проведенных в [7] для аналогичной экспериментальной ситуации (взаимодействие излучения электроразрядного CO_2-лазера с водой) при бо́льших радиусах лазерного луча ($\sim$5 мм), полный импульс давления отдачи $\Pi_0 \sim 1$ Па·с при $w \simeq 0{,}85$ Дж/см². Рост отношения Π_0/w при увеличении радиуса пятна и неизменной w связан с повышением эффективности приложения реакции отдачи в условиях более длительного сохранения плоской геометрии разлета пара.

Отметим, что экспериментально установленные в работе закономерности позволяют оценивать переданный поверхности жидкости импульс давления отдачи по заданной энергии лазерного излучения. Объяснение этих закономерностей требует дальнейшего развития теории явления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bell C. E., MacCabee B. S.** Shock wave generation in air and in water by CO_2-TEA laser radiation // Appl. Optics.— 1974.— V. 13, N 3.
2. **Emmony D. C., Geerken T., Klein-Baltink H.** Laser-generated high frequency sound waves in water // J. Acoust. Soc. Amer.— 1983.— V. 73, N 1.
3. **Sigrist M. W., Kneubühl F. K.** Laser-generated stress waves in liquids // J. Acoust. Soc. Amer.— 1978.— V. 64, N 6.
4. **Бункин Ф. В., Трибельский М. И.** Нерезонансное взаимодействие мощного оптического излучения с жидкостью // УФН.— 1980.— Т. 130, вып. 2.
5. **Emmony D. C.** Interaction of IR-radiation with liquids // Infrared Phys.— 1985.— V. 25, N 1/2.
6. **Алексеев В. Н., Егерев С. В. и др.** Акустическая диагностика нестационарных процессов взаимодействия оптического излучения с сильно поглощающей диэлектрической жидкостью // Акуст. журн.— 1987.— Т. 32, № 6.
7. **Витшас А. Ф., Корнеев В. В. и др.** Импульс отдачи при нестационарном поверхностном испарении воды // ТВТ.— 1987.— Т. 25, № 2.
8. **Emmony D. C., Geerken B. M., Straaijer A.** The interaction of 10,6 laser radiation with liquids // Infrared Phys.— 1976.— V. 16, N 1/2.
9. **Дерибас А. А., Похожаев С. И.** Постановка задачи о сильном взрыве на поверхности жидкости // ДАН СССР.— 1962.— Т. 144, № 3.
10. **Минин В. Ф.** О взрыве на поверхности жидкости // ПМТФ.— 1964.— № 3.
11. **Зосимов В. В., Наугольных К. А., Пученков О. В.** Об одном случае возбуждения гравитационно-капиллярных волн при взаимодействии мощного лазерного излучения с жидкостью // IV Всесоюз. сими. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике: Тез. докл.— Ашхабад: Изд-во АН ТССР, 1985.
12. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
13. **Таблицы** физических величин: Справочник/Под ред. акад. И. К. Кикоина.— М.: Атомиздат, 1976.
14. **Наугольных К. А., Рой Н. А.** Электрические разряды в воде: (Гидродинамическое описание).— М.: Наука, 1971.
15. **Золотарев В. М., Морозов В. Н., Смирнов Е. В.** Оптические постоянные природных и технических сред: Справочник.— Л.: Химия, 1984.
16. **The Sadtler** handbook of infrared spectra.— Philadelphia: Sadtler Res. Labs, 1978.

г. Москва *Поступила 27/IV 1988 г., в окончательном варианте — 21/VII 1988 г.*

УДК 532

О. М. Лаврентьева

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЕ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

При проведении некоторых современных технологических процессов требуется наносить на плоские поверхности тонкие пленки равномерной толщины. Один из применяемых для этого методов состоит в том, что вначале на плоскость наливается достаточно толстый слой жидкости, который затем утончается путем вращения образца [1]. Подобные методы используются при производстве зеркал [2], экранов цветных телевизоров [3], интегральных схем и магнитных дисков памяти [1]. С помощью вращающихся дисков также осуществляется разбрызгивание и перемешивание жидкостей для ускорения гетерогенных химических реакций в различных процессах химической технологии [4—6].

Для эффективного управления этими процессами нужно знать характер возникающих течений. Поскольку радиус вращающегося диска обычно много больше толщины слоя жидкости, при математическом моделировании можно заменять диск бесконечной вращающейся плоскостью. В данной работе строятся стационарные и автомодельные решения типа Кармана уравнений Навье — Стокса, описывающие течение вязкой жидкости в слое между вращающейся твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью.

