УДК 532.516

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК НА ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА (ОТСОСА) СРЕДЫ

А. А. Гурченков, Ю. И. Яламов

(*Москва*)

С точки зрения обобщения работы [1] данная работа касается неустановившегося пограничного слоя потока, образованного в вязкой несжимаемой однородной жидкости, окружающей бесконечную пористую пластину с равномерным вдувом или отсосом среды. Жидкость и пластина находятся в состоянии вращения как твердое тело с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathrm{const}$. Неустановившийся поток индуцирован некрутильными колебаниями пластины. Определена структура неустановившегося поля скоростей и образующихся пограничных слоев, примыкающих к пластине. Оказалось, что и в этом случае (при наличии вдува или отсоса среды) можно найти точное решение трехмерных, нестационарных уравнений Навье — Стокса. Полученное поле скоростей может быть использовано для анализа нестационарного пограничного слоя на пористой поверхности движущегося тела. Нестационарная задача при отсутствии вдува рассматривалась в работе [2].

1. Рассмотрим бесконечную пластину, движущуюся в жидкости со скоростью $\mathbf{u}(t)$ в своей плоскости. Через поверхность пластины осуществляется вдув или отсос среды со скоростью $u_1(t)$ по нормали к поверхности пластины. Среда представляет собой вязкую несжимаемую жидкость, занимающую полупространство, ограниченное пластиной. Движение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и следующими условиями, которые в обычных обозначениях имеют вид

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v}, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } Q, \tag{1.1}$$
$$\mathbf{v} = \{\mathbf{u}(t),\ u_1(t)\mathbf{e}_y\} \text{ на } S,\ t > 0,\ |\mathbf{v}| \to 0 \text{ при } |\mathbf{r}| \to \infty,\ t > 0,$$

где $\mathbf{e}_y$ — орт декартовой системы координат $Oxyz$, перпендикулярный к плоскости пластины. Плоскость Oxz совпадает с плоскостью пластины.

Движение жидкости начинается из состояния покоя, так что $\mathbf{v}(0,\ \mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \in \overline{Q}$.

Решение системы (1.1) ищем в виде

$$\mathbf{v} = \{v_x(y,\ t),\ u_1(t),\ v_z(y,\ t)\},$$
$$P = 2\omega_{0z}u_1(t)x - 2\omega_{0x}u_1(t)z - \partial u_1 y/\partial t + p(y,\ t).$$

Для определения поля скоростей получим следующую систему уравнений:

$$\partial v_x/\partial t + 2\omega_{0y}v_z = Lv_x,$$
$$\partial v_z/\partial t - 2\omega_{0y}v_x = Lv_z,$$
$$\partial p/\partial y = 2(\omega_{0z}v_x - \omega_{0x}v_z), \tag{1.2}$$

где $L = \nu\partial^2/\partial y^2 - u_1(t)\partial/\partial y$.

Решение системы (1.2) ищем в форме

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot \sin 2\Omega t - \mathbf{w} \times \mathbf{e}_y \cdot \cos 2\Omega t, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{w}$ — неизвестная функция; $\Omega = \omega_{0y}$.

Неизвестная функция $\mathbf{w}(y,\ t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению параболического типа и граничным условиям

$$\partial\mathbf{w}/\partial t = L\mathbf{w};$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{u}(t)\cdot \sin 2\Omega t + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{e}_y \cdot \cos 2\,\Omega t, \tag{1.4}$$
$$\text{при } \mathbf{r} \in S,\ t > 0;$$

$$|\mathbf{w}| \to 0 \text{ при } t = 0,\ y > 0;$$
$$|\mathbf{w}| \to 0 \text{ при } y \to \infty.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $u_1(t) = \text{const} = a$, что соответствует равномерному отсосу или вдуву. При этом $a > 0$ соответствует вдуву среды через поверхность пористой пластины, $a < 0$ — отсосу окружающей среды.

Решение задачи (1.4) с помощью интеграла Дюгамеля может быть записано в виде

$$\mathbf{w}(y, t) = \frac{d}{dt}\int_0^t [\mathbf{u}(\tau)\cdot\sin 2\Omega\tau + \mathbf{u}(\tau)\times\mathbf{e}_y\cdot\cos 2\Omega\tau]\,|\,\mathbf{w}_1(y, t-\tau)\,|\,d\tau, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{w}_1$ — решение следующей краевой задачи:

$$\partial\mathbf{w}_1/\partial t + a\partial\mathbf{w}_1/\partial y = \nu\partial^2\mathbf{w}_1/\partial y^2,$$
$$\mathbf{w}_1(0, t) = \begin{cases} 1, & \text{для } t > 0,\\ 0, & \text{для } t < 0,\end{cases} \tag{1.6}$$
$$|\mathbf{w}_1| \to 0 \text{ при } y \to \infty.$$

Для решения системы уравнений (1.6) воспользуемся методом преобразования по Лапласу. Введем изображение функций по Лапласу соотношением

$$\tilde{\mathbf{u}}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot\mathbf{u}(t)\,dt.$$

