

ОБРУШЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ ВТОРОЙ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В. И. Букреев, Е. М. Романов, Н. П. Туранов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Приведены экспериментальные данные о гравитационных волнах на мелкой воде при движении вертикальной пластины по заданному закону. Пластина полностью перекрывала поперечное сечение бассейна. Найдено, в частности, что при переходе скорости распространения волны через известное в гидравлике первое критическое значение волна сохраняла гладкость. Обрушение волн начиналось при более высокой (примерно в 1,3 раза) второй критической скорости, значение которой совпадало с предельной скоростью распространения уединенных волн.

Для слоя жидкости, покоящейся над ровным горизонтальным дном, существуют, по крайней мере, две критические скорости распространения гравитационных волн: $c_1 = \sqrt{gh}$ и $c_2 = \beta\sqrt{gh}$ (g — ускорение силы тяжести, h — глубина слоя, $\beta > 1$). Вторая критическая скорость c_2 выявлена при теоретическом анализе уединенных волн предельной амплитуды. В зависимости от исходной математической модели получены разные значения β . Второе приближение теории мелкой воды дает $\beta = \sqrt{2}$ [1]. В [2] на основе полных уравнений потенциального движения жидкости получено $\beta = 1,294$. Эксперименты [3–5] показали, что c_2 критична не только для уединенных волн и что второе из указанных значений β является более точным. В окрестностях c_1 и c_2 происходят сильные изменения в картине волн. В частности, волны могут обрушиться.

Данная работа является продолжением [5]. В ней основное внимание уделяется процессу перехода от гладких волн к обрушивающимся волнам в окрестности c_2 . Обрушение волн служит хорошим объектом для экспериментального изучения фундаментального вопроса о переходе от порядка к частичному или полному хаосу. В этом случае сочетать инструментальные измерения с визуальными наблюдениями значительно проще, чем, например, при изучении перехода от ламинарного течения к турбулентному в трубе или пограничном слое.

В методическом отношении данные опыты аналогичны [5]. Прямоугольный бассейн с горизонтальным дном длиной $L = 3,8$ м и шириной 20 см заполнялся водой комнатной температуры. Волны генерировались поступательным перемещением одной из торцевых стенок бассейна. Термин торцевая стенка используется здесь для частного случая поступательного перемещения вертикальной пластины, когда она полностью перекрывает поперечное сечение бассейна и имеет место определенная аналогия с классической задачей газовой динамики о движении поршня в трубе со сжимаемым газом. Подобран следующий закон движения стенки:

$$x_*(t) = \begin{cases} Ut + UT_1[\exp(-t/T_1) - 1] & \text{при } 0 \leq t < T_2, \\ l & \text{при } t \geq T_2, \end{cases} \quad y_*, z_* = \text{const.}$$

Здесь t — время; x_* , y_* , z_* — координаты произвольной точки подвижной стенки; U , T_1 ,

