 1 и 3 приведены зависимости от α разности значений коэффициентов интенсивности напряжений в рассматриваемой задаче и в задаче, в которой не допускается поворот включения. Главное направление анизотропии совпадает с направлением оси x. Штриховыми кривыми изображены зависимости $\Delta K_1(a)/(p\sqrt{\pi R})$ (нижняя кривая) и совпадающие зависимости $\Delta K_2(a)/(p\sqrt{\pi R})$, $\Delta K_1(b)/(p\sqrt{\pi R})$, $\Delta K_2(b)/(p\sqrt{\pi R})$ (верхняя кривая) для изотропного материала 1, сплошными кривыми *1–4* представлены зависимости $\Delta K_1(a)/(p\sqrt{\pi R})$, $\Delta K_2(a)/(p\sqrt{\pi R})$, $\Delta K_1(b)/(p\sqrt{\pi R})$, $\Delta K_2(b)/(p\sqrt{\pi R})$ соответственно для анизотропного материала 3. Симметрия, имеющая место в случае изотропного материала, здесь нарушена.

В таблице для изотропного материала 1 (см. рис. 3) приближенные значения коэффициентов интенсивности напряжений сравниваются с полученными по приведенной в [1] точной формуле для нескольких значений α. Из таблицы следует, что предлагаемый в данной работе подход, в котором используется понятие “слабой анизотропии”, применим к исследованию напряженно-деформированного состояния изотропных пластин.

На рис. 5 для анизотропного материала 4 представлены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах прямолинейного разреза длиной $2l$ (сплошные кривые) и жесткого включения, имеющего форму полуокружности с центром на прямой, которой принадлежит разрез, и радиусом $R = l$ (штриховые кривые), от расстояния d. Плоскость подвергается одноосному растяжению. Видно, что разрез и жесткое включение практически не оказывают влияния друг на друга при $d/l > 3$, т. е. при удалении центра окружности от ближайшей к нему вершины разреза на расстояние, большее длины разреза.

На рис. 6 для материала 4 представлены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений K_1, K_2 в вершинах прямолинейного разреза длиной $2l$ (сплошные кривые) и жесткого включения, имеющего форму дуги окружности (штрихпунктирные кривые),

