

резонансу (сплошные линии) этих частот колебаний. Нетрудно убедиться в том, что точки пересечения кривых соответствуют оптимальной и неоптимальной длине камеры сгорания и «реагируют» лишь на основной тон радиальных колебаний газа в камере сгорания. Действительно, условию резонанса частот (точки пересечения сплошных линий) для продольных колебаний и горизонтальных линий для радиальных) отвечают камеры сгорания длиной 287; 402; 517 мм и т.д., а условию «антирезонанса» этих же частот — камеры сгорания длиной 230; 344; 459; 576 мм и т.д.

Периодическое изменение положения границы области вибрационного горения при увеличении длины камеры сгорания не представляется возможным связать с комбинированными (продольно-поперечными) колебаниями газа.

На рис. 9 приведено графическое представление описываемых выше кривых, отвечающих условию резонанса  $q$  и «антирезонанса»  $p$  для частот продольных мод колебаний с основным тоном радиальных колебаний, в координатах диаметр цилиндрического участка  $D_k$  — длина камеры  $L_k$ , линиями 1 и 2 показаны характерные длины камер сгорания с цилиндрическим участком 196 и 280 мм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Основы теории и расчета ЖРД / Под ред. В.М. Кудрявцева, А.Н. Васильева, В.А. Кузнецова и др. — М.: Высш. шк., 1983.
2. Баррер М., Жомотт А., Вебек Б.Ф., Ванденкеркхове Ж. Ракетные двигатели. — М.: Оборонгиз, 1962.
3. Неустойчивость горения в ЖРД / Под ред. Д.Т. Харрье и Ф.Г. Рирдона. — М.: Мир, 1975.
4. Маркштейн Д.Г. Нестационарное распространение пламени. — М.: Мир, 1968.
5. Малинин Б.И. Влияние конструктивных параметров форсуночной головки модельной камеры сгорания ЖРД на возбуждение в ней поперечных колебаний газа // ПМТФ. — 1993. — № 6.
6. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. — М.: ГИТТЛ, 1955. — Т.1.
7. Морз Ф. Колебания и звук. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
8. Скучик Е. Основы акустики. — М.: ИЛ, 1959.
9. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям (коэффициенты местных сопротивлений и сопротивления трения). — М.; Л.: ГЭИ, 1960.

г. Москва

Поступила 15/1 1993 г.,  
в окончательном варианте —  
14/V 1993 г.

УДК 539.3

Н.С. Астапов, В.М. Корнев

### ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В качестве исходного выражения для анализа устойчивости стержня на упругом основании обычно используют дифференциальное уравнение равновесия изогнутой оси стержня [1—3] либо интегральное выражение потенциальной энергии системы [1,4—7]. В обоих случаях получают одинаковые значения для критических нагрузок потери устойчивости системы. С появлением теории катастроф эти результаты нашли освещение с новой более общей позиции, позволяющей наглядно описать влияние начальных несовершенств на поведение системы.

Тем не менее закритическое поведение системы стержень — основание мало изучено. В данной работе в рамках трех математических моделей, две

© Н.С. Астапов, В.М. Корнев, 1994

из которых классические, методом возмущений исследованы формы потери устойчивости и закритическое поведение. Оказалось, что все три модели дают различное описание закритического поведения системы. Существенной особенностью рассматриваемых здесь задач является то, что некоторым значениям жесткости упругого основания отвечают несколько возможных форм выпучивания стержня, т.е. соответствующие задачи на собственные функции и числа имеют кратные собственные значения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим шарнирно опертый стержень длиной  $L$ , лежащий на упругом основании и нагруженный осевой сжимающей силой  $P$ , которая сохраняет величину и направление при деформации стержня (рис. 1). Длина  $L$  осевой линии стержня предполагается неизменной. Обозначим через  $l$  расстояние между концами стержня. Предположим, что ось стержня может изгибаться только в плоскости  $(x, y)$ . Исследуем формы потери устойчивости и закритическое поведение системы стержень — основание, исходя из различных моделей (рис. 1, 2), описывающих поведение системы.

**2. Классическая модель упругого основания.** Предположим, что силы реакции упругого основания в любой точке стержня в процессе изгиба всегда направлены по вертикали к оси  $Ox$  (рис. 1) и пропорциональны прогибу стержня. В этом случае выражение полной потенциальной энергии стержня запишется как [5]

$$(2.1) \quad U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \kappa^2 ds - P(L - l) + \frac{1}{2} c \int_0^L w^2 ds,$$

где  $EI$  — изгибная жесткость;  $\kappa$  — кривизна оси стержня;  $c$  — коэффициент жесткости основания;  $s$  — длина дуги оси стержня. Функция  $w(s)$  ( $0 \leq s \leq L$ ) полностью определяет деформированное положение стержня и должна удовлетворять геометрическим краевым условиям задачи:

$$w(0) = w(L) = w_{\kappa}(0) = w_{\kappa}(L) = 0.$$

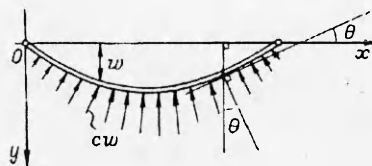
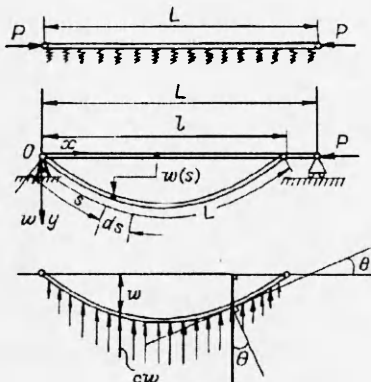
Выразим кривизну  $\kappa$  и расстояние  $l$  через функцию  $w(s)$  и подставим в выражение (2.1). С точностью до членов четвертой степени включительно, содержащих функцию  $w(s)$  и ее производные, получим

$$(2.2) \quad U = \frac{1}{2} EI \int_0^L w_{ss}^2 (1 + w_s^2) ds - P \int_0^L \left( \frac{1}{2} w_s^2 + \frac{1}{8} w_s^4 \right) ds + \frac{1}{2} c \int_0^L w^2 ds.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала можно записать в виде

$$(2.3) \quad EI w_{ssss} + EI(w_{ss}^2 + 4w_s w_{sss}) w_{ss} + P(1 + w_s^2/2) w_{ss} + cw(1 - w_s^2) = 0.$$

Введем в рассмотрение новую переменную  $z = \pi s/L$  и функцию  $W$  такую, что  $w = \alpha W$ , где  $\alpha$  того же порядка малости, что и амплитуда прогиба.



