УДК 539.375

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

М. В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1129 Баку, Азербайджан
E-mail: irakon63@hotmail.com

Построена математическая модель зарождения трещины в полосе (стержне) переменной толщины при неравномерном нагреве. Полагается, что по мере нагружения полосы (стержня) тепловой нагрузкой в ней возникают зоны предразрушения, моделируемые как области ослабленных межчастичных связей материала. Наличие связей между берегами зоны предразрушения моделируется приложенными к поверхности зоны предразрушения силами сцепления. Решение задачи о равновесии изотропной полосы переменной толщины с зоной предразрушения сводится к решению нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения с ядром типа ядра Коши, из которого устанавливается зависимость сил сцепления в зоне зарождения трещины от величины расхождения ее берегов. Условие появления трещины в полосе переменной толщины формулируется с учетом критерия предельного растяжения связей материала.

Ключевые слова: полоса (стержень) переменной толщины, зона предразрушения, связи между берегами, силы сцепления, неравномерный нагрев.

Постановка задачи. Полосы (стержни) переменной толщины, используемые в различных изделиях и конструкциях, часто подвергаются действию тепловых нагрузок. Исследование разрушения полос (стержней) переменной толщины при неравномерном нагреве имеет большое практическое значение.

Рассмотрим однородную изотропную полосу (стержень) переменной толщины. Обозначим через $2c$ и $2h$ соответственно ширину и толщину полосы (рис. 1). Срединная плоскость xy является плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Пусть полоса переменной толщины подвергается

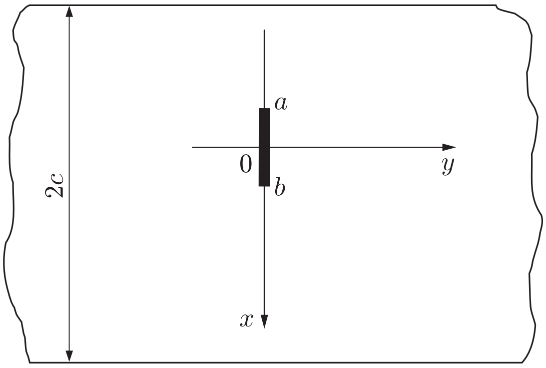

Рис. 1. Схема задачи о зарождении трещины в полосе переменной толщины при неравномерном нагреве

неравномерному нагреву по ширине поперечного сечения. Будем считать, что температура полосы является функцией только координаты x и не зависит от других координат. По мере нагружения полосы тепловой нагрузкой в материале возникают зоны предразрушения, которые моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале. Считается, что зона зарождения трещины представляет собой слой конечной длины, содержащий материал, в котором связи между его структурными элементами частично нарушены. Наличие связей между берегами зоны предразрушения моделируется силами сцепления, приложенными к поверхности зоны предразрушения. Физическая природа таких связей и размеры области предразрушения зависят от вида материала.

Моделирование трещинообразования в полосе на основе модели зоны предразрушения со связями между берегами включает три этапа: 1) установление зависимости сил сцепления от величины раскрытия берегов зон предразрушения; 2) анализ напряженно-деформированного состояния вблизи зоны предразрушения с учетом тепловой нагрузки и сил сцепления; 3) определение критической тепловой нагрузки, при которой появляется трещина.

Так как зоны предразрушения (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью полосы, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала.

В рассматриваемом случае трещинообразование в полосе (стержне) переменной толщины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. При этом размер зоны с ослабленными межчастичными связями материала заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения задачи.

Как известно, на ранних стадиях разрушения формируются области с нарушенной структурой материала в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1–4]. Считается, что толщина полосы (стержня) $2h(x,y)$ удовлетворяет условиям $0 < h_1 \leqslant h(x,y) \leqslant h_2$, где h_1, h_2 — наименьшее и наибольшее значения толщины полосы соответственно.

Функция толщины может быть представлена в виде
$$h(x,y) = h_0[1 + \varepsilon \bar{h}(x,y)],$$
где $h_0 = (h_1 + h_2)/2$; $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$ — малый параметр; $-1 \leqslant \bar{h}(x,y) \leqslant 1$ — некоторая известная безразмерная непрерывная функция. При заданном законе изменения толщины значение ε будет постоянным.