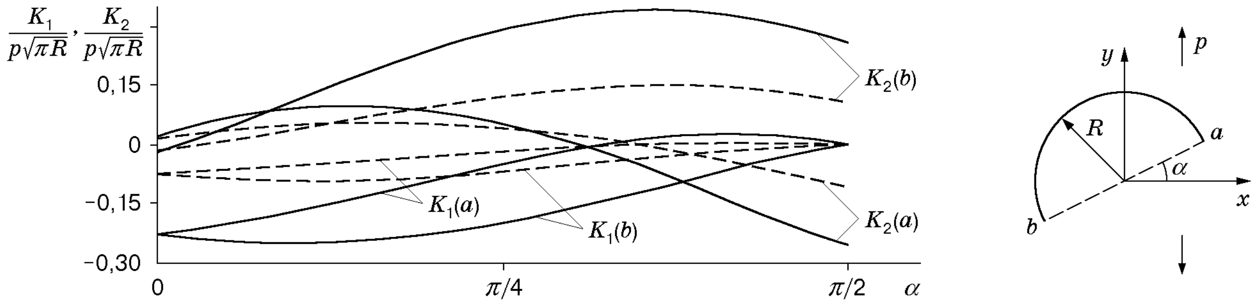

Рис. 2

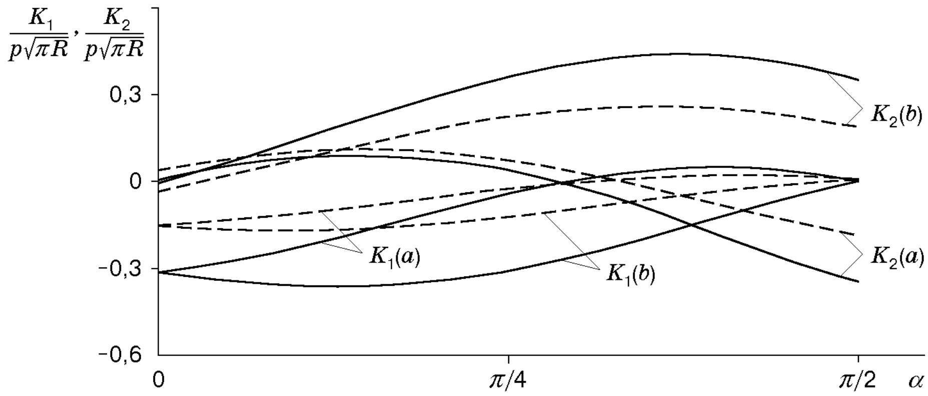

Рис. 3

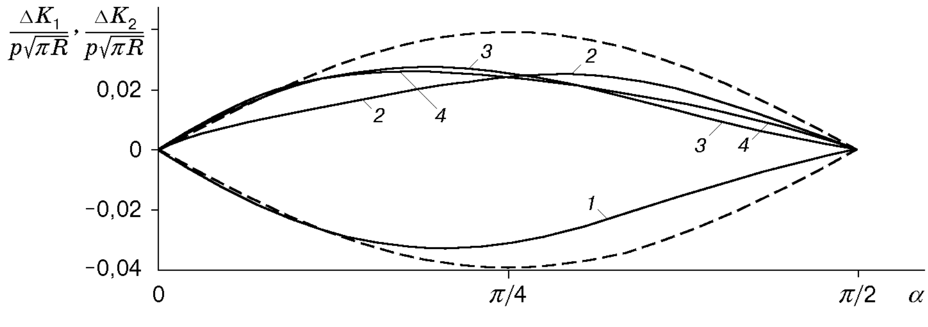

Рис. 4

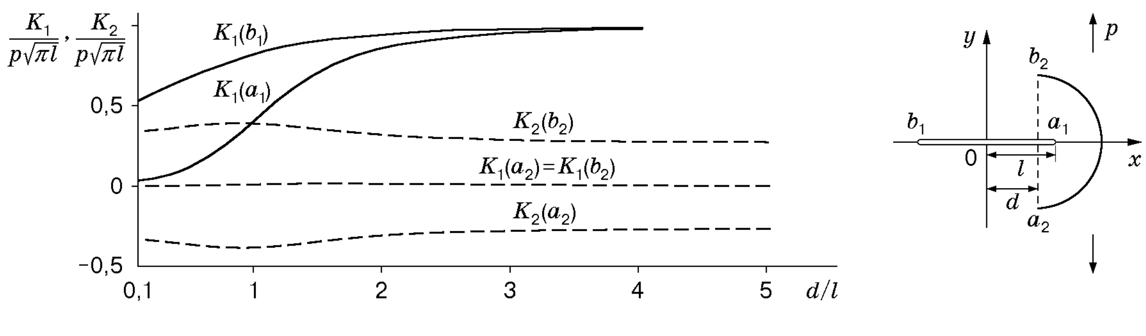

Рис. 5

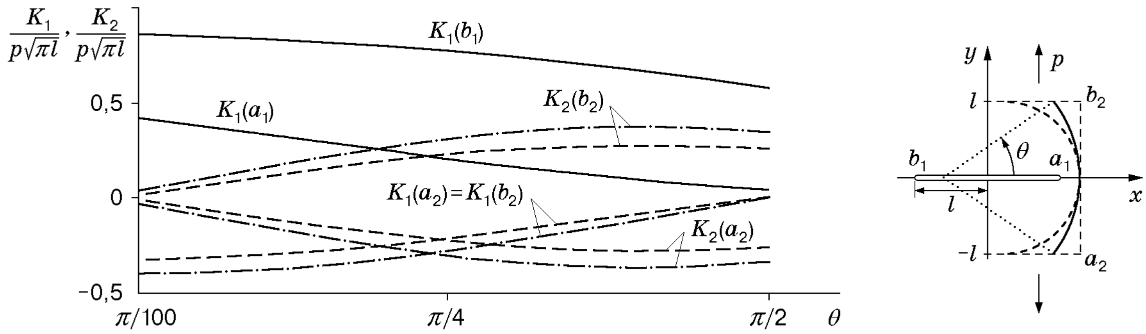

Рис. 6

от величины центрального угла 2θ (при изменении угла θ от 0 до $\pi/2$ форма включения меняется от прямолинейной до дуги полуокружности). Штриховыми линиями показаны зависимости коэффициентов K_1, K_2 от угла 2θ для одиночного жесткого включения.

Отметим, что в [1] для изотропного материала приведены приближенные формулы вычисления коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах пары взаимно перпендикулярных прямолинейных объектов трещина — включение в виде разложения по степеням малого параметра $\lambda = 2l/d$. Однако численные исследования показали, что при $\lambda \leqslant 1/2$ объекты уже практически не оказывают влияния друг на друга в силу удаленности (различие со значениями коэффициентов K_1, K_2 для одиночных объектов составляет менее 2 %).

Таким образом, предлагаемый в работе подход позволяет получать количественные и качественные оценки напряженно-деформированного состояния и предельного состояния пластин с трещинами и тонкими жесткими включениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.** Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983.
2. **Сильверстов В. В., Шумилов А. В.** Задача соединения упругих пластин в пакет вдоль кривых // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 1. С. 165–170.
3. **Максименко В. Н.** Расчет анизотропных пластин, ослабленных трещинами и подкрепленных ребрами жесткости при помощи сингулярных интегральных уравнений // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы VII Всесоюз. конф. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 290–298.
4. **Максименко В. Н.** Задача об анизотропной пластине, ослабленной криволинейными трещинами и усиленной ребрами жесткости // ПМТФ. 1982. № 2. С. 163–169.
5. **Максименко В. Н., Цендровский А. В.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений для трещин сложной формы в анизотропных пластинах // ПМТФ. 1986. № 6. С. 124–128.
6. **Максименко В. Н., Цендровский А. В.** Предельно-равновесное состояние анизотропной пластины с вырезами и трещинами произвольной формы // Учен. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20, № 2. С. 53–60.
7. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
8. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.

Поступила в редакцию 14/V 1999 г.