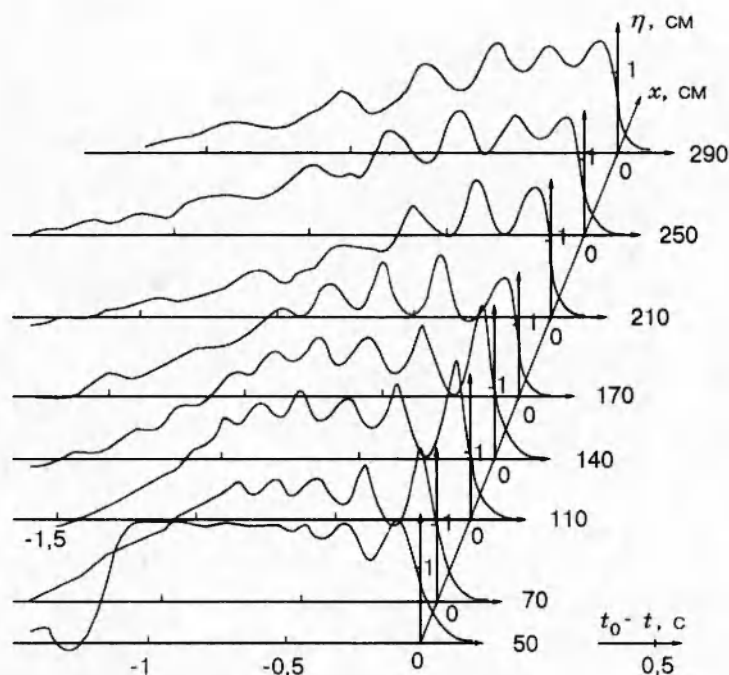


Рис. 1

T_2, l — параметры. Используется неподвижная прямоугольная система координат x, y, z с началом на линии пересечения невозмущенной свободной поверхности воды и подвижной стенки при $t = 0$. Ось x направлена к неподвижной торцевой стенке бассейна, ось z — вертикально вверх. Из четырех параметров закона движения независимы только три. В опытах $T_2 \gg T_1$, и с хорошей точностью можно считать, что $l = U(T_2 - T_1)$.

Отклонения свободной поверхности воды от положения равновесия η измерялись неподвижными волномерами. Сигналы волномеров подавались на специализированную ЭВМ HISTOMAT-S и регистрировались самописцами. До тех пор пока волны оставались устойчивыми, они были плоскими, так что функция η зависела от x, t и четырех основных безразмерных параметров: $L/h, U/\sqrt{gh}, T_1\sqrt{g/h}, T_2\sqrt{g/h}$. Ниже приводится информация только для таких t , когда отраженные волны еще не достигали рассматриваемой точки x и влияние параметра L/h не проявлялось. После потери устойчивости и обрушения волн имели место флуктуации η по x, y, t и становилось существенным влияние таких физических величин, как плотность, вязкость и сжимаемость воды и воздуха, а также коэффициент поверхностного натяжения.

Изучавшиеся волны были нестационарными. Для нестационарных волн необходимо специально определить понятие скорости с их распространения. В опытах с определялась как скорость продольного перемещения той точки переднего фронта волны, для которой $\eta = \eta_m/2$, где η_m — высота первого гребня (рис. 1). Значение s вычислялось по времени перемещения Δt этой точки на расстояние $\Delta x = 10$ см между двумя неподвижными волномерами. По результатам повторных измерений в одних и тех же условиях найдены следующие оценки погрешностей измерений: для η_m относительная среднеквадратичная погрешность была не более 1,5%, для s — не более 1%. Среднеквадратичная мера погрешности производной $\partial\eta/\partial t$ достигала 10%.

