

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН.— 1978.— Т. 125, № 1.
2. Eckmann J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems // Rev. Modern Phys.— 1981.— V. 53.— P. 643.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1978.
5. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики.— М.: Мир, 1984.— Т. 2.
6. Farmer J., Ott E., Yorke J. The dimension of chaotic attractors // Physica D.— 1983.— V. 7.— P. 153.
7. Лукацук С. Н., Предтеченский А. А., Фалькович Г. Е., Черных А. И. О вычислении размерностей аттракторов по экспериментальным данным.— Новосибирск, 1985.— (Препр./ИАиЭ СО АН СССР; № 280).
8. Львов В. С., Предтеченский А. А., Черных А. И. Бифуркации и хаос в системе вихрей Тейлора: натурный и численный эксперимент // ЖЭТФ.— 1981.— Т. 80, № 3.
9. Лукацук С. Н., Предтеченский А. А. Наблюдение резонансных торов в фазовом пространстве течения Куэтта // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274, № 6.
10. Packard N., Gruitichfield J. et al. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett.— 1980.— V. 45, N 9.
11. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture notes in mathematics.— Berlin: Springer-Verlag, 1980.— V. 898.
12. Brandstater A., Swift J. et al. Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system // Phys. Rev. Lett.— 1983.— V. 51, N 16.
13. Brandstater A., Swift J., Swinney H., Wolf A. A strange attractor in a Couette — Taylor experiment // Turbulent and chaotic phenomena in fluids: Proc. IUTAM Symp., Kyoto, 1983.— Amsterdam: North-Holland, 1984.
14. Malraison B., Aften P. et al. Dimensions of strange attractors. An experimental determination for the chaotic regime of two convective systems // J. de Phys. Lett.— 1983.— V. 49.— P. 897.
15. Roux J., Simoyi R., Swinney H. Observation of the strange attractor // Physica D.— 1983.— V. 8.— P. 257.
16. Guckenheimer J., Buzina J. Dimension measurements for geostrophic turbulence // Phys. Rev. Lett.— 1983.— V. 51.— P. 1438.
17. Giglio M., Musazzi S., Umberto S. Low-dimensionality turbulent convection // Phys. Rev. Lett.— 1984.— V. 53.— P. 2402.
18. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ.— 1984.— Т. 39, № 12.

*Поступила 19/Х 1987 г.*

УДК 532.593

### СТРУКТУРА ВНУТРЕННИХ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ СРЕДНИМ СЛОЕМ

А. В. Аксенов, В. В. Можаяв, В. Е. Скороваров,  
А. А. Шеронов

(Москва)

При определении угла зоны волновых возмущений внутренних корабельных волн по амплитудным характеристикам возникают трудности нахождения границы этой зоны [1, 2]. В настоящей работе делается попытка зафиксировать границы этой области по линиям горбов и впадин волнового возмущения в следе за движущимся источником.

В случае поверхностных корабельных волн линии постоянной фазы имеют точку возврата. При этом одному семейству гладких кривых соответствует длинноволновая часть спектра возмущений (поперечные волны), а другому — коротковолновая (продольные волны) [3]. Прямая, проходящая через точки возврата линий постоянной фазы, образует с осью движения источника угол, равный полураствору угла Кельвина. Эффективность возбуждения того или иного участка спектра возмущений определяется соотношением между характерным горизонтальным размером источника и максимальной длиной волны или значением обычного числа Фруда.

Возбуждение отдельных участков спектра внутренних корабельных волн в трехслойной жидкости со стратифицированным средним слоем осуществлялось изменением

глубины погружения равномерно движущегося источника. Это отвечает изменению характерного горизонтального размера возмущения в стратифицированном слое над движущимся источником, что справедливо для поверхностных корабельных волн [4].

**1. Теоретический анализ.** В линейном приближении с использованием приближения Буссинеска уравнения для отыскания вертикальной составляющей скорости возмущений запишем в безразмерных переменных [3]:

$$(1.1) \quad \Delta w_1 = 0, \quad \Delta w_3 = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + \frac{4}{\text{Fr}^2} \Delta_z \right) w_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь ось  $x$  направлена вдоль набегающего потока, движущегося с постоянной скоростью  $U$  ( $U > 0$ ) (начало системы координат выбрано на невозмущенной нижней границе стратифицированного слоя); ось  $z$  направлена вертикально вверх, противоположно направлению действия силы тяжести;  $w$  — вертикальная компонента вектора скорости;  $\text{Fr} = U/(NH)$  — внутреннее число Фруда среднего слоя;  $H = \text{const}$  — высота невозмущенного среднего слоя. Рассматривается трехслойная модель жидкости с непрерывным распределением плотности и отличным от нуля градиентом плотности в среднем слое ( $N = \text{const}$  — частота Вэйселя — Брента среднего слоя). В качестве линейного масштаба взята высота стратифицированного слоя  $H$ , за масштаб времени принято отношение  $H/U$ , масштаб скорости взят равным скорости набегающего потока  $U$ . Все величины, относящиеся к верхнему, среднему и нижнему слоям, обозначены индексами 1, 2, 3 соответственно.