Р и с. 2

Р и с. 1

Обозначим  $r = c(L/\pi)^4/EI$ , а через  $\varepsilon$  — малый параметр:  $\varepsilon = \pi^2(\alpha/L)^2$ . В этих обозначениях уравнение (2.3) и граничные условия примут вид

$$(2.4) \quad (A_0 + \varepsilon A_1)W - \Lambda(B_0 + \varepsilon B_1)W = 0, W(0) = W(\pi) = W_{zz}(0) = W_{zz}(\pi) = 0.$$

Здесь  $\Lambda = P(L/\pi)^2/EI$ ;  $A_0, B_0$  и  $A_1, B_1$  — линейные и нелинейные операторы:

$$A_0 = (\dots)_{zzzz} + r(\dots), \quad B_0 = -(\dots)_{zz}, \\ A_1 = (\dots)_{zz}^3 + 4(\dots)_z(\dots)_{zz}(\dots)_{zzz} - r(\dots)(\dots)_z^2, \quad B_1 = -(\dots)_z^2(\dots)_{zz}/2.$$

Для любого значения  $\Lambda$  тривиальное решение  $W \equiv 0$  задачи (2.4) относится к неискривленному равновесному состоянию системы, причем в этом случае значение потенциальной энергии (2.2) равно нулю. В дальнейшем рассматриваются лишь искривленные равновесные состояния. Задача (2.4) о собственных функциях и числах при  $\varepsilon = 0$  называется невозмущенной. Собственные функции невозмущенной (линеаризованной) задачи

$$W_n^{(0)} = \gamma_n \sin nz$$

и собственные числа

$$\Lambda_n^{(0)} = n^2 + r/n^2,$$

причем собственные числа с номерами  $n$  и  $n + 1$  являются кратными, т.е.  $\Lambda_n^{(0)} = \Lambda_{n+1}^{(0)}$ , если  $r = n^2(n + 1)^2$ . Рассмотрим отдельно оба случая.

*А. Простое собственное значение, т.е.  $r \neq n^2(n + 1)^2$ .* Вычислим методом возмущений [8, 9] собственные числа и функции задачи (2.4). Для этого собственные функции  $W_n$  и числа  $\Lambda_n$  возмущенной задачи (2.4) представим в виде асимптотических рядов по параметру  $\varepsilon$ :

$$(2.5) \quad W_n = W_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k W_n^{(k)}, \quad \Lambda_n = \Lambda_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_n^{(k)}$$

( $W_n^{(0)}$  и  $\Lambda_n^{(0)}$  — собственные функции и числа невозмущенной задачи). Условия нормировки для невозмущенной задачи даются соотношением  $(B_0 W_i^{(0)}, W_j^{(0)}) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  — символы Кронекера), а для возмущенной задачи, кроме того, — соотношением  $(W_i^{(0)}, W_i^{(1)}) = 0$  [9]. Подставим асимптотические разложения (2.5) в уравнение и краевые условия задачи (2.4) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Используя условия нормировки, найдем разложения  $\Lambda_n$  и  $W_n$  с точностью до членов с  $\varepsilon$  в первой степени. Можно показать совпадение с точностью до  $\varepsilon^2$  вычисленных таким способом собственных чисел с точными значениями для стержня без упругого основания, т.е. когда  $r = 0$ . В нашем случае, подставляя разложение (2.5) в уравнение (2.4) и приравняв нулю коэффициент при  $\varepsilon$ , имеем

$$(2.6) \quad A_0 W_n^{(1)} + A_1 W_n^{(0)} - \Lambda_n^{(0)}(B_0 W_n^{(1)} + B_1 W_n^{(0)}) - \Lambda_n^{(1)} B_0 W_n^{(0)} = 0.$$

Подставляя в (2.6) разложение функции  $W_n^{(1)}$  в ряд

$$W_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} W_j^{(0)}$$

по собственным функциям  $W_n^{(0)}$  невозмущенного уравнения и используя условия нормировки, окончательно получим

$$\Lambda_n^{(1)} = (A_1 W_n^{(0)}, W_n^{(0)}) - \Lambda_n^{(0)} (B_1 W_n^{(0)}, W_n^{(0)}), \quad \alpha_{nn} = 0, \\ \alpha_{nj} = [\Lambda_n^{(0)} (B_1 W_n^{(0)}, W_j^{(0)}) - (A_1 W_n^{(0)}, W_j^{(0)})] / (\Lambda_j^{(0)} - \Lambda_n^{(0)}), \quad j \neq n.$$

Вычислив эти величины, найдем, что собственные функции и числа возмущенной задачи (2.4) с точностью до  $\varepsilon$  имеют вид

$$W_n(z) = \gamma_n \sin nz - 9\epsilon(3n^4 - r)\gamma_{3n} \sin 3nz / (9n^4 - r) / 32\pi,$$

$$\Lambda_n = n^2 + r/n^2 + \epsilon\gamma_n^2(n^4 - 3r)/8,$$

где  $\gamma_n^2 n^2 = 2/\pi$  из условий нормировки. Выражение для  $\Lambda_n$  можно записать как

$$(2.7) \quad P = EI(\pi/L)^2 [n^2 + r/n^2 + \pi^2 \gamma_n^2 (n^4 - 3r) (\alpha/L)^2 / 8].$$

Анализируя (2.7), видим, что закритическое поведение системы устойчиво по форме  $w_n(s) = \alpha W_n(z(s))$ , если  $n^4 > 3r$ , и неустойчиво, если  $n^4 < 3r$ . Если  $n^4 = 3r$ , то закритическое поведение системы с точностью до  $\epsilon$  является безразличным.

