

УСТАНОВИВШАЯСЯ АНИЗОТРОПНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ДИСКОВ

О. В. Соснин (Новосибирск)

Рассматривается случай ортотропной анизотропии в характеристиках ползучести. Предполагая совпадение главных осей анизотропии с главными осями напряжений, автор показывает возможность обобщения критерия Треска в соотношениях скоростей деформаций ползучести и напряжений; построены в октаэдрической плоскости многоугольники соответственно эквивалентных напряжений и эквивалентных скоростей деформаций ползучести.

Дан пример расчета диска, обладающего разными характеристиками ползучести в радиальном, тангенциальном и осевом направлениях, и построены эпюры напряжений при разных соотношениях скоростей деформаций для установившейся ползучести.

Материал поковок, из которых изготавливаются диски турбомашин, обычно имеет три явно выраженных главных направления анизотропии: радиальное, тангенциальное и осевое. Эксперименты на образцах, вырезанных из поковки в упомянутых направлениях, показывают разные величины скоростей ползучести, которые могут далеко выходить за пределы обычной полосы разброса. При расчете дисков на ползучесть с использованием критериев типа Треска или Мизеса последнее обстоятельство обычно не учитывается, материал считается изотропным с усредненными значениями характеристик ползучести. Ниже, аналогично работе [1] для случая идеальной пластичности, показана возможность обобщения критерия Треска на случай совпадения главных осей анизотропии ползучести с главными осями напряжений и приведен пример расчета на установившуюся анизотропную ползучесть диска.

1. Пусть материал ортотропен и поведение его в условиях ползучести описывается уравнением в форме течения без упрочнения вида

$$\dot{\varepsilon}_k = B_0(\lambda_k \tau)^n \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

где λ_k — три экспериментальные константы анизотропии, характеризующие ползучесть материала при растяжении — сжатии вдоль главных осей анизотропии.

Будем предполагать, как и для случая изотропной ползучести, что для пространственного напряженного состояния существует зависимость типа (1.1) между эквивалентным напряжением и эквивалентной скоростью деформации ползучести

$$\dot{\varepsilon} = B_1 \tau^n \quad (1.2)$$

где τ — однородная кусочно-линейная функция главных напряжений, а $\dot{\varepsilon}$ — однородная кусочно-линейная функция главных скоростей деформаций ползучести. В отношении компонент скоростей деформаций предположим существование потенциала течения

$$\dot{\varepsilon}_j = \partial \Phi(\tau) / \partial \sigma_j = \Phi' \partial \tau / \partial \sigma_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

Определяя $\dot{\varepsilon}$ и τ так, чтобы

$$W = \dot{\varepsilon} \tau = \dot{\varepsilon}_j \sigma_j \quad (1.4)$$

т. е. чтобы в пространстве напряжений поверхность постоянной скорости диссипации энергии W (σ_j) была подобна поверхности $\tau = \text{const}$, подставляя в правую часть (1.4) выражение $\dot{\varepsilon}_j$ из (1.3) и так как τ есть однородная функция первой степени от σ_j , найдем, что $\Phi' = \dot{\varepsilon}$, т. е.

$$\dot{\varepsilon}_j = B_1 \tau^n \partial \tau / \partial \sigma_j \quad (1.5)$$

Считая, что материал пластически несжимаем и, следовательно, τ от величины гидростатического давления не зависит, поверхность постоянных эквивалентных напряжений в пространстве главных напряжений будет некоторой призмой, ось которой есть прямая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Пересечение ее с октаэдрической плоскостью будет многоугольник с вершинами на лучах, представляющих собою проекции осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на октаэдрическую плоскость. Вследствие последнего условия, а также условия несжимаемости кусочно-линейная функция τ выражается с помощью трех независимых констант

$$\begin{aligned} \tau &= \pm \{A_1 \sigma_1 - (A_1 - A_3) \sigma_2 - A_3 \sigma_3\} & \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \\ \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \end{cases} \\ \tau &= \pm \{A_2 \sigma_2 - (A_2 - A_1) \sigma_3 - A_1 \sigma_1\} & \begin{cases} \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1 \\ \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1 \end{cases} \\ \tau &= \pm \{A_3 \sigma_3 - (A_3 - A_2) \sigma_1 - A_2 \sigma_2\} & \begin{cases} \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2 \\ \sigma_3 < \sigma_1 < \sigma_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь знаки плюс соответствуют верхним неравенствам для σ_j , а минус — нижним; смысл констант A_j и их выражение через λ_j будут выяснены ниже.