На границах слоев должно выполняться условие непрерывности нормальной скорости и давления. Для вертикальной скорости имеем условие

$$(1.2) \quad w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial w_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 1;$$

$$w_2 = w_3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{\partial w_3}{\partial z} \quad \text{при } z = 0,$$

требуя ограниченность решений в верхнем и нижнем слоях при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Выпишем дисперсионное соотношение для рассматриваемой задачи:

$$(1.3) \quad \text{tg } l = \frac{2nl}{l^2 - k^2}, \quad k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}, \quad l^2 = k^2 \left[ \frac{1}{\text{Fr}^2 (\Omega - k_1)^2} - 1 \right]$$

( $k_1, k_2$  — координаты волнового вектора,  $\Omega$  — частота [5, 6]). Дисперсионное соотношение состоит из счетного числа ветвей  $\Omega = \Omega_n(k_1, k_2, \text{Fr})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Из (1.3) можно найти вектор групповой скорости  $\mathbf{V}_{\text{гр}}^{(n)} = \left\{ \frac{\partial \Omega_n}{\partial k_1}, \frac{\partial \Omega_n}{\partial k_2} \right\}$ ,

который указывает направление, где существуют волны с частотой  $\Omega$  и волновым числом  $\mathbf{k}$  при больших расстояниях от источника возмущений для волновой системы с номером  $n$ . При этом линии постоянной фазы  $\mathbf{kx} = A = \text{const}$  задаются параметрически выражением  $\mathbf{x}/A = \mathbf{V}_{\text{гр}}^{(n)}/\mathbf{kV}_{\text{гр}}^{(n)}$ . Здесь  $\mathbf{x} = \{x, y\}$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  удовлетворяет дисперсионному соотношению при фиксированной частоте  $\Omega$  [3].

В стационарном случае ( $\Omega = 0$ ) составляющие вектора групповой скорости запишем в виде

$$V_{1\text{гр}}^{(n)} = 1 + k_1 L, \quad V_{2\text{гр}}^{(n)} = k_2 L, \quad L = -k_1 l_n^2 / [k^2 (l_n^2 + k^2 + 2k)],$$

откуда находим половину угла, внутри которого сосредоточены волновые возмущения для волновой системы с номером  $n$ :  $\theta_n = \max \arctg \left| \frac{V_{2\text{гр}}^{(n)}}{V_{1\text{гр}}^{(n)}} \right|$ .

Линии постоянной фазы для нулевой моды ( $n = 0$ ), а также для волновых систем с номерами  $n$  ( $n \geq 1$ ) при условии  $n l \text{Fr} < 1$  имеют излом и

качественно похожи на линии постоянной фазы поверхностных корабельных волн. В точке излома линии постоянной фазы значение волнового вектора соответствует точке перегиба дисперсионной кривой в плоскости  $k_1, k_2$ . Для волновых систем с номерами  $n$  при условии  $n\lambda Fg > 1$  у дисперсионных кривых нет точек перегиба и линии постоянной фазы представляют собой кривые с выпуклостью вниз и наклонной асимптотой.

**2. Экспериментальные результаты.** Экспериментальные исследования фазовой структуры внутренних волн в трехслойной модели проводились в лабораторном бассейне с размерами  $1,0 \times 0,35 \times 0,25$  м. Линейная стратификация среднего слоя жидкости осуществлялась непрерывной подачей в бассейн водного раствора поваренной соли переменной концентрации. Плотности однородных слоев жидкости были равны плотностям жидкости на верхней и нижней границах стратифицированного слоя.