На рис. 3 показана зависимость  $\Lambda_n^{(0)}$  от  $r$  для  $n = 1, 2, 3, 4$  [2, 4, 5], внизу схематически изображена зависимость нагрузки от максимального прогиба по каждой из форм  $w_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) в подобластях, на которые разбивается множество значений  $r$  абсциссами точек пересечения прямых  $\Lambda_n^{(0)}$  и значениями  $r = n^4/3$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). Точки прямых  $\Lambda_n^{(0)}$  с абсциссами, равными  $n^4/3$ , помечены символом  $H_n^T$ . Расположение точек  $H_n$  на соответствующих прямых связано с выбором исходной модели, описывающей поведение системы, например, уравнения (2.3). Отметим, что реализуется только одна из ветвей зависимости нагрузка — прогиб. Опишем более подробно закритическое поведение системы. Значение  $\alpha$ , соответствующее форме  $w_n = \alpha W_n$ , вычисляется для конкретной нагрузки  $P$  из выражения (2.7) и в дальнейшем обозначается через  $\alpha_n$ . Так как амплитуда прогиба по форме  $w_n$  приближенно равна  $\alpha_n \gamma_n$ , то имеет смысл рассматривать лишь такие значения  $\alpha_n$ , для которых  $|\alpha_n \gamma_n| < L/(2n)$ . На рис. 4 изображена часть ( $r < 2n^4/3$ ) графика функции  $\Lambda_n = \Lambda_n(\alpha_n \gamma_n / L, r)$ , которая описывает устойчивое ( $r < n^4/3$ ) и неустойчивое ( $n^4/3 < r < 2n^4/3$ ) закритическое поведение идеальной системы, принявшей форму  $w_n$ . При  $r = 0$  получается классическая задача о выпучивании упругого стержня без основания, причем закритическое поведение этой системы всегда устойчиво. Линия пересечения поверхности  $\Lambda_n$  и плоскости  $r = \text{const}$  является параболой, ветви которой при  $r < n^4/3$  направлены вверх, а при  $r > n^4/3$  — вниз. Сечение поверхности  $\Lambda_n$  плоскостью  $\alpha_n \gamma_n / L = \text{const}$  является прямой.

Б. Кратное собственное значение, т.е.  $r = n^2(n+1)^2$ . Обозначим точки пересечения прямых  $\Lambda_n^{(0)}$  и  $\Lambda_{n+1}^{(0)}$  символом  $K_{n,n+1}$  (см. рис. 3) и рассмотрим

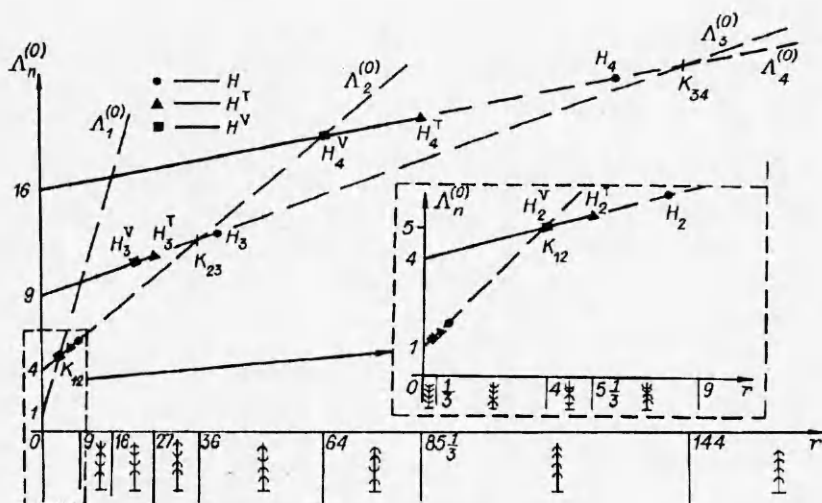
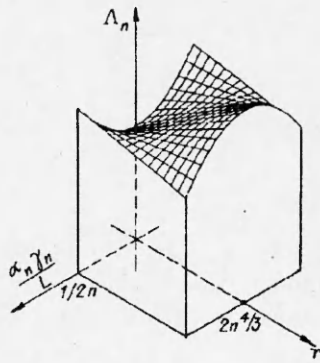


Рис. 3



Р и с. 4

закритическое поведение системы вблизи этих точек, т.е. для малых прогибов. В этом случае одному собственному значению отвечают несколько собственных функций и соответствующие формулы принимают иной вид. Собственные функции и числа возмущенной задачи (2.4) будем искать в отличие от (2.5) в виде

$$(2.8) \quad W_m = f_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k W_m^{(k)}, \quad \Lambda_m = \Lambda_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_m^{(k)},$$

$$f_m^{(0)} = \rho_{mn} W_n^{(0)} + \rho_{m,n+1} \bar{W}_{n+1}^{(0)}, \quad m = n, n+1.$$

Подставляя разложения (2.8) в уравнение (2.4), приравняв нулю коэффициент при  $\varepsilon$  и умножая результат скалярно на  $\bar{W}_m^{(0)}$ , получим систему двух уравнений для определения  $\Lambda_m^{(1)}$  (и аналогично для  $\Lambda_{n+1}^{(1)}$ ):

$$(2.9) \quad \Lambda_m^{(0)} (B_1 f_m^{(0)}, W_m^{(0)}) + \Lambda_m^{(1)} (B_0 f_m^{(0)}, \bar{W}_m^{(0)}) - (A_1 f_m^{(0)}, W_m^{(0)}) = 0, \quad m = n, n+1,$$

а также соотношения для вычисления коэффициентов  $\alpha_{mj}$ :

$$\alpha_{mj} = [\Lambda_m^{(0)} (B_1 f_m^{(0)}, W_j^{(0)}) - (A_1 f_m^{(0)}, W_j^{(0)})] / (\Lambda_j^{(0)} - \Lambda_m^{(0)}), \quad j \neq m = n, n+1.$$

Из системы уравнений (2.9) выразим  $\rho_{m,n+1}$  и  $\Lambda_m^{(1)}$  через  $\rho_{mn}$  в случае  $\rho_{m,n+1} \neq 0, \rho_{mn} \neq 0$ :

$$(2.10) \quad \rho_{m,n+1}^2 = [3n^2 - (n+1)^2] / [3(n+1)^2 - n^2] \rho_{mn}^2 = R(n) \rho_{mn}^2;$$

$$(2.11) \quad \Lambda_m^{(1)} = \frac{1 - 7n^4 + 2n^2(n+1)^2 - 7(n+1)^4}{4\pi [3(n+1)^2 - n^2]} \rho_{mn}^2 = \frac{1}{4\pi} D(n) \rho_{mn}^2.$$

Заметим, что коэффициент  $R(n)$  в (2.10) больше нуля для любых  $n \geq 2$ . Следовательно, для жесткости основания  $r = n^2(n+1)^2$  система может при  $n \geq 2$  кроме форм  $w_n$  и  $w_{n+1}$  принимать формы

$$(2.12) \quad w_m^*(s) = \alpha \{ \rho_{mn} \gamma_n \sin(n\pi s/L) + \rho_{m,n+1} \gamma_{n+1} \sin((n+1)\pi s/L) + O(\varepsilon) \}, \quad m = n, n+1,$$

где коэффициенты  $\rho_{mj}$  связаны соотношением (2.10), а символом  $O(\varepsilon)$  обозначены члены первой и более высокой степени относительно  $\varepsilon$ . Соответствующие собственные числа с точностью до  $\varepsilon = \pi^2(\alpha/L)^2$  примут вид

$$(2.13) \quad \Lambda_m^* = n^2 + (n+1)^2 + \pi D(n) \rho_{mn}^2 (\alpha/L)^2 / 4, \quad m = n, n+1.$$

Закритическое поведение системы в этом случае неустойчиво, потому что  $D(n) < 0$  для любого  $n > 0$ . В результате имеем: в точке  $K_{12}$ , т.е. для  $r = 4$ , закритическое поведение устойчиво по форме  $w_2$ , неустойчиво по форме  $w_1$ , а других искривленных форм в этой точке нет. Во всех остальных точках  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 2$ ) закритическое поведение системы неустойчиво по всем возможным формам, что легко проверить.