Примем следующие предположения. Грани полосы свободны от внешних нагрузок. Зона предразрушения ориентирована в направлении, перпендикулярном боковым граням полосы. Ось x системы координат (x,y) совпадает с линией, вдоль которой расположена зона предразрушения ($a \leqslant x \leqslant b$) (см. рис. 1). При действии тепловой нагрузки на полосу в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают нормальные $q_y(x)$ и касательные $q_{xy}(x)$ усилия. Эти усилия заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения краевой задачи механики разрушения для полосы переменной толщины.

Запишем уравнения статического деформирования полосы переменной толщины:

— уравнения равновесия
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0;$$
— закон Гука
$$N_x = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big), \quad N_y = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1+\nu}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big).$$

Здесь N_x, N_y, N_{xy} — нормальные и сдвиговые усилия на единицу длины соответственно; u, v — компоненты вектора смещений; E — модуль упругости материала полосы; ν — коэффициент Пуассона материала.

Граничное условие в зоне предразрушения имеет следующий вид:

$$N_y - iN_{xy} = q_y(x) - iq_{xy}(x) \qquad \text{при} \quad y = 0, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи необходимо дополнить соотношением, связывающим раскрытие берегов зоны предразрушения и усилия в связях. Без потери общности это соотношение представим в виде [4]

$$v^+(x,0) - v^-(x,0) - i(u^+(x,0) - u^-(x,0)) = C(x,\sigma)[q_y(x) - iq_{xy}(x)], \tag{2}$$

где функцию $C(x,\sigma)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения; $v^+ - v^-$ и $u^+ - u^-$ — нормальная и касательная составляющие величины раскрытия берегов зоны предразрушения соответственно; $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$ — модуль вектора усилий в связях; $i = \sqrt{-1}$.

Метод решения. Решение системы уравнений статического деформирования полосы (стержня) будем искать в виде разложений по малому параметру ε [5]:

$$N_x = N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \ldots, \quad N_y = N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \ldots, \quad N_{xy} = N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \ldots,$$
$$q_y = q_y^{(0)} + \varepsilon q_y^{(1)} + \ldots, \quad q_{xy} = q_{xy}^{(0)} + \varepsilon q_{xy}^{(1)} + \ldots, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots,$$
$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots, \quad a = a_0 + \varepsilon a_1 + \ldots, \quad b = b_0 + \varepsilon b_1 + \ldots.$$

При построении решения используем процедуру метода возмущений. Полученные уравнения нулевого приближения совпадают с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \qquad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \tag{3}$$

Аналогично определяются составляющие X_2, Y_2 объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи (1) принимают следующий вид:

— в нулевом приближении

$$N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)} = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} \qquad \text{при} \quad y = 0, \quad a_0 \leqslant x \leqslant b_0; \tag{4}$$

— в первом приближении

$$N_y^* - iN_{xy}^* = q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x,0)(q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)}) \qquad \text{при} \quad y = 0, \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1. \tag{5}$$

При выводе уравнений первого приближения были приняты следующие обозначения:

$$N_x^* = N_x^{(1)} - N_{x0}^{(1)}, \qquad N_y^* = N_y^{(1)} - N_{y0}^{(1)}, \qquad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - N_{xy0}^{(1)},$$
$$N_{x0}^{(1)} = \bar{h}(x,y) N_x^{(0)}, \qquad N_{y0}^{(1)} = \bar{h}(x,y) N_y^{(0)}, \qquad N_{xy0}^{(1)} = \bar{h}(x,y) N_{xy}^{(0)}.$$

Из соотношения (2) получаем:

— в нулевом приближении

$$v_0^+ - v_0^- - i(u_0^+ - u_0^-) = C(x, \sigma_0)[q_y^{(0)}(x) - iq_{xy}^{(0)}(x)]; \tag{6}$$

— в первом приближении

$$v_1^+ - v_1^- - i(u_1^+ - u_1^-) = C(x, \sigma_1)[q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x)]. \tag{7}$$

Здесь $\sigma_j = \sqrt{[q_y^{(j)}]^2 + [q_{xy}^{(j)}]^2} \quad (j = 0, 1)$.

Напряженно-деформированное состояние в окрестности зоны предразрушения определим приближенно [6]: потребуем, чтобы выполнялись граничные условия на контуре зоны предразрушения (условия (4), (5)) и на значительном расстоянии от зоны предразрушения напряженное состояние в полосе совпадало с термонапряженным состоянием, обусловленным неравномерным нагревом сплошной (бездефектной) полосы.