1. Постановка задачи. Рассматривается вращательно-симметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в слое $\Lambda_t = \{(r, \theta, z) \in R^3, z \in (0, Z(t))\}$, ограниченном сверху свободной поверхностью, а снизу — твердой стенкой, вращающейся вокруг оси z с заданной угловой скоростью $\Omega(t)$.

Поле скорости и давления в жидкости ($\mathbf{V}(r, z, t)$ и $p(r, z, t)$) удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса

$$u_t + uu_r - r^{-1}v^2 + wu_z = -\rho^{-1}p_r + \nu[u_{rr} + (r^{-1}u)_r + u_{zz}], \tag{1.1}$$
$$v_t + uv_r + r^{-1}uv + wv_z = \nu[v_{rr} + (r^{-1}v)_r + v_{zz}],$$
$$w_t + uw_r + ww_z = -\rho^{-1}p_z + \nu[w_{rr} + r^{-1}w_r + w_{zz}],$$
$$u_r + r^{-1}u + w_z = 0$$

в области Λ_t и граничным условиям прилипания

$$u = 0,\ v = r\Omega(t),\ w = 0 \quad \text{при } z = 0, \tag{1.2}$$

а также динамическому

$$p = p_0 + 2\rho\nu w_z,\ u_z = v_z = 0 \tag{1.3}$$

и кинематическому

$$w = dZ/dt \tag{1.4}$$

условиям на свободной границе $z = Z(t)$. Здесь u, v, w — соответственно радиальная, окружная и осевая компоненты скорости $\mathbf{V}$; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; нижний индекс обозначает частную производную по соответствующему аргументу.

Далее рассматриваются решения (1.1)—(1.4), для которых функции u и v линейны по переменной r, а p и w от r не зависят. Пусть

$$u = r\Omega_0 F(\xi, \tau),\ v = r\Omega_0 G(\xi, \tau),\ \Omega = \Omega_0\omega(\tau), \tag{1.5}$$
$$w = \sqrt{\nu\Omega_0}H(\xi, \tau),\ p = \rho\nu\Omega_0 Q(\xi, \tau),$$

где $\xi = z\sqrt{\Omega_0/\nu}$; Ω_0 — характерная угловая скорость; $\tau = \Omega_0 t$. Тогда уравнения (1.1) принимают вид

$$F_\tau + HF_\xi + F^2 - G^2 = F_{\xi\xi}; \tag{1.6}$$
$$G_\tau + HG_\xi + 2FG = G_{\xi\xi}; \tag{1.7}$$
$$2F + H_\xi = 0; \tag{1.8}$$
$$H_\tau + HH_\xi = -Q_\xi + H_{\xi\xi} \tag{1.9}$$

при $\xi \in (0, D(\tau))$, $\tau > 0$ ($D(\tau) = \sqrt{\Omega_0/\nu}Z$), а граничные условия (1.2)—(1.4):

$$Q = 2H_\xi + p_0/(\rho\nu\Omega_0); \tag{1.10}$$
$$F = 0,\ G = \omega(\tau),\ H = 0 \quad \text{при } \xi = 0; \tag{1.11}$$
$$F_\xi = G_\xi = 0; \tag{1.12}$$
$$H = dD/d\tau \quad \text{при } \xi = D(\tau). \tag{1.13}$$

Задача замыкается заданием начальных данных

$$F = F^0(\xi),\ G = G^0(\xi),\ H = H^0(\xi) \quad \text{при } \xi \in (0, D_0), \tag{1.14}$$
$$\tau = 0,\ D(0) = D_0.$$

Нетрудно видеть, что задача (1.6)—(1.14) распадается на две последовательно решаемые. Функции $F(\xi, \tau)$, $G(\xi, \tau)$, $H(\xi, \tau)$, $D(\tau)$ определяются из решения замкнутой задачи (1.6)—(1.8), (1.11)—(1.14), а давление $Q(\zeta, \tau)$ восстанавливается затем из (1.9), (1.10).