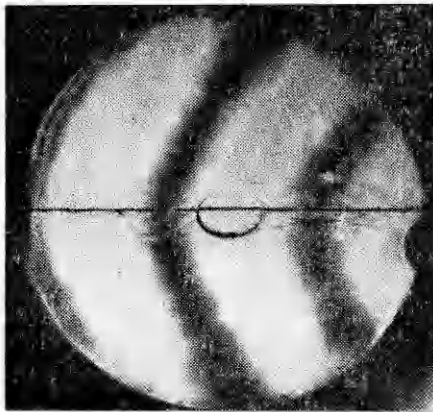
Высота стратифицированного слоя 4–5 см, а высота однородных слоев 6–7 см. Предварительными экспериментами установлено, что увеличение вертикального размера однородных слоев до 15 см практически не меняет наблюдаемые фазовые картины. Эксперименты проводились сразу после заливки бассейна, что позволяло пренебречь влиянием диффузии соли на границах стратифицированного слоя. Распределение плотности жидкости по высоте измерялось с помощью датчика электропроводности. По полученному распределению плотности уточнялось значение частоты Вейяля — Брента для среднего слоя [6]. Рабочие значения частот плавленности составляли  $1,3–1,5$  с<sup>-1</sup>.

Возбуждение внутренних волн в стратифицированном слое осуществлялось равномерным горизонтальным движением сферы диаметром 3,8 см в однородном нижнем слое жидкости (диапазон скоростей 1–6 см/с).

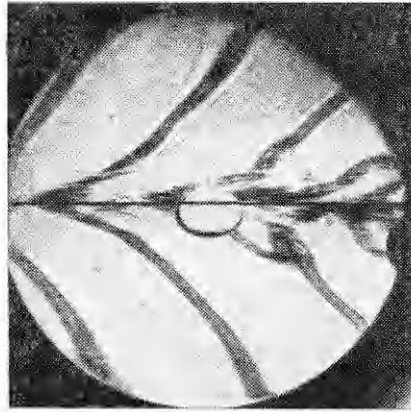
Движение источника вне стратифицированного слоя (или частично погруженного в него) позволяло эффективно возбуждать нулевую моду [6]. В этом случае весь слой как единое целое совершает волнообразные движения и фазовые картины в любых горизонтальных плоскостях одинаковы. Интегральная фазовая картина, полученная при вертикальном просвечивании всех слоев жидкости, будет соответствовать реальной картине линий постоянной фазы.

Для визуализации фазовых картин волновых возмущений применялся метод темного поля с использованием теневого прибора ИАБ-451. Для вертикального направления распространения светового пучка брали плоское зеркало, установленное под углом  $45^\circ$  к вертикали. Горизонтальный пучок света из осветительной части теневого прибора после отражения от плоского зеркала проходил через оптическое окно в дне бассейна, слой рабочей жидкости и еще через одно оптическое окно, а после отражения от верхнего плоского зеркала снова становился горизонтальным и попадал в приемную часть теневого прибора. Установка верхнего оптического окна была вызвана необходимостью устранения случайных поверхностных волновых возмущений. С этой целью нижняя поверхность окна приводилась в соприкосновение с поверхностью воды. Диаметр оптических окон 20 см. Этим размером и ограничивалась область одновременной визуализации. Для восстановления полной волновой картины за сферой на расстояниях до 15 калибров (в нашем случае примерно 60 см) приходилось при каждом проезде последовательно снимать отдельные фрагменты волновой картины на фотопленку. А затем по отдельным увеличенным изображениям с негативов восстанавливалась полная картина. При фотографировании фиксировались линии нулевого градиента оптического пути (в просвечиваемом слое жидкости) вдоль направления движения сферы (ось  $x$ ). Эти линии практически совпадают с линиями, идущими вдоль горбов и впадин фазовой поверхности. Для контроля проводилась регистрация и линий нулевого градиента вдоль перпендикулярного направления (вдоль оси  $y$ ). В пределах погрешности измерений обе линии совпадают в дальней зоне.

Из теоретического анализа установлено, что фазовая картина внутренних волн в стратифицированном слое для нулевой моды по своей