Рассмотрим решение в нулевом приближении. Представим напряженное состояние в нулевом приближении в виде

$$N_x^{(0)} = N_{xT}^{(0)} + N_{x1}^{(0)}, \qquad N_y^{(0)} = N_{yT}^{(0)} + N_{y1}^{(0)}, \qquad N_{xy}^{(0)} = N_{xyT}^{(0)} + N_{xy1}^{(0)}, \tag{8}$$

где $N_{xT}^{(0)}$, $N_{yT}^{(0)}$, $N_{xyT}^{(0)}$ — нормальные и сдвиговые усилия на единицу длины в сплошной полосе в отсутствие зоны ослабленных межчастичных связей материала, обусловленные неравномерным нагревом; $N_{x1}^{(0)}$, $N_{y1}^{(0)}$, $N_{xy1}^{(0)}$ — нормальные и сдвиговые усилия на единицу длины, обусловленные наличием зоны предразрушения в материале.

Для температурных усилий $N_{xT}^{(0)}$, $N_{yT}^{(0)}$, $N_{xyT}^{(0)}$ имеем выражения

$$\begin{gathered} \frac{N_{yT}^{(0)}}{2h_0} = -\alpha ET(x) + \frac{1}{2c}\int\limits_{-c}^{c} \alpha ET(x)\,dx + \frac{3x}{2c^3}\int\limits_{-c}^{c} \alpha ET(x)x\,dx, \\ N_{xT}^{(0)} = 0, \qquad N_{xyT}^{(0)} = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где α — температурный коэффициент линейного расширения материала полосы; $T(x)$ — функция температуры.

С учетом (8), (9) граничное условие (4) принимает вид

$$N_{y1}^{(0)} - iN_{xy1}^{(0)} = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} - N_{yT}^{(0)} \qquad \text{при} \quad y = 0, \quad a_0 \leqslant x \leqslant b_0. \tag{10}$$

В плоской задаче теории упругости компоненты усилий $N_{x1}^{(0)}$, $N_{y1}^{(0)}$, $N_{xy1}^{(0)}$ выражаются через две аналитические функции:

$$\begin{gathered} \frac{N_{x1}^{(0)} + N_{y1}^{(0)}}{2h_0} = 2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}\,], \qquad z = x + iy, \\ \frac{N_{y1}^{(0)} - N_{x1}^{(0)} + 2iN_{xy1}^{(0)}}{2h_0} = 2[\bar z\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)]. \end{gathered} \tag{11}$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ в нулевом приближении (10) получаем граничную задачу

$$\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\overline{\Phi_0'(x)} + \overline{\Psi_0(x)} = f(x), \qquad a_0 \leqslant x \leqslant b_0, \tag{12}$$

где

$$f(x) = q_y^{(0)} - iq_{xy}^{(0)} + f_0(x), \qquad f_0(x) = \alpha ET(x) - \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} \alpha ET(x)\,dx - \frac{3x}{2c^3}\int_{-c}^{c} \alpha ET(x)x\,dx.$$

Так как $T = T(x)$, в нулевом приближении имеем $q_{xy}^{(0)} = 0$.

Краевую задачу (12) сведем к задаче линейного сопряжения [6]

$$\Phi_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)\,dt}{X(t)(t-z)}, \qquad \Psi_0(z) = -z\Phi_0'(z), \tag{13}$$

где $X(z) = \sqrt{(z-a_0)(z-b_0)}$ (при $z \to \infty \quad X(z) = z + O(1/z)$).

Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу разреза.

В соответствии со свойствами функции $\Phi_0(z)$ условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\int_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)\,dt}{X(t)} = 0, \qquad \int_{a_0}^{b_0} \frac{tf(t)\,dt}{X(t)} = 0. \tag{14}$$

Уравнения (14) служат для определения неизвестных геометрических параметров зоны предразрушения a_0 и b_0.

Для определения потенциалов $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ необходимо найти усилия в связях между берегами зоны предразрушения.