Решения вида (1.5) впервые рассматривались Карманом [7]. Начально-краевая задача (1.6)—(1.14) исследовалась в [1, 8]. В [8] доказана ее однозначная разрешимость в малом по времени для гладких функций $\omega(\tau)$ при выполнении условий согласования начальных данных и граничных условий. В [1] рассматривалась задача с несогласованными начальными и граничными условиями $\omega = \omega_0$, $F^0(\xi) = G^0(\xi) = H^0(\xi) = 0$ и построено формальное асимптотическое разложение при малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = D_0^2\omega_0 = \Omega(0)Z^2(0)/\nu$) и малых значениях τ. В [4—6] численно решалась стационарная задача (1.6)—(1.12) при заданном значении $D(\tau) = D_0$. Кинематическое условие (1.13) для всех построенных там решений не было выполнено, поэтому их физическая интерпретация затруднительна.

Данная работа посвящена построению стационарных и автомодельных решений задачи (1.6)—(1.13). Пусть $\omega_n(\tau) = (1 + n\tau)^{-1}\omega_n$ при $n = -1, 0, 1$, тогда задача (1.6)—(1.13) допускает решения вида

$$H(\xi, \tau) = (1 + n\tau)^{-1/2}[h_n(\zeta_n) + n\zeta_n/2],$$
$$F(\xi, \tau) = (1 + n\tau)^{-1}f_n(\zeta_n),\ G(\xi, \tau) = (1 + n\tau)^{-1}g_n(\zeta_n),$$
$$D_n(\tau) = (1 + n\tau)^{1/2}d_n,\ \zeta_n = (1 + n\tau)^{-1/2}\xi.$$

Неизвестные функции $f_n(\zeta)$, $g_n(\zeta)$, $h_n(\zeta)$ и число d_n при разных n удовлетворяют уравнениям (индексы n ниже опущены, штрих обозначает дифференцирование по переменной ζ)

$$f'' = f'h + f^2 - g^2 - nf; \tag{1.15}$$
$$g'' = g'h + 2fg - ng; \tag{1.16}$$
$$h' = -2f - n/2 \tag{1.17}$$

и граничным условиям

$$f(0) = h(0) = 0,\ g(0) = \omega; \tag{1.18}$$
$$f'(d) = g'(d) = h(d) = 0. \tag{1.19}$$

При $n = -1$ эти решения описывают автомодельное растекание, при $n = 0$ — стационарное течение, при $n = 1$ — автомодельный режим утолщения слоя жидкости на вращающейся плоскости.

2. Течение в слое на неподвижной плоскости. Если плоскость $z = 0$ не вращается, т. е. $\omega = 0$, то система (1.14)—(1.16) имеет решения такие, что $g \equiv 0$, а функции f и h удовлетворяют уравнениям

$$f'' = f'h + f^2 - nf; \tag{2.1}$$
$$h' = -2f - n/2. \tag{2.2}$$

Граничные условия в этом случае принимают вид

$$f(0) = h(0) = f'(d) = h(d) = 0. \tag{2.3}$$

Пусть $f(\zeta)$, $h(\zeta)$, d — решение задачи (2.1)—(2.3). Интегрируя (2.2) от 0 до d с учетом граничных условий, получим

$$\int_0^d f(\zeta)\,d\zeta = -nd/4. \tag{2.4}$$

Из уравнений (2.1), (2.2) вытекает

$$(f + h^2/4)'' = n^2/8 + 3f^2 \geqslant n^2/8. \tag{2.5}$$

Интегрируя последнее неравенство сначала от d до ξ, а затем от 0 до ζ и учитывая граничные условия (2.3), находим

$$f + h^2/4 \leqslant n^2(\zeta^2 - 2d\zeta)/16, \tag{2.6}$$

что после подстановки в (2.4) дает

$$-6nd \leqslant -n^2d^3. \tag{2.7}$$

Равенство в (2.5)—(2.7) может достигаться, только если $f \equiv 0$.

Имеют место следующие утверждения.

1. Если $\omega = 0$, $g \equiv 0$, $n = 0$, то $f \equiv 0$, $h \equiv 0$, т. е. не существует нетривиальных течений типа Кармана на неподвижной плоскости. В противном случае выполнялось бы строгое неравенство (2.7), т. е. $0 < 0$.

2. При $n = -1$ у задачи (2.1)—(2.3) нет решений. В противном случае было бы выполнено (2.7), т. е. $6d \leqslant -d^3$.

3. Если $n = 1$, то решение (2.1)—(2.3) удовлетворяет неравенствам

$$d < \sqrt{6}; \tag{2.8}$$

$$-2{,}3 < f'(0) < 0. \tag{2.9}$$

Неравенство (2.8) следует из (2.7) при $n = 1$. Для доказательства справедливости (2.9) нужно проинтегрировать (2.5) от 0 до d и воспользоваться (2.3). Это дает

$$f'(0) < 0. \tag{2.10}$$

Правое неравенство (2.9) доказано.

