

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Э. В. Прозорова
(Ленинград)

В работах [1, 2] показано, что задачи ламинарного пограничного слоя, автомодельные в случае стационарного движения, автомодельны и в случае нестационарного движения, если течение формируется импульсивным возмущением или ускорением степенного вида. Сделан вывод о превалирующем влиянии формы тела по сравнению с ускорением тела на динамический и тепловой профили пограничного слоя.

В данной работе рассматривается ряд неавтомодельных задач нестационарного пограничного слоя. Для расчета предлагается делать замену переменных, позволяющую увеличить шаг по времени приблизительно на порядок. Это существенно сокращает время расчета. Основная зависимость «схватывается» автомодельной частью задачи. В работе проводится анализ влияния различных параметров (ускорения, градиента давления, состава газа, вдува, зависимости вязкости от скорости) на трение и тепловой поток к стенке.

1. Модель локальной автомодельности для нестационарного пограничного слоя. Предполагается, что скорость на внешней границе пограничного слоя можно представить зависимостью $U_e = ax^{m(x)} t^\alpha$. Здесь и далее a, α — постоянные, x — продольная координата, y — поперечная координата, индекс e характеризует параметры внешнего потока, $m(x)$ — заданная функция, u — продольная составляющая скорости, v — скорость по нормали.

Для решения задачи вводятся новые координаты:

$$(1) \quad \xi = x/t^{p(x)}, \quad \eta = y/t^{1/2}, \quad \tau = t, \quad u = \bar{\Phi}(\xi, \eta, \tau) ax^{m(x)} t^\alpha,$$

где

$$p = (\alpha + 1)/(1 - m(x)); \quad v = \bar{V}(\xi, \eta, \tau)/t^{k(x)}; \quad k(x) = 1/2.$$

Как известно [3], в начале движения в окрестности стенки возникает завихренность бесконечной интенсивности. Поэтому расчет на малых временах проводится отдельно. Решается уравнение, приведенное, например, в [4]:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} - \alpha \bar{\Phi} = 0, \quad \bar{\Phi}(0) = 1, \quad \bar{\Phi}(\infty) = 0, \quad \bar{\Phi} = 1 - \bar{\Phi}.$$

Уравнение (2) решается методом прогонки. В переменных (1) система уравнений пограничного слоя имеет вид (черту опускаем, $\Phi = \bar{\Phi}(\xi, \eta, \tau)$),

$$(3) \quad \alpha \Phi - \xi p \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \eta k \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \Phi \left[a \xi^{m(x)} (1 - x \ln t p'(x)) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \right. \\ \left. + \Phi a \xi^{m(x)-1} (m'(x) x \ln x + m(x)) \right] + a \xi^{m(x)-1} V (1 - x \ln t k'(x)) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \\ = \alpha + a \xi^{m(x)-1} (m'(x) x \ln x + m(x)) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \tau \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}; \\ \Phi(m'(x) x \ln x + m(x)) + \xi (1 - x \ln t p'(x)) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0; \quad \Phi(0, \xi) = \\ = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0; \quad V(0, \xi) = w; \quad \Phi(\infty, \xi) = 1; \quad \Phi(\eta, 0) = 1; \quad w = \text{const}.$$

Для решения системы (3) применяются неявная разностная схема по ξ , метод прогонки с итерациями по η , явная разностная схема по τ . Величины $(1 - x \ln t p'(x))$ и $(m'(x) x \ln x + m(x))$ легко вычисляются через ξ, η, τ .

Пример расчета безразмерного профиля скорости для $m(x) = \delta + \gamma x$, $\delta = 0,5$, $\gamma = -0,1, +0,1$ приведен на фиг. 1. Кривые для $\gamma = -0,1$ и $\gamma = 0,1$ совпадают. Автомодельные решения отличаются вто-

рым знаком от решения полной системы уравнений. Кривые 1, 2 соответствуют $\xi = 0,05$; 3,1.