Рассмотрим поведение системы в точках  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 2$ ). Сначала для фиксированной нагрузки  $P$  сравним максимальные прогибы по формам  $w_m$  и  $w_m^*$  ( $m = n, n+1$ ). Пользуясь (2.7), имеем

$$(\alpha_{n+1} \gamma_{n+1})^2 = [3r - n^4] / [3r - (n+1)^4] (\alpha_n \gamma_n)^2 > (\alpha_n \gamma_n)^2$$

для любого  $n \geq 2$ , т.е. максимальный прогиб по форме  $w_{n+1}$  больше прогиба по форме  $w_n$ . Оценим с точностью до величин порядка  $\alpha^2$  значение

максимального прогиба по форме  $w_n^*$ . Учитывая, что  $R(n) < 1$  для  $n \geq 2$ , получим

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq z \leq \pi} |w_n^*| &\approx \max_{0 \leq z \leq \pi} |\rho_{nn} \gamma_n \sin nz + \rho_{n,n+1} \gamma_{n+1} \sin(n+1)z| \geq \\ &\geq \alpha \gamma_{n+1} |\rho_{nn}| |(n+1)/n + \sqrt{R(n)} \cos \pi / 2n| > \alpha \gamma_{n+1} |\rho_{nn}| (1 + \sqrt{R(n)}). \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\max_{0 \leq z \leq \pi} |w_n^*| < \alpha \gamma_{n+1} |\rho_{nn}| ((n+1)/n + \sqrt{R(n)}).$$

Теперь сравним максимальные прогибы по формам  $w_{n+1}$  и  $w_n^*$ . Пользуясь (2.7) и (2.13), выразим  $\alpha \rho_{nn}$  через  $\alpha_{n+1}$  следующим образом:

$$(\alpha \rho_{nn})^2 = [(n+1)^2 - 3n^2] / D(n) \alpha_{n+1}^2 = D_1(n) \alpha_{n+1}^2.$$

После вычислений получим, что для  $n \leq 5$

$$\max_{0 \leq z \leq \pi} w_n^{*2} < D_1(n) ((n+1)/n + \sqrt{R(n)})^2 (\alpha_{n+1} \gamma_{n+1})^2 < (\alpha_{n+1} \gamma_{n+1})^2,$$

т.е. прогиб по форме  $w_n^*$  меньше максимального прогиба по форме  $w_{n+1}$ . Однако так как

$$D_1(n) < D_1(n+1) < \lim_{m \rightarrow \infty} D_1(m) = 1/3, \quad R(n) < R(n+1) < \lim_{m \rightarrow \infty} R(m) = 1,$$

то легко показать, что для всех  $n \geq 6$  максимальный прогиб по форме  $w_n^*$  больше прогиба по форме  $w_{n+1}$ . Аналогично доказывается, что максимальный прогиб по форме  $w_n^*$  всегда больше прогиба по форме  $w_n$ . И наконец, покажем, что максимальные прогибы по формам  $w_n^*$  и  $w_{n+1}^*$  совпадают. Пользуясь (2.13), заметим, что  $(\alpha \rho_{nn})^2 = (\alpha \rho_{n+1,n})^2$  для одного и того же значения нагрузки  $P$ . А так как

$$\max_{0 \leq z \leq \pi} |a \sin nz + b \sin(n+1)z| = \max_{0 \leq z \leq \pi} |a \sin nz - b \sin(n+1)z|,$$

то максимальные прогибы по формам  $w_n^*$  и  $w_{n+1}^*$  совпадают. На рис. 5 приведены два существенно различных случая взаимного расположения парабол, изображающих зависимость максимального прогиба от нагрузки для всех возможных искривленных форм выпучивания. Теперь классифицируем для любого фиксированного значения нагрузки  $P$  различные формы выпучивания при помощи соответствующих им значений потенциальной энергии [10]. Из выражения (2.2) и аналитического представления форм выпучивания видно, что для вычисления потенциальной энергии с точностью до величин порядка  $\alpha^4$  достаточно в выражении любой из возможных форм выпучивания учесть члены, содержащие  $\alpha$  в первой степени. Для формы  $w_n$  получим потенциальную энергию

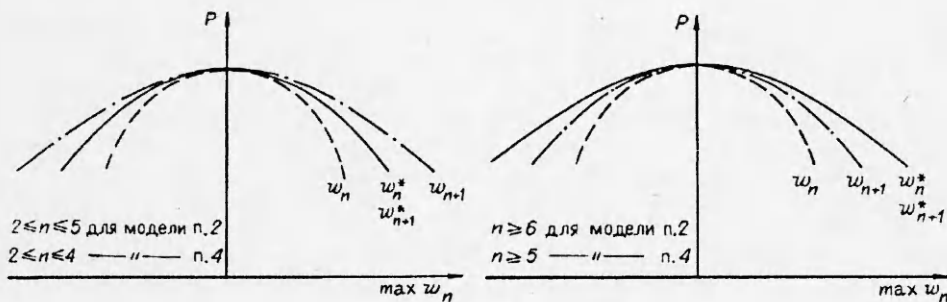


Рис. 5

$$(2.14) \quad U_n = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \gamma_n^4 n^2 [-n^4 + 3r]/64$$

и для формы  $w_{n+1}$

$$U_{n+1} = L(\pi/L)^6 EI \alpha_{n+1}^4 \gamma_{n+1}^4 (n+1)^2 [-(n+1)^4 + 3r]/64.$$