Из оценки (2.6) и уравнения (2.1) вытекает, что f не может достигать максимума при $\zeta \in [0, d]$. Поэтому в силу (2.3) и (2.10) $f(\zeta)$ монотонно убывает, а так как $h'' = -2f'$, функция $h(\zeta)$ выпукла вниз и, поскольку $h(0) = h(d) = 0$, отрицательна при $\zeta \in (0, d)$.

Учитывая установленные выше свойства функций $f(\zeta)$, $h(\zeta)$ и вид уравнения (2.1), легко показать, что $f''(\zeta) > 0$ при $\zeta \in (0, d)$, откуда $f(\zeta) < f(d)\zeta/d$. Подставляя последнее неравенство в (2.4), имеем $f(d) > -1/2$. Так как $f'(\zeta) < 0$, последнее неравенство влечет

$$f(\zeta) > f(d) > -1/2. \tag{2.11}$$

Поскольку $f(\zeta) < 0$, из (2.11) следует

$$f^2(\zeta) < 1/4 \quad \text{при } \zeta \in (0, d). \tag{2.12}$$

Подстановка (2.12) в (2.5) дает $(f + h^2/4)'' = 3f^2 + 1/8 < 7/8$. Интегрируя последнее неравенство от 0 до d и пользуясь (2.3), можно показать, что $f'(0) > -7d/8$, откуда, в силу того что d удовлетворяет (2.8), вытекает справедливость (2.9).

3. Автомодельный режим утолщения слоя на вращающейся плоскости. Численное решение. Пусть $\mathbf{F}_\omega(x, y, d) = (f'(d), g'(d), h(d))$, где $f(\zeta)$, $g(\zeta)$, $h(\zeta)$— решение задачи Коши

$$f(0) = h(0) = 0, \; g(0) = \omega, \; f'(0) = x, \; g'(0) = y \tag{3.1}$$

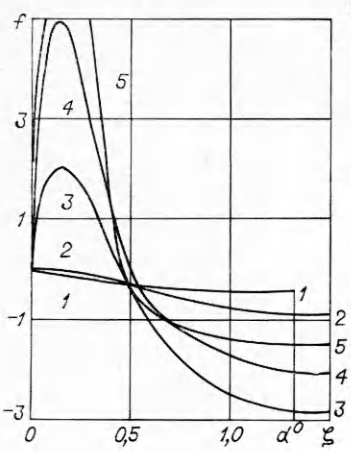
для системы уравнений (1.15)—(1.17) с $n = 1$. Тогда решение краевой задачи (1.15)—(1.19) эквивалентно решению системы трех уравнений

$$\mathbf{F}_\omega(x, y, d) = 0 \tag{3.2}$$

с тремя неизвестными $(x, y, d) = \mathbf{X}$.

Выше показано, что при $\omega = 0$ решение (3.2) с $y = 0$ надо искать в области $x \in (-2{,}3;\ 0)$, $d \in (0;\ 2{,}5)$. Это решение было построено в курсовой работе студентки НГУ С. Б. Барабановой (использовался метод пристрелки по параметрам x, d). Оказалось, что $x = x^0 \simeq -1{,}4006$, $d = d^0 \simeq 1{,}3231$.

Графики функций $f^0(\zeta)$ и $a^0(\zeta) = h^0(\zeta) + \zeta/2$ показаны на рис. 1 и 2 (кривые *1*). Функция $a(\zeta)$ пропорциональна осевой скорости течения, $f(\zeta)$— радиальной. Построенное решение описывает течение в утолщающемся слое на неподвижной плоскости, обусловленное притоком жидкости из бесконечности. При $\omega > 0$ решения (3.2) искались следующим методом продолжения по параметру ω. Пусть известно $\mathbf{X}_{j-1}$ — решение (3.2) при $\omega = \omega_{j-1}$, тогда решение при $\omega = \omega_j = \omega_{j-1} + \Delta\omega_j$