Для того чтобы определить функцию $q_y^{(0)}(x)$, рассмотрим формулу [6]

$$2\mu\Big(\frac{\partial u_0}{\partial x} + i\,\frac{\partial v_0}{\partial x}\Big) = \varkappa_0\Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} - z\overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0(z)} + \beta f_*(z), \tag{15}$$

где $\varkappa_0 = (3-\nu)/(1+\nu)$; $\beta = \alpha E/(1+\nu)$; $T = \operatorname{Re} f_*(z)$; μ — модуль сдвига материала; $2\mu(u_* + iv_*) = \beta\displaystyle\int f_*(z)\,dz$ — перемещения точек полосы, вызванные неравномерным нагревом, в отсутствие зоны, в которой связи между структурными элементами материала частично нарушены.

Используя соотношение (15) и граничные значения функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, на отрезке $a_0 \leqslant x \leqslant b_0$ получаем равенство

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \frac{2\mu}{1+\varkappa_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\,(u_0^+ - u_0^-) + i\,\frac{\partial}{\partial x}\,(v_0^+ - v_0^-)\Big). \tag{16}$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [6], с учетом формулы (13) находим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = -\frac{i\sqrt{(b_0 - x)(x - a_0)}}{\pi} \int\limits_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(b_0 - t)(t - a_0)}\,(t - x)}. \tag{17}$$

Подставив выражение (17) в левую часть уравнения (16), с учетом соотношений (6) для определения неизвестной функции $q_y^{(0)}(x)$ получаем интегродифференциальное уравнение

$$-\frac{1 + \varkappa_0}{2\pi\mu} \sqrt{(b_0 - x)(x - a_0)} \int\limits_{a_0}^{b_0} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(b_0 - t)(t - a_0)}\,(t - x)} = \frac{d}{dx}\,[C(x, \sigma_0) q_y^{(0)}(x)]. \tag{18}$$

Уравнение (18) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром типа ядра Коши и может быть решено только численно. Для его решения можно использовать коллокационную схему с аппроксимацией неизвестной функции. Проведем алгебраизацию интегродифференциального уравнения (18) с дополнительными условиями (14). Сначала в уравнении (18) и дополнительных условиях (14) интервалы интегрирования приводятся к одному отрезку $[-1, 1]$. Затем производная в правой части уравнения (18) заменяется конечно-разностной аппроксимацией. При этом учитываются граничные условия при $\eta_0 = \pm 1$ $q_y^{(0)}(a_0) = 0$, $q_y^{(0)}(b_0) = 0$ (это соответствует условиям $v_0^+(a_0, 0) - v_0^-(a_0, 0) = 0$, $v_0^+(b_0, 0) - v_0^-(b_0, 0) = 0$).

Далее с помощью квадратурных формул типа формул Гаусса интегралы заменяются конечными суммами. Это позволяет заменить уравнение (18) системой алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции $q_y^{(0)}$ в узловых точках. В результате алгебраизации интегродифференциального уравнения с дополнительными условиями (14) получаем $M+2$ (M — число узловых точек) алгебраических уравнения для определения усилий $q_y^{(0)}$ в узловых точках и размера зон предразрушения (параметры a_0 и b_0) в нулевом приближении. Поскольку размер зоны предразрушения даже в частном случае линейно-упругих связей неизвестен, полученная алгебраическая система уравнений является нелинейной. Для решения этой системы уравнений в случае линейных связей используется метод последовательных приближений [7]. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в зоне предразрушения используется также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [8]. Полагается, что закон деформирования межчастичных связей является линейным при $V = |(u_0^+ - u_0^-) + i(v_0^+ - v_0^-)| \leqslant V_*$. Последующие итерации выполняются в случае, когда $V(x) > V_*$. Для вычисления таких итераций в каждом приближении решается система уравнений для связей с эффективной податливостью, изменяющейся вдоль зоны предразрушения и зависящей от модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Эффективная податливость определяется аналогично секущему модулю в методе переменных параметров упругости [9]. Считается, что процесс последовательных приближений заканчивается, когда усилия в зоне предразрушения, полученные на двух последовательных итерациях, различаются незначительно. В каждом приближении алгебраическая система решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента.