Так как для  $r = n^2(n+1)^2$  ( $n \geq 2$ ) и фиксированной нагрузки  $P$  имеем  $(\alpha_{n+1} \gamma_{n+1})^2 = (n^4 - 3r) / [(n+1)^4 - 3r] (\alpha_n \gamma_n)^2$ , то  $U_{n+1} > U_n$  для любого  $n \geq 2$ . Выразив  $\rho_{n,n+1}$  через  $\rho_{nn}$  (2.10) и  $\alpha \rho_{nn}$  через  $\alpha_n$ , находим потенциальную энергию для формы  $w_n^*$ :

$$U_n^* = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \gamma_n^4 n^4 [n^2 + (n+1)^2] [n^2 - 3(n+1)^2]^2 / [7n^4 - 2n^2(n+1)^2 + 7(n+1)^4] / 32.$$

Отсюда легко выводим, что  $U_n > U_n^* > 0$  для любого  $n \geq 2$ . Кроме того,  $U_n^* = \check{U}_{n+1}^*$ , потому что  $\rho_{n+1,n}^2 = \rho_{nn}^2$  и выполняется равенство (2.10), а коэффициенты  $\rho_{n+1,m}$  входят в выражение потенциальной энергии  $\check{U}_{n+1}^*$  всюду в четной степени. Итак, получено, что для фиксированных значений коэффициентов жесткости основания  $r = n^2(n+1)^2$  ( $n \geq 2$ ) и нагрузки  $P$  энергии ветвей решений располагаются в следующем порядке:  $U_{n+1} > U_n > U_n^* = \check{U}_{n+1}^*$ . Если предположить, что система избирает состояние с наименьшей энергией, то соответствующая форма выпучивания имеет вид  $w_n^*$  или  $w_{n+1}^*$ . Однако потенциальная энергия (2.2) системы, имеющей неискривленную форму  $w \equiv 0$ , равна нулю, и, кроме того,  $U_n^* = \check{U}_{n+1}^* > 0$ . Следовательно, в этой модели наиболее вероятным оказывается прямолинейное равновесное состояние  $w \equiv 0$ . Заметим, что выражение (2.14) потенциальной энергии системы, принявшей форму  $w_n$ , имеет при  $r > n^4/3$  вид ростка катастрофы сборки, при  $r < n^4/3$  — двойственной сборки, а при  $r = n^4/3$  — вид ростка более сложной, чем сборка, катастрофы. Другими словами, в этой модели в точках  $H_n^T$  наблюдается смена типа катастрофы, т.е. нарушение требования структурной устойчивости семейства потенциальных функций [11, 12]. Именно при  $r = n^4/3$  закритическое поведение системы по форме  $w_n$  перестает быть устойчивым (см. (2.7)) и наиболее вероятным из неустойчивых ветвей оказывается прямолинейное равновесное состояние.

3. Неклассическая модель. Рассмотрим несколько иную модель, а именно выражение общей потенциальной энергии возьмем в виде

$$(3.1) \quad U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \kappa^2 ds - P(L-l) + c \int_0^L \int_0^w w(1-w_s^2)^{1/2} dw ds.$$

Формула (3.1) отличается от (2.1) лишь множителем  $(1-w_s^2)^{1/2}$ , который в любой точке стержня имеет вид

$$(1-w_s^2)^{1/2} = \cos\theta(s),$$

где  $\theta(s)$  — угол между осью  $Ox$  и касательной к оси стержня в этой точке. С другой стороны, угол  $\theta(s)$  равен углу между нормалью к оси стержня и нормалью к оси  $Ox$  (см. рис. 2). Следовательно, эта модель отличается в физическом смысле от предыдущей (см. рис. 1) заданием сил реакции упругого основания. Здесь (см. рис. 2) в каждой точке стержня в процессе его изгиба силы реакции основания направлены всегда по нормали к изогнутой оси стержня и зависят линейно от прогиба  $w(s)$  стержня в этой точке. Однако в пересчете на вертикальное направление, т.е. параллельное оси  $Oy$ , получаем нелинейную зависимость  $cw(1-w_s^2)^{1/2}$  реакции основания от прогиба  $w(s)$  стержня (не учитываются силы трения между стержнем и основанием). С точностью до членов четвертой степени включительно,

содержащих функцию  $w(s)$  и ее производные, уравнение Эйлера для функционала (3.1) запишется в форме

$$(3.2) \quad EIw_{ssss} + EI(w_{ss}^2 + 4w_s w_{sss})w_{ss} + P(1 + w_s^2/2)w_{ss} + c w(1 - w_s^2/2) = 0.$$

Уравнение (3.2) отличается от (2.3) лишь коэффициентом при члене  $c w w_s^2$ . Повторяя выкладки п. 2, получим следующие результаты. Простое собственное значение при  $r \neq n^2(n+1)^2$

$$(3.3) \quad \Lambda_n = n^2 + r/n^2 + \epsilon \gamma_n^2 (n^4 - 2r)/8,$$

а соответствующая ему собственная функция с точностью до  $\epsilon$

$$W_n(z) = \gamma_n \sin nz - \epsilon 3(9n^4 - 2r)\gamma_{3n} \sin 3nz / (9n^4 - r) / 32\pi.$$

Напомним, что  $\epsilon = \pi^2(\alpha/L)^2$ , поэтому значение  $\alpha$ , отвечающее форме прогиба  $w_n = \alpha W_n$ , вычисляется для конкретной нагрузки  $P$  из выражения (3.3) и в дальнейшем обозначается через  $\alpha_n$ . Из формулы (3.3) следует, что закритическое поведение системы по форме  $w_n$  является устойчивым, если  $n^4 > 2r$ , и неустойчивым, если  $n^4 < 2r$ . На рис. 3 точки с абсциссами  $r = n^4/2$  на прямых  $\Lambda_n^{(0)}$  помечены символами  $H_n$ . Очевидно, что точка  $H_n$  расположена правее точки  $\bar{H}_n^T$  на прямой  $\Lambda_n^{(0)}$  для любого  $n$ .

В случае кратного собственного значения, т.е. когда  $r = n^2(n+1)^2$ , система кроме форм  $w_n$  и  $w_{n+1}$  может в этой модели для любого  $n \geq 1$  принимать формы (2.12), где  $\rho_{m_i}$  связаны по-прежнему соотношением (2.10), но  $R(n) = n^2(n+1)^2$ . Собственные числа выражаются формулой (2.13), но с новым значением  $D(n)$ :

$$D(n) = - [2n^4 - n^2(n+1)^2 + 2(n+1)^4] / (n+1)^2,$$

причем поведение системы по сложной форме (2.12) и в этом случае неустойчиво для любого  $n \geq 1$ , потому что  $D(n) < 0$ . В результате имеем: вблизи точки  $K_{12}$  или  $K_{23}$  закритическое поведение системы устойчиво по форме  $w_2$  или по форме  $w_3$ , а по остальным формам неустойчиво. Во всех остальных точках  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 3$ ) закритическое поведение системы неустойчиво по всем возможным искривленным формам.