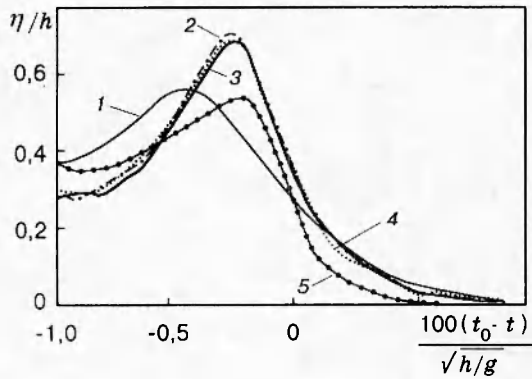


Рис. 2

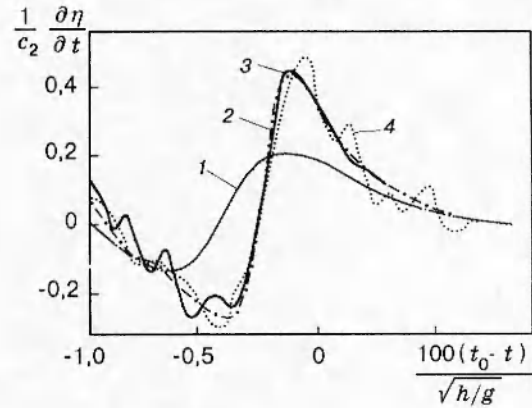


Рис. 3

Опыты выполнялись при нескольких сочетаниях параметров задачи. Типичные результаты более подробно обсуждаются на примере с $h = 3,06$ см, $U/\sqrt{gh} = 0,425$, $T_1\sqrt{g/h} = 2,15$, $T_2\sqrt{g/h} = 33,7$ ($l/h = 13,4$). На рис. 1 приведена зависимость η от $t_0 - t$ при нескольких фиксированных значениях x , где t_0 — время добегающего точки переднего фронта с $\eta = \eta_m/2$ до рассматриваемого x ($h = 3,06$ см, $U = 23,3$ см/с, $T_1 = 0,12$ с, $T_2 = 1,88$ с). В данном примере при $x = (110 \pm 5)$ см вершина первого гребня заострилась настолько, что часть жидкости начинала сползать вниз по переднему склону. В этот момент времени с хорошей точностью имело место $c = c_2$, а высота первого гребня оказывалась вблизи своего наибольшего значения. В дальнейшем интенсивность обрушения быстро нарастала, и при $x > 140$ см головная часть волны стала похожей на классический гидравлический прыжок.

Эволюция переднего фронта и первого гребня возмущения иллюстрируется на рис. 2 в системе координат, связанной с точкой $\eta = \eta_m/2$. Значения параметров те же, что для рис. 1; кривые 1–5 соответствуют $x/h = 16,3; 35,9; 39,2; 45,8; 56,7$. Обрушение началось при $x/h = 35,9$ и стало полностью развитым при $x/h = 45,8$. Обращает на себя внимание тот факт, что в процессе развития неустойчивости передний фронт менялся слабо. Более заметные изменения наблюдались в производной $(1/c_2)\partial\eta/\partial t$, информация о которой приведена на рис. 3 (значения параметров те же, что на рис. 2). Один из чувствительных признаков наличия неустойчивости — флуктуации производной. Рис. 3 показывает, что при $x/h = 35,9$ график производной еще остается гладким, а при $x/h = 39,2$ на нем имеются заметные флуктуации.

К началу обрушения наибольшее значение безразмерной производной оказалось равным $0,43 \pm 0,05$. В принятой здесь безразмерной форме производная характеризует наклон свободной поверхности к горизонту. Измерения при других сочетаниях параметров задачи дали примерно то же количественное значение предельного наклона переднего фронта (с указанной погрешностью измерений).

На рис. 4 приведена информация о времени добегающего $t_i(x)$ ряда характерных точек на профиле волны. Номер 0 присвоен точке с $\eta = \eta_m/2$ (это ранее определенное t_0), а номера 1–5 — вершинам гребней волн, начиная с первого от переднего фронта. Тангенс угла наклона прямой a к оси t_i равен c_2 . Значения параметров те же, что для рис. 1. Анализ $t_i(x)$ показал, что точки 0 и 1 перемещались с докритической скоростью при $x/h < 35,9$ и с

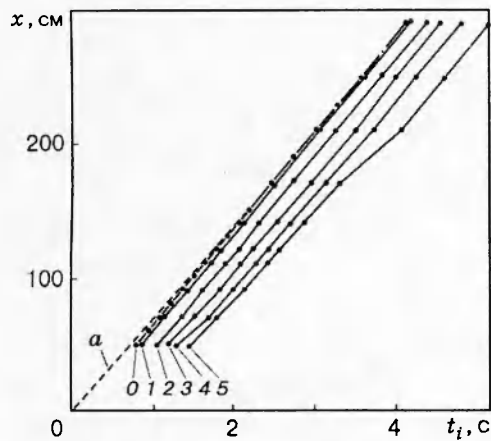


Рис. 4

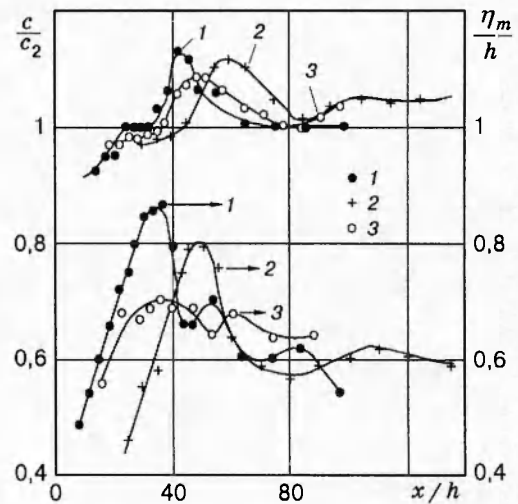


Рис. 5

закритической при $x/h > 35,9$. Скорость перемещения второго и третьего гребней была на $3 \div 5\%$ больше c_2 в интервале $38 < x/h < 65$ и меньше c_2 вне этого интервала. Четвертый и пятый гребни все время перемещались с докритическими скоростями.