Построим решение задачи (5) в первом приближении. Найдем компоненты объемной силы в первом приближении согласно (3). При наличии объемных сил (3) решение будем искать в виде

$$N_x^* = N_{xT}^{(1)} + N_{x*}^{(1)} + N_{x1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{yT}^{(1)} + N_{y*}^{(1)} + N_{y1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xyT}^{(1)} + N_{xy*}^{(1)} + N_{xy1}^{(1)},$$

где $N_{xT}^{(1)}$, $N_{yT}^{(1)}$, $N_{xyT}^{(1)}$ — усилия в сплошной полосе в отсутствие зоны предразрушения, обусловленные неравномерным нагревом; $N_{x*}^{(1)}$, $N_{y*}^{(1)}$, $N_{xy*}^{(1)}$ — частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (3); $N_{x1}^{(1)}$, $N_{y1}^{(1)}$, $N_{xy1}^{(1)}$ — общее решение уравнений плоской теории упругости в первом приближении в отсутствие объемных сил.

Для температурных усилий $N_{xT}^{(1)}$, $N_{yT}^{(1)}$, $N_{xyT}^{(1)}$ имеем выражения

$$\frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0} = \frac{2h_0}{F_0}\int_{-c}^{c} \alpha E T(x)\bar{h}(x)\,dx - \frac{2h_0 x}{I_z}\int_{-c}^{c} \alpha E T(x)\bar{h}(x)x\,dx,$$

$$N_{xT}^{(1)} = 0, \qquad N_{xyT}^{(1)} = 0,$$

где F_0 — площадь поперечного сечения полосы; I_z — момент инерции площади сечения относительно оси z.

Для усилий в первом приближении при наличии объемных сил имеем общие представления [10]

$$\frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} = 4\,\mathrm{Re}\left(\Phi_1(z) - \frac{1}{2(1+\varkappa_0)}\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0},$$

$$\frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} = 2\Big(\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) + \frac{1}{2(1+\varkappa_0)}\frac{\partial}{\partial z}\,(\varkappa_0\overline{F_1} - \overline{Q_1}\,)\Big) + \frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0}.$$

В эти соотношения входят две аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ комплексной переменной $z = x+iy$ и две функции $F_1(z,\bar{z})$ и $Q_1(z,\bar{z})$, представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\,\partial\bar{z}} = F, \qquad \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} = \bar{F}, \tag{19}$$

где

$$F = X_1 + iY_1 = \frac{\partial\bar{h}}{\partial x}\,(N_x^{(0)} + iN_{xy}^{(0)}) + \frac{\partial\bar{h}}{\partial y}\,(N_y^{(0)} - iN_{xy}^{(0)}).$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ имеем краевую задачу

$$\Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + x\overline{\Phi_1'(x)} + \overline{\Psi_1(x)} = f_1(x), \qquad a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \tag{20}$$

где

$$f_1(x) = g_1(x) + g_2(x) - \bar{h}(x,0)q_y^{(0)}(x) + q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x),$$

$$g_1(x) = \frac{1}{1+\varkappa_0}\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\varkappa_0)}\Big(\varkappa_0\frac{\partial\overline{F_1}}{\partial z} - \frac{\partial\overline{Q_1}}{\partial z}\Big) \qquad \text{при} \quad y = 0, \tag{21}$$

$$g_2(x) = -\frac{N_{yT}^{(1)}}{2h_0}.$$

Граничную задачу (20) сведем к задаче линейного сопряжения [6]

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)\,dt}{X_1(t)(t-z)}, \tag{22}$$

где $\Omega_1(z) = \overline{\Phi}_1(z) + z\overline{\Phi_1'}(z) + \overline{\Psi_1}(z)$; $X_1(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)}$.

Параметры a_1 и b_1, определяющие размер зоны предразрушения в первом приближении, находятся из условия разрешимости краевой задачи линейного сопряжения:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)\,dt}{X_1(t)} = 0, \qquad \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{tf_1(t)\,dt}{X_1(t)} = 0. \tag{23}$$

Для определения комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ необходимо найти усилия $q_y^{(1)}$ и $q_{xy}^{(1)}$ в связях между берегами зоны предразрушения.