Рассмотрим неустойчивое закритическое поведение системы в точках  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 3$ ) более подробно. Применив формулу (3.3), сравним максимальные прогибы по формам  $w_n$  и  $w_{n+1}$  для фиксированного значения нагрузки  $P$ . Так как  $(\alpha_{n+1}\gamma_{n+1})^2 = (n^4 - 2r) / [(n+1)^4 - 2r] (\alpha_n \gamma_n)^2 > (\alpha_n \gamma_n)^2$  для любого  $n \geq 3$ , то максимальный прогиб по форме  $w_{n+1}$  больше прогиба по форме  $w_n$ . Для сравнения максимальных прогибов по формам  $w_{n+1}$  и  $w_n^*$ , пользуясь (3.3) и (2.11) с соответствующим значением  $D_n$ , выразим  $\alpha \rho_{nn}$  через  $\alpha_{n+1}$ :

$$(\alpha \rho_{nn})^2 = [(n+1)^2 - 2n^2] / D(n) \alpha_{n+1}^2 = D_1(n) \alpha_{n+1}^2.$$

Так как для любого  $n \geq 12$

$$\max_{0 \leq z \leq \pi} w_n^{*2} > D_1(n) (1 + n/(n+1))^2 (\alpha_{n+1} \gamma_{n+1})^2 > (\alpha_{n+1} \gamma_{n+1})^2,$$

то после непосредственных вычислений получим: 1) максимальный прогиб по форме  $w_n^*$  больше прогиба по форме  $w_{n+1}$  для любого  $n \geq 10$ , а для  $3 \leq n \leq 9$  прогиб по форме  $w_n^*$  меньше максимального прогиба по форме  $w_{n+1}$ , 2) для всех  $n$  ( $1 \leq n \leq 9$ ) максимальный прогиб по форме  $w_n^*$  больше прогиба по форме  $w_n$ .

Теперь сравним значения потенциальных энергий для различных форм выпучивания при фиксированной нагрузке  $P$ . Для формы  $w_n$  получим



$$U_n = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \gamma_n^4 n^2 [-n^4 - 4r]/64,$$

а для формы  $w_{n+1}$

$$U_{n+1} = L(\pi/L)^6 EI \alpha_{n+1}^4 \gamma_{n+1}^4 (n+1)^2 [-(n+1)^4 - 4r]/64.$$

Для форм  $w_n^*$  и  $w_{n+1}^*$  соответственно имеем

$$(3.4) \quad U_{n,n+1}^* = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \rho_{nn}^4 \gamma_n^4 n^4 \{[n^2 + (n+1)^2]R_1(n) \pm 64n^2 R_2(n)\}/64,$$

где

$$R_1(n) = -\frac{4n^4 + 9n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^4}{(n+1)^4};$$

$$R_2(n) = -n \frac{9n^4 - 2n^2(n+1)^2 + 9(n+1)^4}{[9(n+1)^2 - n^2][9n^2 - (n+1)^2](n+1)}.$$

В результате простых алгебраических выкладок и непосредственных вычислений получим цепочку неравенств  $0 > U_{n+1}^* > U_n > U_n^*$  для  $n = 1, 2$ ;  $0 > U_{n+1}^* > U_n > U_n^* > U_{n+1}$  для  $3 \leq n \leq 52$  и  $0 > U_{n+1}^* > U_n > U_{n+1} > U_n^*$  для  $n \geq 53$ . Следовательно, если предположить, что система избирает состояние с наименьшей энергией, то вблизи точек  $K_{12}$ ,  $K_{23}$  и  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 53$ ) (значение  $r$  фиксировано, а  $P$  изменяется) система из всех возможных неустойчивых ветвей выбирает форму выпучивания  $w_n^*$ . В остальных точках  $K_{n,n+1}$  ( $3 \leq n \leq 52$ ) система выбирает форму выпучивания  $w_{n+1}$ .

**4. Модель квазивинклеровского основания.** Так же как и при отсутствии упругого основания, с помощью известного [1] линейного уравнения равновесия стержня на упругом основании

$$(4.1) \quad EI y_{xxxx} + P y_{xx} + cy = 0$$

можем вычислить критические нагрузки потери устойчивости, однако за критическое поведение системы окажется невыясненным. Поэтому в качестве математической модели для описания закритического поведения системы стержень — основание рассмотрим нелинейное уравнение

$$(4.2) \quad EI \kappa_{xx} + P y_{xx} + cy = 0,$$

где кривизна

$$\kappa = y_{xx} / (1 + y_x^2)^{3/2},$$

и граничные условия

$$(4.3) \quad y(0) = y(l) = y_{xx}(0) = y_{xx}(l) = 0.$$

Пользуясь (см. рис. 1) соотношениями

$$ds = \sqrt{1 + y_x^2} dx, \quad w(s(x)) = y(x),$$

а также вытекающими отсюда соотношениями

$$y_x = w_s / \sqrt{1 - w_s^2}, \quad y_{xxx} \approx w_{sss} (1 + 5w_s^2/2) + 4w_s w_{ss}^2,$$

$$y_{xx} = w_{ss} / (1 - w_s^2)^2, \quad y_{xxxx} \approx w_{ssss} (1 + 3w_s^2) + 4w_{ss}^2 + 13w_s w_{ss} w_{sss},$$