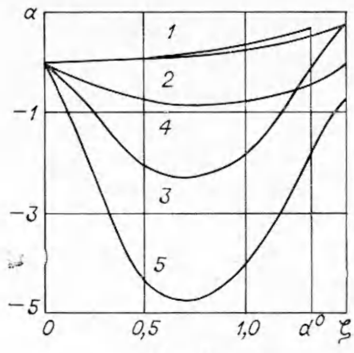


Рис. 2

Рис. 1

находится с помощью итерационного процесса (модифицированного метода Ньютона)

$$\mathbf{X}_j^0 = \mathbf{X}_{j-1} + \Delta\omega_j (\partial\mathbf{F}_\omega/\partial\mathbf{X})^{-1}\,\partial\mathbf{F}_\omega/\partial\omega; \tag{3.3}$$

$$\mathbf{X}_j^{k+1} = \mathbf{X}_j^k - (\partial\mathbf{F}_\omega/\partial\mathbf{X})^{-1}\cdot\mathbf{F}_\omega(\mathbf{X}_j^k); \tag{3.4}$$

$$\mathbf{X}_j = \lim_{k\to\infty}\mathbf{X}_j^k, \tag{3.5}$$

где $(\partial\mathbf{F}_\omega/\partial\mathbf{X})^{-1}$ — матрицы, обратные к $(\partial\mathbf{F}_\omega/\partial\mathbf{X})$, вычисленные при $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{j-1}$, $\omega = \omega_{j-1}$ и при $\mathbf{X} = \mathbf{X}_j^0$, $\omega = \omega_j$ в формулах (3.3), (3.4) соответственно.

При численной реализации этого метода вектор-функция $\mathbf{F}_\omega(\mathbf{X})$ находилась путем замены уравнений (1.15)—(1.17) разностной схемой второго порядка точности с шагом $\Delta\zeta = 0{,}001$. Частные производные $\mathbf{F}_\omega$ (кроме $\partial\mathbf{F}_\omega/\partial d$) (3.3), (3.4) заменялись разностными аналогами вида

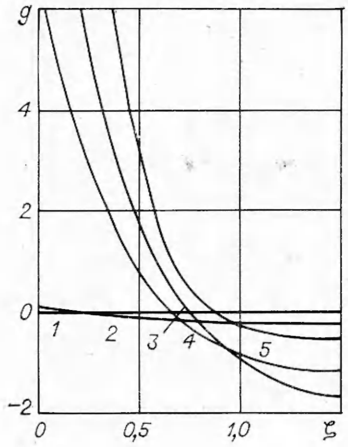
$$\frac{\partial\mathbf{F}_\omega}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}_\omega(x+\Delta x) - \mathbf{F}_\omega(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

и т. п. ($\Delta x = \Delta y = \Delta\omega = 10^{-4}$). Полагалось $\partial F_\omega/\partial d = (f''(d),\ g''(d),\ h'(d))$. Условие (3.5) заменялось на $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_j^k$, если $|\mathbf{X}_j^k - \mathbf{X}_j^{k+1}| < 10^{-8}$. Значения $\Delta\omega_j$ выбирались следующим образом:

$$\Delta\omega_j = \begin{cases} 0{,}01 & \text{при } \omega_j \in [0,2)\cup[3,5), \\ 0{,}001 & \text{при } \omega_j \in [2,3), \\ 0{,}1 & \text{при } \omega_j \in [5,10), \\ 1 & \text{при } \omega_j \in [10,100). \end{cases}$$

Результаты расчетов представлены на рис. 1—4. На рис. 4 сплошной линией показан график функции $d(\omega)$. Оказалось, что $d(\omega)$ возрастает при $\omega < \omega^0 \simeq 1{,}53$ и убывает при $\omega > \omega^0$, что связано с изменением характера течения. При $\omega < \omega_0 \simeq 1{,}06$ осевая компонента скорости всюду положительна, радиальная отрицательна, окружная меняет знак. Вблизи свободной поверхности жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вращения твердой плоскости. Абсолютная величина угловой скорости жидкости на свободной поверхности ω^1 близка к 2ω при малых значениях ω. С ростом ω отношение ω^1/ω убывает, ω^1 растет. На рис. 1—3 приведены соответственно графики функций $f(\zeta)$, $a(\zeta)$ и $g(\zeta)$ при $\omega = 0{,}2$ (кривые *2*).

Парадоксальный на первый взгляд характер построенных решений объясняется тем, что причина движения жидкости здесь наряду с вращением диска — поток на бесконечности. При малых ω центробежные силы на вращающемся диске недостаточны для того, чтобы развернуть течение.