Влияние различных параметров на процесс перехода через c_2 иллюстрируется на рис. 5, где приведены зависимости от x высоты первого гребня η_m и скорости перемещения c точки с $\eta = \eta_m/2$. Точки 1-3 соответствуют $h = 3; 3,06; 2$ см, $U/\sqrt{gh} = 0,509; 0,425; 0,422$, $T_1\sqrt{g/h} = 4,16; 2,15; 3,77$, $T_2\sqrt{g/h} = 17,90; 33,66; 52,27$. При переходе через первую критическую скорость c_1 волны оставались устойчивыми и гладкими во всех трех приведенных примерах. Интересно то, что при приближении к c_2 снизу рост скорости c заметно замедлялся, а высота η_m продолжала монотонно увеличиваться. Процесс замедления роста c особо ярко выражен для кривой 1. Образно выражаясь, жидкость как бы накапливалась перед невидимым барьером $c = c_2$, а затем прорывалась через него, и скорость c снова резко возрастала. Визуальные наблюдения и данные о производной $\partial\eta/\partial t$ показали, что именно в этот момент начинался процесс обрушения. Наибольшее значение η_m достигалось несколько позже начала перехода c в закритическую область. Аналогичный результат получен в [2] при теоретическом анализе уединенных волн предельной амплитуды.

Для принятого здесь способа генерации волн подпитка их энергии осуществлялась лишь при $t < T_2$, тогда как при обрушении значительная часть механической энергии волн рассеивалась в тепло. Поэтому в закритической области скорость c достигала некоторого наибольшего значения, а затем уменьшалась, причем необязательно монотонно. Факт флуктуаций скорости распространения переднего фронта обрушивающейся волны известен на примере классического гидравлического прыжка.

В примере, приведенном на рис. 5 (точки 1), c еще раз приближалась к c_2 , но уже сверху, из закритической области. Интересно, что, несмотря на диссипацию энергии, сохранялось постоянное значение $c = c_2$ на достаточно большом интервале x/h . На этом интервале наблюдался обратный процесс перехода обрушивающейся волны в гладкую.

Имеющуюся в настоящее время ограниченную информацию о сложном процессе обрушения волн в окрестности c_2 можно обобщить следующим образом.

В определенном смысле c_2 более критична, чем c_1 . В частности, при $c > c_2$ исчерпываются возможности такого стабилизирующего фактора, как дисперсия гармонических волн

малой амплитуды. В окрестности c_1 потеря устойчивости происходит, по-видимому, по жесткому типу, т. е. интенсивность возмущения должна превысить достаточно большое пороговое значение. Иначе обстоит дело в окрестности c_2 . Судя по всему, здесь потеря устойчивости происходит по мягкому типу, т. е. для ее развития достаточно теоретически бесконечно малых возмущений. В области $c_1 < c < c_2$ существуют даже стационарные гладкие волны типа кноидальных, уединенных или моноклиальных. Возможность существования гладких стационарных волн с $c > c_2$ проблематична.

В определенных условиях развитию неустойчивости может противодействовать нестационарность волн. Выполненные опыты показали, что при $c > c_2$ и этот фактор действует слабее, чем при $c < c_2$. В частности, при $c < c_2$ в опытах легко реализуются нестационарные волны, которые сохраняют гладкость вплоть до полного вырождения из-за молекулярной вязкости. В области $c > c_2$ трудно предотвратить обрушение и нестационарных волн даже в физическом эксперименте, где действует еще один сильный стабилизирующий фактор — поверхностное натяжение. Авторами получены два примера, когда нестационарные волны с $c > c_2$ не обрушивались. Об одном из примеров сказано в [6]. С определенными оговорками вторым примером можно считать то, что второй и третий гребни волны на рис. 1 распространялись с $c > c_2$ и не обрушивались. В частной беседе В. Ю. Ляпидевский обратил внимание на то, что в этом случае нестационарность проявлялась в общем изменении сложной по форме волны, так что ее второй и последующие гребни распространялись по возмущенной жидкости. Визуальные наблюдения показали, что второй и третий гребни хотя и не обрушивались, но также были неустойчивыми. Неустойчивость проявлялась в существовании относительно малых трехмерных возмущений на фоне основной волны.