Требование выпуклости поверхности накладывает ограничения на величины A_1, A_2, A_3 , которые сводятся к трем условиям

$$A_i + A_j > A_k \quad (1.7)$$

На фиг. 1,а в октаэдрической плоскости изображена кривая эквивалентного напряжения, представляющая собой искаженный шестигранник Треска. При уменьшении степени анизотропии константы A_1, A_2, A_3 стремятся к единице и выражение (1.6) превращается в главные касательные напряжения.

Построим теперь в плоскости $\epsilon_{ii} = 0$ кривую эквивалентной скорости деформации. Если изображающая точка в пространстве напряжений скользит вдоль поверхности $\tau = \text{const}$, то в силу (1.2) эквивалентная скорость деформаций постоянна: $\epsilon^* = \epsilon_0^*$. Линейным участкам кривой $\tau = \text{const}$, согласно (1.3), будут соответствовать точки на кривой $\epsilon^* = \text{const}$ и, наоборот, угловым точкам на кривой $\tau = \text{const}$ в силу предположения о кусочной линейности будут соответствовать прямые кривой $\epsilon^* = \text{const}$

$$\epsilon_0^* = C_{1k}\epsilon_1^* + C_{2k}\epsilon_2^* + C_{3k}\epsilon_3^* \quad (1.8)$$

Рассмотрим, например, точку B на $\tau = \text{const}$, отображающуюся в плоскости скоростей $\epsilon_{ii} = 0$ в прямую

$$\epsilon_0^* = C_{12}\epsilon_1^* + C_{22}\epsilon_2^* + C_{32}\epsilon_3^* \quad (1.9)$$

Так как точка B в плоскости напряжений принадлежит как AB , так и BC , то, определяя компоненты скоростей деформаций ползучести для каждой из этих линий и подставляя в (1.9), получим

$$C_{12} = C_{22}, \quad C_{32} = C_{22} - A_3^{-1}$$

Отсюда

$$\epsilon_0^* = C_{22}(\epsilon_1^* + \epsilon_2^* + \epsilon_3^*) - A_3^{-1}\epsilon_3^* \quad (1.10)$$

и в силу несжимаемости

$$-\epsilon_3^* = A_3\epsilon_0^*$$

Таким образом, точке B в плоскости напряжений соответствует в плоскости скоростей деформаций $\epsilon_{ii} = 0$ прямая, перпендикулярная проекции на октаэдрическую плоскость оси ϵ_3^* и пересекающая последнюю на расстоянии

$$-V^{2/3}A_3\epsilon_0^*$$

Выполняя аналогичные построения для других точек, найдем форму многоугольника эквивалентных скоростей деформаций. Легко проверить, что если напряжения удовлетворяют уравнению (1.6), то вызванные ими скорости деформаций ползучести обеспечивают постоянство мощности диссипации удельной энергии

$$W(\sigma_j) = \epsilon_j^* \sigma_j$$

Полагая в (1.6) последовательно отличным от нуля только одно из напряжений и сравнивая (1.2) с (1.1) с учетом (1.5), найдем выражения констант A_j через экспериментальные константы анизотропии λ_j

$$B_\bullet(\lambda_j \sigma)^n = B_1(A_j \sigma)^n A_j$$

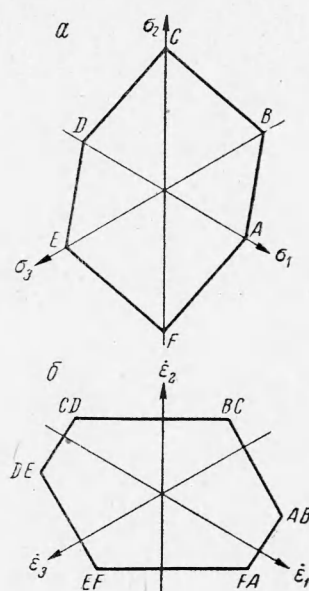
Отсюда

$$B_1 = B_\bullet, \quad A_j = \lambda_j^{\frac{n}{n+1}} \quad (1.11)$$

На фиг. 1,а и 1,б построены кривые соответственно эквивалентных напряжений и эквивалентных скоростей деформаций ползучести для значений констант $A_1 = 1.2, A_2 = 0.8, A_3 = 1$.