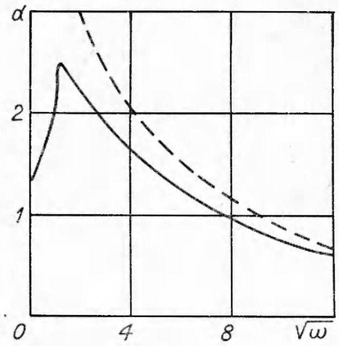


Рис. 4

Рис. 3

При $\omega > \omega_0$ вблизи твердой плоскости возникает зона, где $a(\zeta) < 0$, $f(\zeta) < 0$, т. е. жидкость отбрасывается центробежными силами. В окрестности свободной границы жидкость, так же как и при малых ω, движется к центру и вверх и вращается в направлении, противоположном направлению вращения диска, ω^1 возрастает с увеличением ω, ω^1/ω убывает. На рис. 1—3 цифрой *3* обозначены графики функций $f(\zeta)$, $a(\zeta)$ и $g(\zeta)$ при $\omega = 14{,}5$. «Противовращение» жидкости вблизи свободной поверхности является, по-видимому, следствием автомодельности рассматриваемых решений, требующих для своей реализации специальных условий на бесконечности.

Описанным выше методом были построены решения задачи (1.15)—(1.19) при $\omega \leqslant 100$. Если $\omega > 100$, то этот метод не обеспечивает нужной точности, так как значения производных искомых функций становятся слишком велики. При больших ω вычисления удобно вести в новых переменных, которые введены ниже.

4. Асимптотика решений при больших угловых скоростях. Стационарные решения. Замена переменных

$$\zeta = d\eta,\ f = \varphi d^{-2},\ g = \psi d^{-2},\ h = \chi d^{-1}; \tag{4.1}$$

$$\alpha = d^2 \tag{4.2}$$

приводит задачу (1.15)—(1.19) к виду

$$\begin{cases} \varphi'' = \chi\varphi' + \varphi^2 - \psi^2 - \alpha\varphi,\ \psi'' = \chi\psi' + 2\varphi\psi - \alpha\psi, \\ \chi' = -2\varphi - \alpha/2; \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\varphi(0) = \chi(0) = 0,\ \psi(0) = \psi_0 = \omega d^2,\ \varphi'(1) = \psi'(1) = \chi(1) = 0. \tag{4.4}$$

Параметр ψ_0 ниже считается заданным, α — искомым.

Очевидно, что любое решение задачи (4.3), (4.4) такое, что $\alpha > 0$ после замены (4.1), (4.2) дает решение (1.15)—(1.19) с $n = 1$ и, наоборот, любое решение (1.15)—(1.19) замена, обратная к (4.1), (4.2), переводит в решение (4.3), (4.4) с $\alpha > 0$.

Задача (4.3), (4.4) решалась численно методом продолжения по параметру ψ_0, аналогичным описанному в п. 3. Полагалось, что $\mathbf{F}_{\psi_0}(\mathbf{X}) = (\varphi'(1), \psi'(1), \chi(1))$, где $\mathbf{X} = (\varphi_0', \psi_0', \alpha)$, $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$, $\chi(\eta)$— решение задачи Коши $\varphi'(0) = \varphi'_0, \psi'(0) = \psi'_0$, $\psi(0) = \psi_0$ для уравнения (4.3), $\mathbf{X}_0 = (x(100)d^3(100),\ y(100)d^3(100),\ d^2(100))$.

Проведенные вычисления показали, что $\alpha > 0$ при $\psi_0 < \psi_{0*} \simeq 53{,}73$, $\alpha(\psi_{0*}) = 0$. Функции φ_*, ψ_*, χ_* — решение (4.3), (4.4) при $\psi_0 = \psi_{0*}$. Переходя опять к переменным f, g, h, d, ζ, можно заключить, что $d^2\omega \to \psi_{0*}$, $f(\zeta)/\omega \to \varphi_*\left(\sqrt{\psi_{0*}/\omega}\,\zeta\right)/\psi_{0*}$, $g(\zeta)/\omega \to \psi_*\left(\sqrt{\psi_{0*}/\omega}\,\zeta\right)/\psi_{0*}$, $h(\zeta)/\sqrt{\omega} \to \chi_*\left(\sqrt{\psi_{0*}/\omega}\,\zeta\right)/\sqrt{\psi_{0*}}$ при $\omega \to \infty$.

Нетрудно видеть, что если $\alpha = 0$, то система (4.3) совпадает с системой (1.15)—(1.17) при $n = 0$. Поэтому построенное решение $\varphi_*(\zeta)$, $\psi_*(\zeta)$, $\chi_*(\zeta)$, 0 задачи (4.3), (4.4) есть в то же время решение задачи (1.15)—(1.19) с $n = 0$, $d = 1$, т. е. стационарное решение (1.6)—(1.13).