С использованием формулы $2\mu\,\partial\,(u_1 + iv_1)/\partial x = \varkappa_0\Phi_1(z) - \Omega_1(\bar z) - (z - \bar z)\,\overline{\Phi_1'(z)}$ и граничных значений функций $\Phi_1(z)$ и $\Omega_1(z)$ получаем следующее равенство:

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \frac{2\mu}{1+\varkappa_0}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\,(u_1^+ - u_1^-) + i\,\frac{\partial}{\partial x}\,(v_1^+ - v_1^-)\Big), \qquad a_1 \leqslant x \leqslant b_1. \tag{24}$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [6], с учетом (22) находим

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -\frac{iX_1^+(x)}{\pi} \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)\,dt}{X_1^+(t)(t-z)}. \tag{25}$$

Учитывая соотношение (7) и выражения (24), (25), после ряда преобразований получаем комплексное интегродифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q_y^{(1)} - iq_{xy}^{(1)}$:

$$-\frac{1+\varkappa_0}{2\pi\mu}\,X_1^+(x) \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{f_1(t)\,dt}{X_1^+(t-x)} = \frac{d}{dx}\,[C(x,\sigma_1)(q_y^{(1)}(x) - iq_{xy}^{(1)}(x))], \qquad a_1 \leqslant x \leqslant b_1. \tag{26}$$

Для того чтобы найти значение тепловой нагрузки (перепада температуры), при котором происходит трещинообразование, нужно дополнить постановку задачи критерием (условием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимается критерий критического раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала

$$\sqrt{(u^+ - u^-)^2 + (v^+ - v^-)^2} = \delta_{cr}, \tag{27}$$

где δ_{cr} — характеристика сопротивления материала полосы трещинообразованию. Дополнительное условие (27) позволяет найти параметры неравномерно нагретой полосы, при которых появляется трещина.

Численное решение и анализ результатов. Отделяя в (26) действительные и мнимые части, получаем систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $q_y^{(1)}$ и $q_{xy}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1+\varkappa_0}{2\pi\mu}\sqrt{(b_1-x)(x-a_1)}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{f_2(t)\,dt}{\sqrt{(b_1-t)(t-a_1)}\,(t-x)} &= \frac{d}{dx}\left[C(x,\sigma_1)q_y^{(1)}(x)\right], \\ -\frac{1+\varkappa_0}{2\pi\mu}\sqrt{(b_1-x)(x-a_1)}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{f_3(t)\,dt}{\sqrt{(b_1-t)(t-a_1)}\,(t-x)} &= \frac{d}{dx}\left[C(x,\sigma_1)q_{xy}^{(1)}(x)\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $f_2(t) = \operatorname{Re} f_1(t)$; $f_3(t) = \operatorname{Im} f_1(t)$.

Каждое из уравнений (28) представляет собой нелинейное интегродифференциальное уравнение с ядром Коши и может быть решено только численно.

Для определения распределения усилий и размера зоны предразрушения необходимо задать законы изменения толщины и температуры в полосе. Функцию $h(x, y)$ разложим в ряд Тейлора в начале координат и в этом разложении удержим несколько первых членов.

С помощью формул (11) определим компоненты усилий $N_x^{(0)}$, $N_y^{(0)}$, $N_{xy}^{(0)}$, затем по формулам (3) найдем функцию $F = X_1 + iY_1$.

Интегрируя уравнения (19), получаем

$$F_1(z,\bar z) = \int^{z} dz \int^{\bar z} F(z,\bar z)\,d\bar z, \qquad Q_1(z,\bar z) = \int^{z} dz \int^{z} \overline{F(z,\bar z)}\,dz.$$

По найденным функциям $F_1(z,\bar z)$ и $Q_1(z,\bar z)$ согласно (21) определим функцию $g_1(x)$. Затем по формулам (22), (23) найдем решение краевой задачи в первом приближении. Интегральные уравнения (28) с дополнительными условиями (23) заменим алгебраическими уравнениями, аналогично тому как это было сделано для нулевого приближения. Каждое интегродифференциальное уравнение можно заменить системой алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в узловых точках. Соответствующие системы алгебраических уравнений имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{M} A_{m\nu}(q_{y,\nu}^{(1)} + f_{y,\nu}) = \frac{(1+\varkappa_0)M}{4\mu(b_1-a_1)}\left[C(x_{m+1},\sigma^1)q_{y,m+1}^{(1)} - C(x_{m-1},\sigma^1)q_{y,m-1}^{(1)}\right]$$
$$(m = 1, 2, \ldots, M),$$
$$\sum_{\nu=1}^{M} A_{m\nu}(q_{xy,\nu}^{(1)} + f_{xy,\nu}) = \frac{(1+\varkappa_0)M}{4\mu(b_1-a_1)}\left[C(x_{m+1},\sigma^1)q_{xy,m+1}^{(1)} - C(x_{m-1},\sigma^1)q_{xy,m-1}^{(1)}\right]$$
$$(m = 1, 2, \ldots, M),$$