Поверхностное натяжение играет принципиально важную стабилизирующую роль как при $c < c_2$, так и при $c > c_2$. Известно, что без учета поверхностного натяжения стационарное сдвиговое течение двух несмешивающихся жидкостей разной плотности абсолютно неустойчиво по механизму Кельвина — Гельмгольца: как бы ни была мала разность скоростей между жидкостями, найдутся такие бесконечно малые возмущения, которые растут со временем, черпая энергию из основного течения. Система вода — воздух не является исключением, и только поверхностное натяжение обеспечивает устойчивость гравитационных волн на воде даже в области $c < c_1$. В окрестности c_2 влияние поверхностного натяжения становится еще более существенным. Оно препятствует заострению гребней волн, а при их обрушении сильно влияет на вовлечение воздуха в воду.

В окрестности c_2 действуют, по крайней мере, три дестабилизирующих фактора. Первым из них является рост бесконечно малых возмущений. В данных опытах эти возмущения зарождались на боковых стенках бассейна и имели вид косых волн на фоне основной волны. Росту малых возмущений препятствовало поверхностное натяжение, и они не приводили к обрушению. Вторым фактором является заострение гребней волн аналогично имеющему место в предельной волне Стокса. В опытах на определенном этапе процесса заострения часть жидкости сползала с гребня вниз по переднему склону волны подобно лавине. Третьим дестабилизирующим фактором является нелинейный эффект, который состоит в том, что скорость распространения переднего склона бегущей волны возрастает от подошвы к вершине. При достижении некоторой предельной крутизны, мерой которой может служить ранее упомянутая производная, в опытах происходило опрокидывание переднего склона с интенсивным перемешиванием воды и воздуха.

Теоретически указанные механизмы потери устойчивости проанализированы для волн специальных видов, например стационарных. Теория дает четкие соотношения между та-

Значения функции $\eta(t - t_*)$ при $h = 3,06$ см, $U = 23,3$ см/с, $T_1 = 0,12$ с, $T_2 = 1,88$ с

η , см							
$x = 50$ см, $t_* = 0,6$ с							
0,040	0,05	0,08	0,12	0,19	0,28	0,40	0,58
0,81	1,07	1,36	1,60	1,67	1,57	1,38	1,21
1,12	1,11	1,20	1,34	1,53	1,60	1,56	1,50
1,43	1,39	1,44	1,51	1,60	1,57	1,50	1,52
1,58	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,55	1,57
1,60	1,61	1,62	1,61	1,59	1,58	1,58	1,59
1,60	1,61	1,61	1,62	1,62	1,63	1,64	1,64
1,65	1,65	1,65	1,64	1,51	1,54	1,41	1,24
1,02	0,76	0,52	0,27	0,10	0,00	-0,07	-0,07
-0,04	-0,03	0,04	0,16	0,25	0,22	0,19	0,10
$x = 110$ см, $t_* = 1,4$ с							
0,00	0,00	0,01	0,02	0,02	0,02	0,03	0,04
0,06	0,10	0,18	0,31	0,51	0,81	1,26	1,87
2,10	1,79	1,43	1,15	0,98	0,85	0,85	1,10
1,21	1,59	1,80	1,79	1,65	1,36	1,29	1,20
1,27	1,36	1,43	1,61	1,65	1,55	1,49	1,43
1,34	1,36	1,43	1,53	1,71	1,74	1,55	1,43
1,41	1,41	1,48	1,59	1,63	1,55	1,44	1,34
1,30	1,37	1,42	1,33	1,22	1,10	1,03	1,02
1,02	0,93	0,82	0,73	0,68	0,64	0,63	0,61
0,55	0,49	0,45	0,40	0,36	0,32	0,27	0,25
0,22	0,19	0,16	0,13	0,22	0,19	0,16	0,13
0,10	0,08	0,05	0,02	-0,01	-0,03		
$x = 250$ см, $t_* = 3,4$ с							
0,02	0,03	0,03	0,04	0,10	0,20	0,36	0,67
1,30	1,54	1,60	1,55	1,43	1,32	1,26	1,29
1,35	1,44	1,55	1,61	1,57	1,44	1,29	1,16
1,09	1,10	1,21	1,42	1,61	1,70	1,67	1,53
1,33	1,15	1,04	0,98	1,00	1,08	1,17	1,25
1,31	1,40	1,42	1,33	1,18	1,04	0,93	0,85
0,82	0,84	0,85	0,83	0,82	0,85	0,90	0,96
1,01	1,00	0,93	0,83	0,76	0,72	0,69	0,65
0,59	0,53	0,50	0,52	0,55	0,58	0,59	0,58
0,57	0,57	0,57	0,58	0,58	0,56	0,53	0,48
0,43	0,38	0,32	0,29	0,28	0,28	0,31	0,34
0,34	0,33	0,30	0,26	0,23	0,21	0,22	0,24
0,26	0,27	0,26	0,24	0,20	0,17	0,14	0,13
0,14	0,14	0,14	0,11	0,05	0,01	0,00	0,01