Р и с. 1

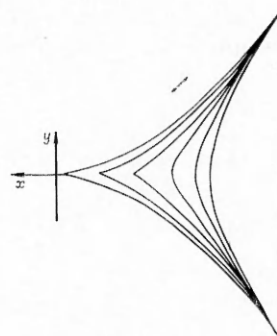


Р и с. 2

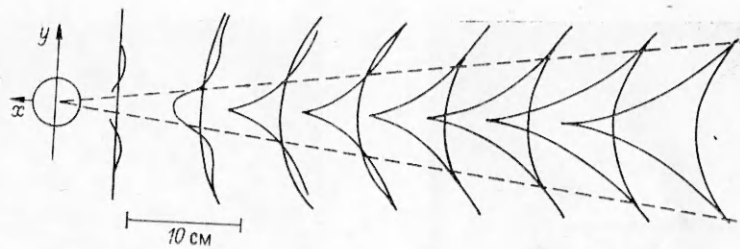
структуре практически не отличается от фазовой картины поверхностных корабельных волн. В обоих случаях волновое возмущение в следе за источником состоит из сплошного спектра плоских волн, который имеет длинноволновую границу. Направление волнового вектора волны с минимальным значением волнового числа совпадает с вектором скорости источника, а по мере увеличения волнового числа угол между этими векторами растет и стремится к  $\pi/2$ . Возбуждение той или иной части спектра определяется соотношением между максимальной длиной волны и размером источника. Размеры лабораторного бачка не позволяли использовать источники больших размеров, поэтому предварительно была проверена идея изменять эффективный размер источника погружением небольшого шарика (диаметром 3,8 см) на разные глубины под стратифицированным слоем (как и над ним). С этой целью исследована зависимость фазовой картины внутренних волн, возникающих при горизонтальном движении шарика с фиксированной скоростью, от глубины погружения.

На рис. 1 показана фотография фазовой картины при движении шарика со скоростью 2,6 см/с на глубине 5 см (от нижней границы стратифицированного слоя до центра шарика). Как и все картины данной серии, этот фрагмент получен на расстоянии 40 см за источником при  $H = 5$  см и  $N = 1,5$  с<sup>-1</sup>. Фазовая картина отвечает длинноволновой части спектра внутренних волн. Случай возбуждения коротковолновой части спектра иллюстрируется на рис. 2, когда источник движется на нулевой глубине. Искажения в следе вызваны вихревой дорожкой. В центре обеих фотографий видна технологическая деталь крепления одного из плоских зеркал. Все семейство фазовых картин данной серии изображено на рис. 3. Крайняя справа линия соответствует глубине погружения 5 см, а каждая последующая — уменьшению глубины погружения на 1 см. Полученная картина эффективности возбуждения различных участков спектра внутренних волн от глубины погружения источника в виде шара не является универсальной, а определяется  $Fr = U/NH$ . С увеличением  $Fr$  растет значение максимальной длины волны в данном спектре (спектр уширяется) и для эффективного возбуждения длинноволновой части спектра нужно увеличивать или размер источника, или глубину погружения. Указанные выше размер источника и глубины погружения позволяли перекрыть рабочий диапазон  $Fr = 0,25-1,0$ .

Основная часть работы состояла в обнаружении клина (типа клина поверхностных корабельных волн Кельвина) для нулевой моды в стратифицированном слое и измерении его угла по-



Р и с. 3



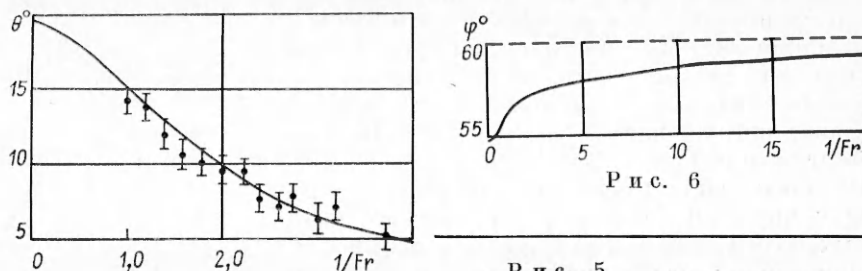
Р и с. 4

лураствора в зависимости от  $Fr$ . С этой целью для фиксированных значений  $Fr$  при двух проездах источника (с разными глубинами погружения) фотографировались картины линий гребней и впадин. При одном проезде восстанавливалась картина волновых возмущений длинноволновой части спектра, а при другом — коротковолновая часть спектра. Затем они совмещались и получалась полная картина внутренних волн в стратифицированном слое. Типичная полная картина линий горбов и впадин для  $Fr = 0,385$  приведена на рис. 4. Штриховыми линиями показаны границы клина, угол полураствора клина в данном случае равен  $7 \pm 1^\circ$ . Конфигурации гребней и впадин в дальней зоне, где уже нет влияния конечного размера источника, имеют точки возврата на границе клина. Для увеличения точности измерения углов полураствора клина необходимо фиксировать еще большее число точек возврата в дальней зоне, а это требует больших размеров лабораторного бассейна. Все полученные экспериментальные значения углов  $\theta$  полураствора клина нанесены на график зависимости  $\theta$  от обратной величины внутреннего числа Фруда ( $1/Fr$ ) на рис. 5 в виде отдельных точек (линия — аналогичная теоретическая кривая [5]). Видно, что экспериментальные результаты хорошо согласуются с выводами линейной теории.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показали, что фазовая структура внутренних волн в стратифицированном слое для нулевой моды аналогична фазовой картине поверхностных корабельных волн Кельвина. При этом различие в дисперсионных соотношениях приводит только к отличию зависимости угла  $\theta$  от режимов движения источника. В случае поверхностных корабельных волн на глубокой воде угол полураствора клина  $\theta_k = \arcsin(1/3)$  не зависит от скорости источника, а для внутренних корабельных волн в стратифицированном слое он зависит от  $Fr$ : при  $Fr \rightarrow 0$  стремится к нулю, а при  $Fr \rightarrow \infty$  — к  $\theta_k$ .