где

$$q_{y,\nu}^{(1)} = q_y^{(1)}(\tau_\nu), \quad q_{xy,\nu}^{(1)} = q_{xy}^{(1)}(\tau_\nu), \quad f_{y,\nu} = f_y(\tau_\nu), \quad f_{xy,\nu} = f_{xy}(\tau_\nu), \quad \tau = \cos\theta,$$
$$x_m = \frac{a_1+b_1}{2} + \frac{b_1-a_1}{2}\eta_m, \quad \eta_m = \cos\theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2M}\pi \quad (m = 1, 2, \ldots, M),$$
$$f_y = f_2 - q_y^{(1)}, \quad f_{xy} = f_3 - q_{xy}^{(1)}, \quad A_{m\nu} = -\frac{1}{M}\operatorname{ctg}\frac{\theta_m \mp \theta_\nu}{2}$$

(в последнем выражении верхний знак соответствует случаю, когда число $|m-\nu|$ нечетное, а нижний — случаю, когда оно четное).

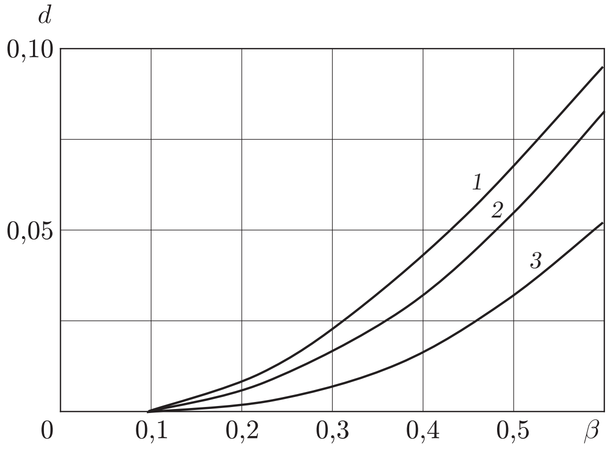

Рис. 2

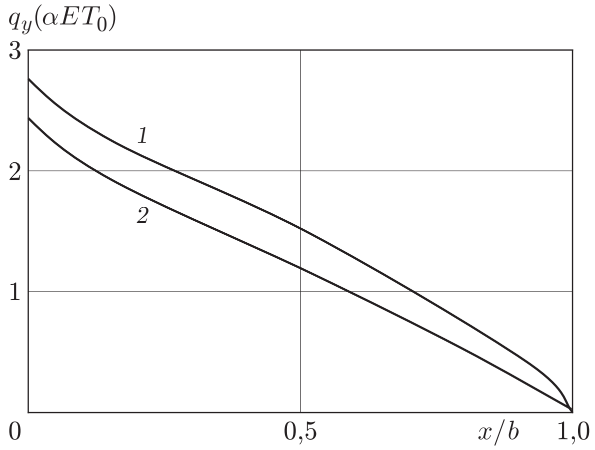

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения d от безразмерной тепловой нагрузки β при различных значениях малого параметра ε:
1 — $\varepsilon = 0{,}10$; *2* — $\varepsilon = 0{,}15$; *3* — $\varepsilon = 0{,}25$

Рис. 3. Распределение нормальных усилий $q_y/(\alpha E T_0)$ в зоне предразрушения при различных значениях малого параметра ε:
1 — $\varepsilon = 0{,}10$; *2* — $\varepsilon = 0{,}25$

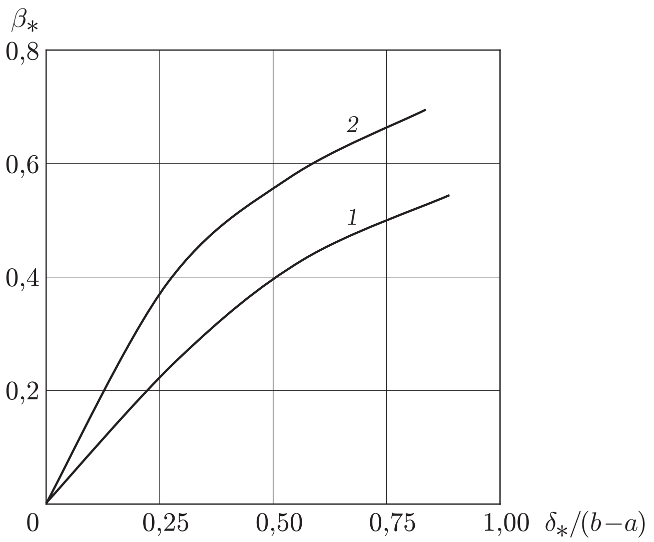

Рис. 4. Зависимость критической тепловой нагрузки β_* от относительной величины раскрытия берегов $\delta_*/(b-a)$ в центре зоны предразрушения при различных значениях относительной толщины:
1 — $h_1/h_0 = 0{,}75$; *2* — $h_1/h_0 = 0{,}5$