2. Рассмотрим в качестве примера установившуюся ползучесть равномерно прогретого диска, постоянного по радиусу сечения.

В дисках с центральным отверстием и граничными условиями: $\sigma_r = 0$ на внутреннем, $\sigma_r = q > 0$ на внешнем контурах — для упругого решения и решения для уста-



Фиг. 1

новившейся ползучести имеет место

$$\sigma_\varphi > \sigma_r > \sigma_z = 0 \quad (2.1)$$

Соотношения (2.1), очевидно, сохраняются и для случая малой анизотропии, тогда из (1.6) выражение для эквивалентного напряжения будет

$$\tau_{\dot{\epsilon}} = A_\varphi \sigma_\varphi - (A_\varphi - A_z) \sigma_r = \beta_1 \sigma_r + \beta_2 \sigma_\varphi \quad (2.2)$$

Если вычисленные напряжения не будут удовлетворять в некоторой области соотношению (2.1), то в последней следует взять другую комбинацию констант и напряжений в (2.2) и искать решение для нескольких областей, как и для изотропного случая.

Из (1.5) с учетом (2.2) найдем компоненты скоростей деформаций

$$\dot{\epsilon}_r = \beta_1 B_0 [\beta_1 \sigma_r + \beta_2 \sigma_\varphi]^n, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \beta_2 B_0 [\beta_1 \sigma_r + \beta_2 \sigma_\varphi]^n \quad (2.3)$$

Подставляя их выражения в уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial \dot{\epsilon}_\varphi}{\partial \xi} + \frac{\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r}{\xi} = 0 \quad \left(\xi = \frac{r}{R} \right)$$

и решая его, получим

$$\sigma_\varphi = \frac{C_1}{\beta_2} \xi^{(\beta_1 - \beta_2)/n\beta_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \sigma_r \quad (2.4)$$

Подставляя это выражение σ_φ в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \xi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{\xi} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2 \xi = 0 \quad (2.5)$$

и решая его, найдем

$$\sigma_r = C_2 \xi^{-(1+\beta_2/\beta_1)} + \frac{C_1 n}{\beta_1(n+1) + \beta_2(n-1)} \xi^{(\beta_1 - \beta_2)/n\beta_2} - \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g(3 + \beta_1/\beta_2)} \xi^2 \quad (2.6)$$

Две неизвестные константы или, в общем случае, функции времени C_1 и C_2 найдутся из граничных условий на внешнем и внутреннем контурах диска.

Для сплошного диска, так же как и в изотропном случае, будем предполагать, что существует конечная область I , заключающая в себе центр диска, где $\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \sigma$, и выражение для эквивалентного напряжения в этой области, согласно (1.6), будет

$$\tau = A_\varphi \sigma_\varphi - (A_\varphi - A_z) \sigma_r = A_r \sigma_r - (A_r - A_z) \sigma_\varphi = A_z \sigma \quad (2.7)$$

Компоненты скоростей деформаций ползучести в радиальном и тангенциальном направлениях однозначно из (1.5) не определяются. Их выражения можно записать следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_r = (A_z - A) B_0 \tau^n, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = A B_0 \tau^n, \quad \dot{\epsilon}_z = -A_z B_0 \tau^n \quad (2.8)$$

Здесь A — неопределенный параметр, меняющийся в интервале

$$(A_z - A_r) \leq A \leq A_\varphi$$

Из первых двух выражений (2.8) получим

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = A_z B_0 \tau^n = A_z^{n+1} B_0 \sigma^n \quad (2.9)$$