Еще меньшее отличие наблюдается в поведении волн на границе самого клина. Гребни на границе клина поверхностных корабельных волн составляют с осью  $x$  угол  $\varphi_k = \arctg \sqrt{2}$ . В случае внутренних корабельных волн при  $Fr \rightarrow \infty$  он стремится к  $\varphi_k$ , а при уменьшении  $Fr$  медленно растет и стремится к  $60^\circ$ . На рис. 6 изображена теоретическая зависимость угла наклона касательной в точке возврата линии постоянной фазы к оси  $x$  от  $1/Fr$ .

При малых значениях  $Fr$  экспериментально наблюдаемые линии постоянной фазы практически представляют собой параллельные прямые



Р и с. 5

линии. При этом они выходят за границу волновой зоны, определяемой значением  $\theta$  ( $\theta \rightarrow 0$ ).

Авторы выражают благодарность А. Т. Онуфриеву за обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gray E. P., Hart R. W., Farrell R. A. The structure of the internal wave Mach front generated by a point source moving in a stratified fluid // Phys. Fluids.— 1983.— V. 26, N 10.
2. Sharman R. D., Wurtele M. G. Ship waves and lee waves // Atmosph. Sci.— 1983.— V. 40, N 2.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.— М.: Мир, 1981.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
5. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие при нестационарном движении источника в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 4.
6. Аксенов А. В., Можаяев В. В. и др. Структура внутренних волн в трехслойной жидкости со стратифицированным средним слоем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 3.

Поступила 22/X 1987 г.

УДК 532.5 + 517.958

### НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ПЛОСКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Капцов

(Красноярск)

Точных стационарных решений двумерных уравнений Эйлера известно относительно немного [1—3]. Это отчасти объясняется тем, что группа, допускаемая [4] этими уравнениями, бедна. В то же время прогресс, достигнутый в изучении нелинейных волновых уравнений [5, 6], позволяет частично перенести методы исследования и на эллиптические задачи. Цель работы — получение решений уравнения для функции тока и их анализ. Найденные решения описывают движение типа источника в завихренной жидкости, периодическое течение между двумя стенками, движение в прямоугольном цилиндре и ряд других.

1. В случае двумерного стационарного течения идеальной жидкости функция тока  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \Delta\psi(x, y) = \omega,$$

причем завихренность  $\omega$  есть функция от  $\psi$ . Для решения уравнения (1.1) можно при определенных видах правых частей использовать модифицированный метод разделения переменных и преобразование Беклунда [6].

Предполагается, что завихренность  $\omega(\psi) = \varepsilon \sin \psi$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Решения (1.1) ищутся в виде [5]  $\psi(x, y) = 4 \arctg(f(x)g(y))$ , функции  $f, g$  удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(1.2) \quad f'^2 = nf^4 + mf^2 + k, \quad g'^2 = kg^4 + (\varepsilon - m)g^2 + n$$

( $n, m, k$  — произвольные константы). Следовательно, завихренность и компоненты вектора скорости вычисляются по формулам

$$(1.3) \quad \omega = 4\varepsilon \frac{fg(1-f^2g^2)}{(1+f^2g^2)^2};$$

$$(1.4) \quad u = 4 \frac{fg'}{1+f^2g^2}, \quad v = -4 \frac{f'g}{1+f^2g^2}.$$

Выбор константы в (1.2) определяет тип течения. Пусть выполнены неравенства  $n > 0, k, m < 0$  и  $\varepsilon = -1$ . Рассматриваются три случая: а)  $4kn < m^2 < 1/4$ ; б)  $4kn = m^2 < 1/4$ ; в)  $4kn = m^2 = 1/4$ . Сначала обсуждается наиболее вырожденная ситуация «в». При этом уравнениям (1.2) удовлетворяют функции  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right), \quad g(y) = 2\sqrt{n} \operatorname{th}\left(\frac{y}{2}\right)$ . Тогда