Примечание. Аргумент t возрастает вдоль строк слева направо с шагом $\Delta t = 0,02$ с начиная с t_* .

кими характеристиками волн, как длина, амплитуда, крутизна и т. д. В этом случае не имеет особого смысла дискуссия о том, какой из характеристик следует отдать предпочтение при выявлении критических ситуаций. Для линейных гармонических волн чаще всего используется понятие критического волнового числа, для уединенных волн — понятие предельной амплитуды, для сильно нелинейных волн — понятие предельной крутизны. Однако для волн более общего вида, в том числе рассмотренных в данной работе, выбор соответствующей характеристики имеет большое значение. Для них, конечно, также существует связь между различными характеристиками, но она не универсальна и, как правило, заранее неизвестна. Например, в зависимости от сочетания начальных параметров предельная высота первого гребня волны в опытах была и больше, и меньше предельной амплитуды уединенной волны (рис. 5). Вместе с тем скорость распространения, при которой начиналось обрушение, оказалась одной и той же, причем равной c_2 — максимальной скорости распространения уединенной волны. Такой универсализм имеет под собой глубокую физическую основу и может использоваться в качестве постулата в разных целях.

Для большинства современных аналитических и численных методов исследования гравитационных волн характерно то, что гладкие и разрывные решения соответствующих уравнений рассматриваются без связи друг с другом. Расчет гладких волн выполняется до момента потери устойчивости, а исходные данные для расчета прерывных волн задаются без учета их предшествующей эволюции в гладкой форме. Математическая модель, позволяющая описать процесс развития возмущения из состояния покоя в обрушивающиеся волны, предложена в [7]. Задача о движении торцевой стенки бассейна является хорошим объектом для апробации моделей подобного рода. С этой целью приводится таблица экспериментальных данных о функции $\eta(t - t_*)$, где t_* взято так, что $\eta = 0$ при $t < t_*$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01164).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
2. **Longuet-Higgins M. S., Fenton J. D.** On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II // Proc. Roy. Soc. London. 1974. V. A340. P. 471–493.
3. **Chan E. S., Melville W. K.** Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments // J. Fluid Mech. 1988. V. 189. P. 423–442.
4. **Sander J., Hutter K.** Evolution of weakly non-linear shallow water waves generated by moving boundary // ACTA Mechanica. 1992. V. 91. P. 119–155.
5. **Букреев В. И., Туранов Н. П.** Эксперименты с волнами на мелкой воде, генерируемыми движением торцевой стенки бассейна // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 44–50.
6. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Волны, вызванные падением тела на свободную поверхность мелкой воды. Эксперимент // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 6. С. 761–763.
7. **Ляпидевский В. Ю.** Уравнения мелкой воды с дисперсией. Гиперболическая модель // Наст. сб. С. 40–46.

Поступила в редакцию 8/VII 1996 г.