Определяя коэффициенты $\lambda_r, \lambda_\varphi, \lambda_z$ так, чтобы $\lambda_z \equiv 1$, а λ_r и λ_φ были константами, не равными единице или, в общем случае, определенными функциями радиуса, получим $A_z \equiv 1$ и после интегрирования (2.9) найдем скорость перемещений по радиусу

$$u = \frac{B_0 R}{\xi} \int_0^\xi \sigma^n \xi d\xi + \frac{c}{\xi}$$

или, с учетом ограниченности скоростей в центре

$$u = \frac{B_0 R}{\xi} \int_0^\xi \sigma^n \xi d\xi \quad (2.10)$$

Сравнивая со вторым выражением (2.8), найдем уравнение для A

$$A = \frac{1}{\xi^2 \sigma^n} \int_0^{\xi} \sigma^n \xi d\xi \quad (2.11)$$

Из уравнения равновесия для внутренней области

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = - \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2 \xi$$

находим

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{\xi^2}{2\kappa} \right) \quad \left(\kappa = \frac{\sigma_0 g}{\gamma \omega^2 R^2} \right) \quad (2.12)$$

Здесь σ_0 — напряжение в центре.

Уравнение (2.11) теряет смысл при $A > A_\phi$, граница внутренней области диска $\xi = \xi_1$ соответствует значению $A = A_\phi$. Внося в (2.11) выражение σ из (2.12) и интегрируя при $A = A_\phi$, для определения ξ_1 , получим уравнение

$$A_\phi = \frac{1}{2(n+1)\xi_1^2} \left\{ \xi_1^2 + 2\kappa \left[\left(1 - \frac{\xi_1^2}{2\kappa} \right)^{-n} - 1 \right] \right\} \quad (2.13)$$

В отличие от изотропного случая, величина ξ_1 будет зависеть не только от значений κ и n , но и от величины A_ϕ .

Для значений $\xi > \xi_1$ в области 2 имеет место

$$\sigma_\phi^{(2)} > \sigma_r^{(2)} > 0$$

т. е. справедливы зависимости (2.2) — (2.6). Для неизвестных констант $\sigma_0, \xi_1, C_1, C_2$, так же как и для изотропного случая, кроме условия (2.13), имеем еще три соотношения

$$\sigma = \sigma_r^{(2)}, \quad \sigma = \sigma_\phi^{(2)} \quad \text{при} \quad \xi = \xi_1$$

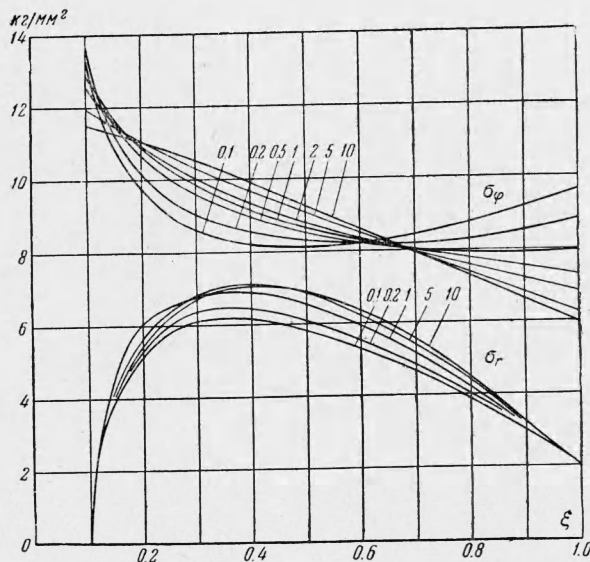
$$\sigma_r^{(2)} = q \quad \text{при} \quad \xi = 1$$

В остальном анализ напряженного состояния в диске не отличается от изотропного случая.

На фиг. 2 даны эпюры радиальных и тангенциальных напряжений в установившейся стадии ползучести для различных значений соотношений скоростей ползучести $\epsilon_\phi / \epsilon_z$ от 0.1 до 10 при $n = 4, q = 2$ кг/мм², $\omega^2 R^2 \gamma / g = 18$ кг/мм². Величины характеристик ползучести в радиальном направлении в решение не входят и, кроме ограничения, связанного с условием выпуклости (1.7), могут быть взяты произвольными.

Из приведенных примеров можно заключить, что при расчете дисков на установившуюся ползучесть с использованием критерия Треска, влиянием анизотропии (для характеристик ползучести, отличающихся менее чем на порядок) практически можно пренебречь.

Фиг. 2



Поступила 18 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. S a w c z u k A. Linear Theory of Plasticity of Anisotropic Bodies and Its Applications to Problems of Limit Analysis. Arch. mech. stosowanej, 1959, vol. XI, 5.