запишем уравнение (4.2) и граничные условия (4.3) через функцию  $w(s)$  и переменную  $s$ . С точностью до членов четвертой степени включительно, содержащих функцию  $w(s)$  и ее производные, исходное уравнение и соответствующие граничные условия примут вид

$$(4.4) \quad EI w_{ssss} + EI (w_{ss}^2 + 4w_s w_{sss}) w_{ss} + P (1 + w_s^2/2) w_{ss} + c w (1 - 3w_s^2/2) = 0,$$

$$w(0) = w(L) = w_{ss}(0) = w_{ss}(L) = 0.$$

Уравнение задачи (4.4) отличается от (2.3) и (3.2) только коэффициентом при члене  $сw_2^2$ . Повторяя выкладки пп. 2, 3, получим следующие результаты: закритическое поведение системы является устойчивым по форме  $w_n$  при  $n^4 > 4r$  и неустойчивым при  $n^4 < 4r$ . На рис. 3 точки с абсциссами  $r = n^4/4$  помечены символом  $H_n^V$ . Очевидно, что точка  $H_n^V$  расположена левее точки  $H_n^T$  на прямой  $\Lambda_n^{(0)}$  для любого  $n$ . В точке  $K_{12}$  возможны только две формы:  $w_1$  и  $w_2$ , причем по  $w_1$  закритическое поведение системы неустойчиво, а по  $w_2$  безразличное с точностью до  $\alpha^2$ . В точках  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 2$ ) система кроме форм  $w_n$  и  $w_{n+1}$  может принимать формы (2.12), где  $\rho_{mi}$  связаны соотношением (2.10), но

$$R(n) = [5n^2 - 2(n+1)^2] / [5(n+1)^2 - 2n^2].$$

Собственные числа выражаются формулой (2.13), причем для этой модели

$$D(n) = - [12n^4 + 3n^2(n+1)^2 + 12(n+1)^4] / [5(n+1)^2 - 2n^2].$$

Во всех точках  $K_{n,n+1}$  ( $n \geq 2$ ) закритическое поведение системы неустойчиво по всем искривленным формам  $w_n, w_{n+1}, w_n^*, w_{n+1}^*$  (см. рис. 5). Заметим, что если взять выражение потенциальной энергии в виде

$$(4.5) \quad U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \kappa^2 ds - P(L-l) + c \int_0^L \int_0^w w(1-w_s^2)^{-1/2} dw ds,$$

то с точностью до членов четвертой степени включительно уравнением Эйлера этого функционала будет именно уравнение задачи (4.4). Потенциальная энергия (4.5) для форм  $w_n$  и  $w_{n+1}$  имеет вид

$$U_n = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \gamma_n^4 n^2 [-n^4 + 10r] / 64,$$

$$U_{n+1} = L(\pi/L)^6 EI \alpha_{n+1}^4 \gamma_{n+1}^4 (n+1)^2 [-(n+1)^4 + 10r] / 64,$$

а для форм  $w_n^*$  и  $w_{n+1}^*$  дается соотношением (3.4), где

$$R_1(n) = \frac{46n^4 + 169n^2(n+1)^2 + 46(n+1)^4}{[5(n+1)^2 - 2n^2]^2},$$

$$R_2(n) = \sqrt{\frac{5n^2 - 2(n+1)^2}{5(n+1)^2 - 2n^2}} \frac{(n+1)^2 [47n^4 - 46n^2(n+1)^2 + 47(n+1)^4]}{[9n^2 - (n+1)^2][9(n+1)^2 - n^2][5(n+1)^2 - 2n^2]}.$$

В результате алгебраических выкладок и непосредственных вычислений получим цепочку неравенств  $U_{n+1} > U_n^* > U_n > U_{n+1}^* > 0$  для  $2 \leq n \leq 21$  и  $U_{n+1} > U_n > U_n^* > U_{n+1}^* > 0$  для  $n \geq 22$ .

Относительно физического смысла рассмотренной здесь модели заметим следующее. Так как  $(1-w_s^2)^{1/2} = \cos\theta(s)$ , то в формуле (4.5) можно положить

$$\int_0^L \int_0^w c w (1-w_s^2)^{-1/2} dw ds = \int_0^L \int_0^w (c w / \cos\theta(s)) dw ds.$$

В этом случае сила реакции упругого основания в произвольной точке  $s$  всегда направлена по вертикали, а ее проекция на нормаль к оси стержня по абсолютной величине равна  $cw$ . С другой стороны, так как с точностью до членов четвертой степени включительно относительно функции  $w(s)$  и ее производных имеем

$$\int_0^L \int_0^w c w (1-w_s^2)^{-1/2} dw ds \approx \int_0^L \int_0^w c w (1+w_s^2/2) dw ds =$$

$$= \int_0^L \int_0^w [2cw - cw(1 - w_s^2/2)] dw ds \approx c \int_0^L w^2 ds - c \int_0^L \int_0^w w(1 - w_s^2)^{1/2} dw ds,$$

то выражение (4.5) можно получить, если из удвоенного выражения (2.1) вычесть выражение (3.1). Следовательно, с указанной точностью можно считать, что в этом случае реакция упругого основания равна приведенной здесь комбинации реакций упругих оснований из пп. 2, 3.

5. Обобщенная модель. Рассмотрим семейство потенциальных функций

$$(5.1) \quad U^\beta = \frac{1}{2} EI \int_0^L \kappa^2 ds - P(L - l) + \int_0^L \int_0^w cw(1 - w_s^2)^{\beta/2} dw ds.$$

Очевидно, что выражение (4.5), а также выражения (2.1) и (3.1), которые брались в качестве исходных для моделей, рассмотренных в предыдущих пунктах, являются частными случаями выражения (5.1) при  $\beta = -1, 0$  и  $1$  соответственно. Поэтому приведенные ниже формулы при надлежащем выборе значения  $\beta$  совпадают с соответствующими формулами рассмотренных моделей. Уравнение Эйлера, отвечающее зависящему от параметра  $\beta$  функционалу (5.1), с точностью до членов четвертой степени относительно функции  $w(s)$  и ее производных включительно можно записать в виде

$$EIw_{ssss} + EI(w_{ss}^2 + 4w_s w_{sss})w_{ss} + P(1 + w_s^2/2)w_{ss} + cw[1 - (1 - \beta/2)w_s^2] = 0.$$

В случае простого собственного значения первая поправка

$$(5.2) \quad \Lambda_n^{(1)} = \gamma_s^2 [n^4 - r(3 - \beta)]/8,$$

а в случае кратного собственного значения, т.е. при  $r = n^2(n + 1)^2$ ,

$$\Lambda_m^{(1)} = \frac{1}{8} \gamma_n^2 n^2 \frac{(7 - 5\beta)n^4 + (3\beta^2 - 2\beta - 2)n^2(n + 1)^2 + (7 - 5\beta)(n + 1)^4}{(1 - \beta)n^2 - (3 - 2\beta)(n + 1)^2} \rho_{mn}^2.$$

Сложные формы прогиба системы выражаются формулой (2.12), где коэффициенты  $\rho_{mj}$  связаны соотношением

$$(5.3) \quad \rho_{m,n+1}^2 = \frac{(1 - \beta)(n + 1)^2 - (3 - 2\beta)n^2}{(1 - \beta)n^2 - (3 - 2\beta)(n + 1)^2} \rho_{mn}^2,$$