Результаты проведенных расчетов позволяют сделать вывод о пригодности аппроксимации реальных нестационарных течений данного класса локально-автомодельными течениями.

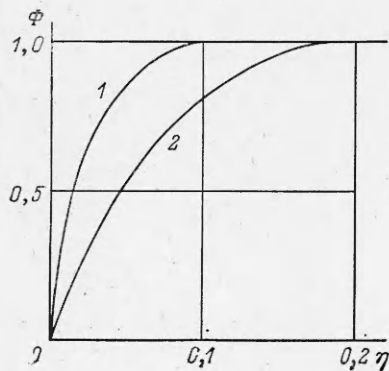
2. Нестационарный сжимаемый пограничный слой при скоростях на внешней границе. Примем $U_e = ct^\alpha x^m$, $U_e = (1 + ct)^{\beta} ax^m$, $m = \text{const}$. Рассматривается ситуация, когда вне пограничного слоя движение газа адиабатическое, газ идеальный и совершенный. При распределении скорости $U_e = ct^\alpha x^m$ давление на внешней границе приблизительно можно вычислить по формуле Коши—Лагранжа

$$(4) \quad p \simeq -\rho_e \left[\frac{c\alpha}{m+1} t^{\alpha-1} x^{m+1} + \frac{c^2}{2} t^{2\alpha} x^{2m} \right] + p_0(t) = p_1 + p_0(t) = p_1 + \text{const},$$

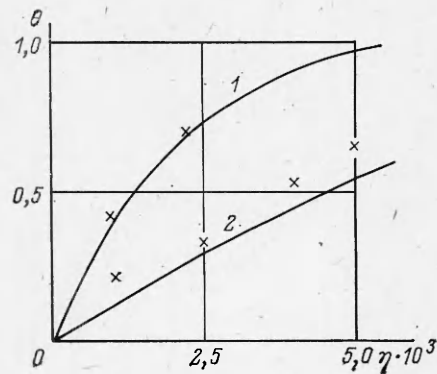
где p_0 — давление в набегающем потоке. Формула (4) получена в предположении, что $\rho_e \simeq \text{const}$ и $T_e \simeq \text{const}$. Если температура на внешней границе высока, например $T_e = 2500$ К, $p_0 = 10^5$ Н/м², $c = 500$, $\rho_e \simeq 0,15$ кг/м³, то при $0 \leq \alpha \leq 1,5$, $m = 0,5$, $0,5 \cdot 10^2 \leq |p_1| \leq 0,3 \times 10^5$ Н/м², т. е. $p_0 \gg p_1$ и предположения выполняются. Данная модель обсуждается в связи с тем, что мы не располагали необходимой информацией о распределении параметров на внешней границе слоя для нестационарного течения. Для сжимаемого газа рассматривалась бинарная смесь и воздух. Вязкость μ , теплопроводность λ вычислялись по формулам, приведенным в [5]. Алгоритм решения задачи был таким же, как в п. 1. Поскольку $m(x) = \text{const}$, решение быстро выходит по ξ на асимптотику (приблизительно при $\xi \simeq 5$).

На фиг. 2 приведены безразмерные профили скорости на пластине для смеси O , O_2 с концентрациями $C_{O_2} = 0,7$ и $C_O = 0,3$ (сплошные линии) и H_2 , O_2 с концентрациями $C_{O_2} = 0,7$ и $C_{H_2} = 0,3$ (крестики) при $U_e = 0,2 \cdot 10^5$ см/с, $T_e \simeq 1500$ К, $T_w = 500$ К, $\xi = 0,025$; 6,4 (кривые 1, 2 соответственно). Результаты расчетов показали, что соотношение между массообменом и теплообменом такое же, как в стационарном течении.