Легко проверить, что при $n = 0$ замена (4.1), (4.2) переводит уравнения (1.15)—(1.17) и однородные граничные условия в себя. Правая часть неоднородного граничного условия переходит в ωd^2. Поэтому при произвольном значении ω и $n = 0$ задача (1.15)—(1.19) имеет решение

$$f_\omega(\zeta) = \omega\varphi_*(d_0(\omega)\zeta)/\psi_{0*}, \quad h_\omega(\zeta) = \omega^{1/2}\chi_*(d_0(\omega)\zeta)/\psi_{0*}^{1/2},$$
$$g_\omega(\zeta) = \omega\psi_*(d_0(\omega)\zeta)/\psi_{0*} \quad \left(d_0(\omega) = (\psi_{0*}/\omega)^{1/2}\right).$$

Графики функций $f_\omega(\zeta)$, $a_\omega(\zeta)$, $g_\omega(\zeta)$ при $\omega = 23{,}88$ обозначены цифрой *4* на рис. 1—3 соответственно. График функции $d_0(\omega)$ показан на рис. 4 и 5 штриховой линией.

Замечание 4.1. Если продолжить функции $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ симметрично относительно прямой $\zeta = d$, а $h(\zeta)$— антисимметрично, то получатся функции, удовлетворяющие при $\zeta \in (0, 2d)$ уравнениям (1.15)—(1.17), а при $\zeta = 0$ и $\zeta = 2d$ — граничным условиям на твердой стенке (1.18), т. е. описывающие стационарные течения между двумя дисками, вращающимися в одну сторону и с одинаковыми угловыми скоростями.

Замечание 4.2. Для всех построенных стационарных решений $\mathrm{Re} = \Omega Z^2/\nu = \psi_{0*} \simeq 53{,}73$.

5. Растекание слоя на вращающейся плоскости. Задача (4.3), (4.4) оказывается разрешима и при $\psi_0 > \psi_{0*}$, но $\alpha < 0$ при $\psi > \psi_{0*}$. Пусть $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$, $\chi(\eta)$, $\alpha < 0$ — решение (4.3), (4.4). Если положить $d^2 = -\alpha$ и сделать замену (4.1), полученные функции $f(\zeta)$, $g(\zeta)$, $h(\zeta)$ и число d будут решением задачи (1.15)—(1.19) с $n = -1$, т. е. будут описывать автомодельный режим растекания слоя на вращающейся плоскости.

Задача (4.3), (4.4) решалась при $\psi_0 > \psi_{0*}$ численно тем же методом, что и при $\psi_0 < \psi_{0*}$. При этом значение α менялось от 0 до -1, ω — от ∞ до 50, d — от 0 до 1. При меньших ω решение проводилось в переменных ζ, f, g, h, d методом, описанным в п. 3. Были найдены решения при $\omega > \omega_* \simeq 30{,}68$. Оказалось, что $|d'(\omega)| \to \infty$ при $\omega \to \omega_*$, и продолжить решение при $\omega < \omega_*$ не удалось. Последнее равенство дало основание предположить, что зависимость $d(\omega)$ неоднозначна. Последующие расчеты подтвердили это предположение. Они проводились методом, аналогичным описанному в п. 3, но в задаче (1.15)—(1.19) d считалась заданной, а ω — искомой. Использовался метод продолжения по параметру d. Полагалось $\Delta d = 0{,}1$, $d^0 = d(40)$, $x^0(40)$, $y^0 = y(40)$, $\omega^0 = 40$. Величины, стоящие в правых частях, вычислены ранее методом продолжения по параметру ω.

График зависимости $d(\omega)$ показан на рис. 5 сплошной линией. Решения, соответствующие нижней части этого графика, описывают течения такие, что вблизи твердой плоскости жидкость вращается в том же направлении, что и диск, и растекается вдоль него. Вблизи свободной поверхности жидкость течет к центру и вращается в направлении, противоположном направлению вращения диска. С ростом ω значения ω^1 и ω^1/ω увеличиваются. Графики функций $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ и $a(\zeta)$ при $\omega = 37{,}94$ обозначены на рис. 1—3 цифрой *5*. Для решений, отвечающих верхней части графика на рис. 5, ω^1 и ω^1/ω с ростом ω убывают. При больших ω эти решения имеют характер погранслоя, вне узкой зоны вблизи вращающейся плоскости они близки к