В результате алгебраизации дополнительных условий (23) получаем

$$\sum_{\nu=1}^{M} f_y(\tau_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{M} \tau_\nu f_y(\tau_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{M} f_{xy}(\tau_\nu) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{M} \tau_\nu f_{xy}(\tau_\nu) = 0.$$

Таким образом, вместо каждого интегродифференциального уравнения с соответствующими дополнительными условиями имеем $M+2$ алгебраических уравнения для определения усилий в узловых точках и размеров зоны предразрушения. О способе решения таких нелинейных систем сказано выше.

С учетом соотношения (2) предельное условие появления трещины записывается в виде (при $x = x_0$)

$$C(x_0, \sigma(x_0))\sigma(x_0) = \delta_{cr}. \tag{29}$$

Совместное решение полученных уравнений и условия (29) при заданных характеристиках связей позволяет определить критическое значение тепловой нагрузки и размер l_{cr} зоны предразрушения в состоянии предельного равновесия, при которых происходит трещинообразование.

На рис. 2 представлена зависимость длины зоны предразрушения $d = (b-a)/(2c)$ от безразмерной тепловой нагрузки $\beta = \alpha E T_0/\sigma_s$ (T_0 — характерная температура полосы; σ_s — предел текучести материала на растяжение) для полосы, толщина которой меняется по квадратичному закону, при различных значениях малого параметра ε. В расчетах использовались следующие значения параметров: $\nu = 0{,}3$, $M = 30$.

На рис. 3 приведено распределение нормальных усилий $q_y/(\alpha E T_0)$ в зоне предразрушения при различных значениях малого параметра ε. На рис. 4 представлена зависимость безразмерной критической тепловой нагрузки $\beta_* = \alpha E T_0^*/\sigma_s$ от относительной величины раскрытия $\delta_*/(b-a)$ ($\delta_* = \pi\delta_{cr}E/(1+\varkappa_0)\sigma_s$) в центре зоны предразрушения при различных значениях относительной толщины h_1/h_0.

Анализ состояния предельного равновесия неравномерно нагретой полосы переменной толщины, при котором происходит трещинообразование, сводится к параметрическому исследованию полученных алгебраических систем и критерия появления трещины при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материала и геометрических характеристиках полосы (стержня). Предложен эффективный алгоритм решения задач механики разрушения о зарождении трещины в полосе переменной толщины при неравномерном нагреве, позволяющий единообразно построить решение методом возмущений в каждом приближении.

Модель зоны предразрушения со связями между берегами позволяет исследовать основные закономерности распределения усилий в связях при различных законах деформирования; провести анализ предельного равновесия зоны предразрушения с учетом деформационного условия разрушения; оценить критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость материала; определить условия равновесия и увеличения размеров зоны предразрушения, а также условия зарождения трещины на основе анализа состояния предельного равновесия с учетом механических параметров связей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991.
2. **Cox B. N., Marshall D. B.** Concepts for bridged cracks fracture and fatigue // Acta Mettall. Material. 1994. V. 42, N 2. P. 341–363.
3. **Gao H., Ji B.** Modeling fracture in nanomaterials via a virtual internal bond method // Engng Fract. Mech. 2003. V. 70, N 14. P. 1777–1791.

4. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. ст. к 90-летию со дня рожд. А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.
5. **Мирсалимов М. В.** Решение задачи механики разрушения для полосы переменной толщины // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Актуальные вопросы механики. 2006. Т. 1, вып. 2. С. 241–247.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. **Мирсалимов В. М.** Неодномерные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987.
8. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
9. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 51–73.
10. **Угодчиков А. Г.** Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов. М.: Высш. шк., 1970.

Поступила в редакцию 27/I 2010 г.