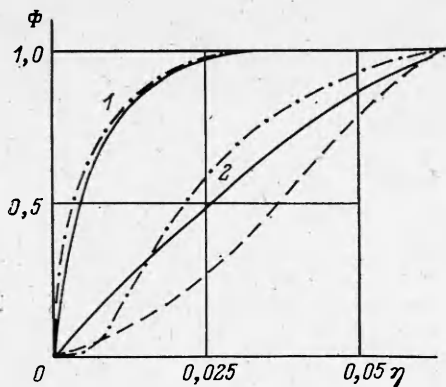
Фиг. 3 иллюстрирует изменение профиля скорости на пластине в воздухе в зависимости от вдува. Здесь $c = 500$, $T_e \simeq 2400$ К, $T_w = 500$ К, $v_w = wt^{1/2}$, $\alpha = 1; 0,5$; время $t = 0,5; 1; 2$ с, $w = 0; 2,5; 10; 15$ (совпадают все кривые), $\xi = 0,00625; 5,5$ (кривые 1, 2 соответственно). Штриховая линия соответствует $\xi = 5,5$, $w = 50$, штрихпунктирная — $T_w = 70$ К, $\xi = 5,5$. Видно, что влияние вертикальной составляющей скорости мало и для существенного уменьшения трения требуется большой расход газа через стенку. Для $0 < m < 1$ поведение профилей аналогично. Такой же расчет проведен для $U_e = (1 + ct)^{\beta} ax^m$. В обоих случаях введение новых переменных сокращает время машинного счета.



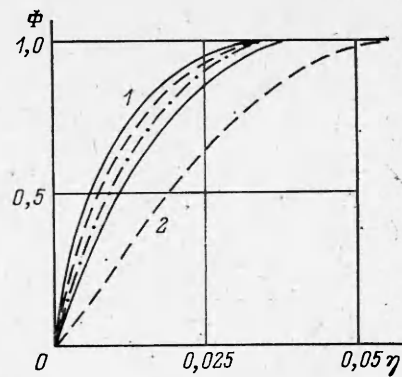
Фиг. 1



Фиг. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

3. **Нестационарный пограничный слой при скорости на внешней границе $U_e = ct^\alpha x^m$ для неньютоновской жидкости.** В работе [6] указано на недостаточность теоретических и экспериментальных данных о влиянии нелинейного характера вязкости на динамический и тепловой профили пограничного слоя. Нами исследовался случай, когда вязкость $\mu = c_1 (\partial u / \partial y)^{k_1}$, теплопроводность $\lambda = c_2 (T/T_0)^{k_2}$, c_1, k_1, c_2, k_2, T_0 — заданные постоянные. Для несжимаемой жидкости в случаях импульсивного движения и степенного ускорения задача автомодельна и число переменных снижается с трех до двух. Расчет проводится так же, как в [1, 2].

С ростом k_1 безразмерные профили скорости становятся более пологими по сравнению со случаем постоянной вязкости. Сказанное иллюстрирует фиг. 4. Здесь сплошная линия соответствует $\mu = \text{const}$, $c = 500$, $m = 0,5$, $\alpha = 0,5$, $\xi = 0,02$; 3,6 (кривые 1, 2 соответственно), $k_1 = 0,5$ (штриховая линия), $k_1 = 0,7$ (штрихпунктирная линия). Для сжимаемого газа размерность задачи уменьшить не удастся. Однако после замены переменных можно считать с большим шагом по τ . Доминирующим фактором, формирующим тепловой профиль в неньютоновской жидкости, при внезапных движениях тела оказывается вязкость. Для обычных жидкостей тепловой профиль всегда определяет теплопроводность.

Проведенные расчеты показали эффективность использования предлагаемой системы координат и позволили исследовать влияние отдельных параметров на характеристики нестационарного пограничного слоя.

Поступила 11 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Прозорова Э. В. Об автомодельности движений нестационарного пограничного слоя. — ПМТФ, 1975, № 4.
2. Прозорова Э. В. Несколько автомодельных задач нестационарного пограничного слоя. — ПМТФ, 1976, № 6.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
5. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1967.
6. Виленский В. Д. Нестационарный конвективный теплообмен при внешнем обтекании тел. — ТВТ, 1974, № 5.