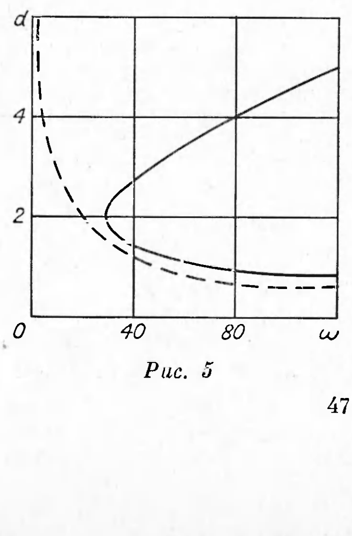


Рис. 5

(5.1)

$$f(\zeta) = -1,\ g(\zeta) = 0,\ h(\zeta) = 5(\zeta - d)/2.$$

Функции $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ и $h(\zeta)$, определенные формулами (5.1), удовлетворяют уравнениям (1.15)—(1.17) и условиям на свободной границе $\zeta = d$ при любом значении d, которое растет почти линейно с увеличением ω. Расчеты проводились до $\omega = 50$.

Построенные решения описывают течения, для которых толщина слоя D изменяется по закону $D = d\sqrt{1-\tau}$. За конечное время $D(\tau)$ обращается в нуль, т. е. поверхность «высыхает». Эти решения, по-видимому, не исчерпывают весь класс решений задачи (1.15)—(1.19). Например, возможно существование решений, имеющих при больших значениях ω асимптотику не (5.1), а $f(\zeta) = 0$, $g(\zeta) = 0$, $h(\zeta) = (\zeta - d)/2$.

Заметим, что из решений, построенных в пп. 3—5 с помощью преобразования растяжения переменных F, G, H, ξ, τ, можно получить автомодельные решения задачи (1.5)—(1.13) общего вида

$$F = (a + b\tau)^{-1}f(\zeta),\ G = (a + b\tau)^{-1}g(\zeta),\ H = (a + b\tau)^{-1/2}a(\zeta),$$
$$\zeta = \xi/\sqrt{a + b\tau}.$$

Автор благодарит В. В. Пухначева за обсуждение работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Higgins B. G.** Film flow on a rotating disk // Phys. Fluids.— 1986.— V. 29, N 11.
2. **Emslie A. G., Bonner F. T., Peck L. G.** Flow of a viscous liquid on a rotating disk // J. Appl. Phys.— 1958.— V. 29, N 5.
3. **Thomas I. M.** High laser damage threshold porous silica antireflective coating // Appl. Phys.— 1956.— V. 25, N 9.
4. **Matsumoto S., Saito K., Takashima Y.** Flow of a viscous liquid on a rotating disk // Bull. Tokyo Inst. Technol.— 1972.— N 109.
5. **Matsumoto S., Saito K., Takashima Y.** Thickness of liquid film on a rotating disk // Bull. Tokyo Inst. Technol.— 1973.— N 116.
6. **Matsumoto S., Saito K., Takashima Y.** Thickness of liquid film on a rotating disk // J. Chem. Engng Jap.— 1973.— V. 6, N 6.
7. **Karman Th. von.** Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM.— 1921.— Bd 1, N 4.
8. **Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнений Навье — Стокса // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.— Вып. 10.

г. Новосибирск *Поступила 6/XI 1987 г., в окончательном варианте — 10/V 1988 г.*

УДК 533.6.011.8

В. Д. Акиньшин, А. М. Макаров, В. Д. Селезнев, Ф. М. Шарипов

ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КОРОТКОМ КАНАЛЕ ВО ВСЕМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ КНУДСЕНА

В [1] показано, что в литературе течение разреженного газа в конечном канале рассматривалось в узком диапазоне чисел Кнудсена или в грубых предположениях, справедливых только для достаточно длинных каналов. Там эта задача решена в широком диапазоне, но в предположении, что молекулы, входящие в канал через его торцы, имеют абсолютную максвелловскую функцию распределения, что также ограничивает применение ее результатов конечными, но достаточно длинными каналами. В связи с этим возникает необходимость в точном решении данной задачи во всем диапазоне чисел Кнудсена с учетом формирования течения в предвходных областях сосудов.

1. Рассмотрим плоский канал длиной l, высотой $2a$, бесконечный в направлении z, соединяющий два полубесконечных сосуда с одним и тем же газом (рис. 1). В сосудах на достаточно большом удалении от канала газ поддерживается в равновесных условиях при давлениях p_1 и p_2 и одинаковых температурах T. Под действием перепада давления газ движется в направлении x.