и существуют при  $r = n^2(n + 1)^2$  для таких  $n$  и  $\beta$ , для которых коэффициент при  $\rho_{mn}^2$  в (5.3) больше нуля. Для системы, принявшей форму выпучивания  $w_n$ , получим для потенциальной энергии выражение

$$(5.4) \quad U_n^\beta = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \gamma_n^4 n^2 [-n^4 + r(3 - 7\beta)]/64,$$

а для форм  $w_n^*$  ( $m = n, n + 1$ )

$$U_m^\beta = L(\pi/L)^6 EI \alpha_n^4 \rho_{mn}^4 \gamma_n^4 n^4 \{ [n^2 + (n + 1)^2] R_1 \pm 64n^2(n + 1)^2 \beta R_2 \} / 64,$$

где

$$R_1 = \frac{(4\beta^3 + 7\beta^2 - 29\beta + 14) [n^4 + (n + 1)^4] - (31\beta^3 - 84\beta^2 + 58\beta + 4)n^2(n + 1)^2}{[(1 - \beta)n^2 - (3 - 2\beta)(n + 1)^2]^2},$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{(1 - \beta)(n + 1)^2 - (3 - 2\beta)n^2}{(1 - \beta)n^2 - (3 - 2\beta)(n + 1)^2}} \times$$

$$\times \frac{(28 - 19\beta) [n^4 + (n + 1)^4] - (22\beta - 24)n^2(n + 1)^2}{[9(n + 1)^2 - n^2] [9n^2 - (n + 1)^2] [(1 - \beta)n^2 - (3 - 2\beta)(n + 1)^2]}.$$

Займемся анализом выражения (5.4), которое при  $r = 0$  имеет вид ростка катастрофы двойственной сборки. Для того чтобы для любых  $r \geq 0$  выражение (5.4) имело вид ростка катастрофы двойственной сборки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $-n^4 + r(3 - 7\beta) < 0$  для всех

$r$  из промежутка  $(n - 1)^2 n^2 \leq r \leq n^2 (n + 1)^2$ , если рассматривается закритическое поведение системы вблизи первой критической нагрузки, т.е. необходимо и достаточно, чтобы  $\beta > 11/28$ . Если  $\beta > 3/7$ , то неравенство  $-n^4 + r(3 - 7\beta) < 0$  выполняется для любых  $r \geq 0$ , т.е. выражение  $U_n^\beta$  функции потенциальной энергии системы стержень — основание, принявшей любую форму выпучивания  $w_n$ , при  $\beta > 3/7$  имеет всегда вид ростка катастрофы двойственной сборки. Для таких значений  $\beta$  нет нарушения требования структурной устойчивости [11]. Напомним, что из трех рассмотренных моделей неравенству  $\beta > 3/7$  удовлетворяет лишь модель п. 3, для которой  $\beta = 1$ . Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что из трех моделей наиболее адекватно описывает закритическое поведение системы стержень — основание модель п. 3. Для нее выражения функции потенциальной энергии для любой формы выпучивания и любых значений  $n$  и  $r$  имеют вид ростка катастрофы двойственной сборки, т.е. в этой модели нет нарушения требования структурной устойчивости семейства потенциальных функций.

Анализ выражения (5.3) показывает, что если  $1/2 < \beta < 11/7$ , то для безразмерного коэффициента жесткости основания  $r = n^2(n + 1)^2$ , где  $n$  — любое натуральное число, кроме форм  $w_n$  и  $w_{n+1}$  возможны сложные формы выпучивания  $w_m^*$ . Для  $\beta = 2$  не существует форм  $w_m^*$ , а для остальных  $\beta$  сложные формы для  $r = n^2(n + 1)^2$  возможны, если  $n$  больше некоторого  $N > 1$ . Анализ выражения (5.2) показывает, что для  $\beta \geq 3$  при любом  $r \geq 0$  закритическое поведение по любой форме  $w_n$  устойчиво, однако для  $\beta < 3$  закритическое поведение системы по форме  $w_n$  при  $r > n^4/(3 - \beta)$  становится неустойчивым. Кроме того, если  $\beta \leq 2$ , то для любой формы  $w_n$  всегда существует такое  $r^*$  из промежутка  $(n - 1)^2 n^2 \leq r^* < n^2(n + 1)^2$ , что закритическое поведение системы по этой форме  $w_n$  при  $r \geq r^*$  является неустойчивым. Заметим, что в качестве такого  $r^*$  достаточно взять любое  $r$  из промежутка  $n^4 < r < n^2(n + 1)^2$ .

На рис. 6 приведен график зависимости безразмерного параметра  $\Lambda_n^{(0)}$  критической нагрузки от безразмерного коэффициента жесткости основания  $r$  для модели, в которой  $\beta = 2$ . Отрезки прямых  $\Lambda_n^{(0)}$ , вблизи которых закритическое поведение системы устойчиво, проведены на рис. 6 сплошной линией, неустойчиво — штриховой. Для  $\beta < 2$  значение  $r$ , при котором закритическое поведение системы по конкретной форме  $w_n$  становится безразличным, меньше значения  $r$  для  $\beta = 2$  (соответствующие точки на прямых помечены на рис. 6 крестиком). Лишь в моделях с  $\beta > 11/4$  закритическое

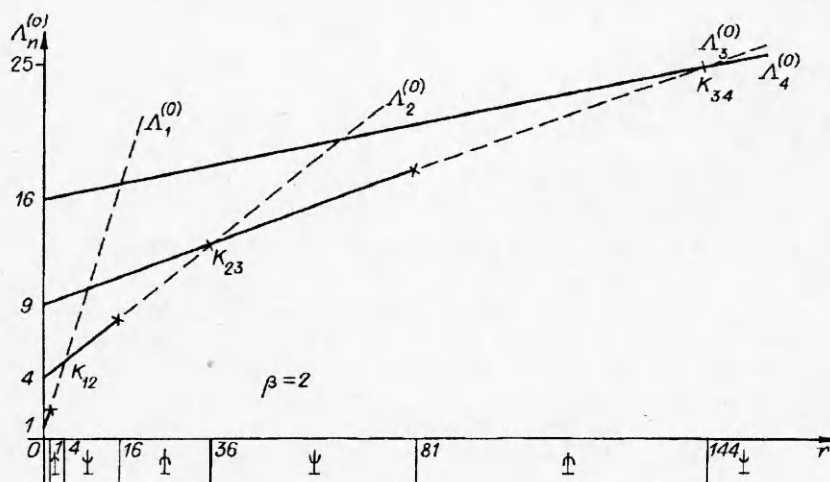


Рис. 6