В пространстве изображений дифференциальное уравнение (1.6) имеет вид

$$p\tilde{\mathbf{w}}_1 + a\partial\tilde{\mathbf{w}}_1/\partial y = \nu\partial^2\tilde{\mathbf{w}}_1/\partial y^2,$$
$$\tilde{\mathbf{w}}_1|_{y=0} = (1/p)\cdot\mathbf{1}, \tag{1.7}$$
$$|\tilde{\mathbf{w}}_1| \to 0 \text{ при } y \to \infty.$$

Решение системы (1.7) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{w}}_1(p, y) = (1/p)\cdot\mathbf{1}\cdot e^{-\lambda y},\quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{1.8}$$
$$\lambda = a/2\nu + \sqrt{a^2/4\nu^2 + p/\nu}.$$

Переходя к оригиналам, решение (1.8) можно выписать в виде [3]

$$\mathbf{w}_1(y, t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}\cdot e^{-ay/2\nu}\left[e^{-ay/2\nu}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right) + \right.$$
$$\left. + e^{ay/2\nu}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{t}{\nu}}\right)\right]. \tag{1.9}$$

Таким образом, решение системы (1.4) дается формулами (1.5), (1.9).

Подставляя (1.5) с учетом (1.9) в (1.3), получим искомое поле скоростей исходной задачи

$$\mathbf{v} = \sin 2\Omega t\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t [\mathbf{u}(\tau)\cdot\sin 2\Omega\tau + \mathbf{u}(\tau)\times\mathbf{e}_y\cdot\cos 2\Omega\tau]\times$$
$$\times\frac{1}{2}\left[e^{-ay/\nu}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{t-\tau}{\nu}}\right) + \right.$$

$$+\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{t-\tau}{\nu}}\right)\Bigg] d\tau+\cos 2\Omega t\cdot \mathbf{e}_y\times\frac{d}{dt}\int\limits_0^t[\mathbf{u}(\tau)\cdot\sin 2\Omega\tau+$$

$$+\mathbf{u}(\tau)\times\mathbf{e}_y\cdot\cos 2\Omega\tau]\frac{1}{2}\left(e^{-ay/\nu}\operatorname{erfc}\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{t-\tau}{\nu}}\right)+$$

$$+\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(t-\tau)}}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{t-\tau}{\nu}}\right)\Bigg] d\tau. \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим важный для приложений случай движения пластины с постоянным ускорением. Дальнейшие преобразования удобно проводить в комплексной форме. Введем комплексные векторы

$$\hat{v}=v_z+iv_x,\quad \hat{u}=u_z+iu_x. \tag{2.1}$$

Используя (2.1) и полагая $a=0$ (отсутствие вдува), поле скоростей (1.10) можно переписать в виде

$$\hat{v}=\frac{y}{2\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{\hat{u}(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-i2\Omega(t-\tau)-y^2/4\nu(t-\tau)}d\tau.$$

Представляет интерес определение вязких напряжений, действующих со стороны жидкости на пластину:

$$\hat{f}=-\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\hat{u}(\tau)\,e^{-i2\Omega(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau.$$

Полагая $\hat{u}=\hat{b}t$, где $\hat{b}$ — постоянный вектор, имеем

$$\hat{v}=\frac{\hat{b}y}{2\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{\tau e^{-i2\Omega(t-\tau)-y^2/4\nu(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}}d\tau.$$

Обозначая $\sigma=i2\Omega$ и делая замену переменных $t-\tau=\theta$, $\tau=t-\theta$, получим

$$\hat{v}=\frac{\hat{b}y}{2\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{t-\theta}{\theta^{3/2}}\exp\left[-\sigma\theta-\frac{y^2}{4\nu\theta}\right]d\theta. \tag{2.2}$$

Разбивая в (2.2) интеграл на две части, получим

$$J_1-J_2=\frac{\hat{b}yt}{2\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{\exp\left[-\sigma\theta-\frac{y^2}{4\nu\theta}\right]}{\theta^{3/2}}d\theta-\frac{\hat{b}y}{2\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{\exp\left[-\sigma\theta-y^2/4\nu\theta\right.}{\theta^{1/2}}d\theta,$$

но J_1 вычислен ранее [2] в виде

$$J_1=\frac{\hat{b}t}{2}\left[e^{-y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}-\sqrt{\sigma t}\right)+e^{y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}+\sqrt{\sigma t}\right)\right].$$

Учитывая вычисление в работе [2] похожего интеграла и опуская технику вычислений, приведем выражение для J_2

$$J_2=\frac{\hat{b}y}{4\sqrt{\sigma\nu}}\left[e^{-y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}-\sqrt{\sigma t}\right)-e^{y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}+\sqrt{\sigma t}\right)\right].$$

Окончательно имеем для $\hat{v}$

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\hat{b}\left(t + \frac{y}{2\sqrt{\sigma\nu}}\right)e^{y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\sigma t}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\hat{b}\left(t - \frac{y}{2\sqrt{\sigma\nu}}\right)e^{-y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - \sqrt{\sigma t}\right).$$

Введем характерный параметр, так называемое комплексное время:

$$t^* = y/2\sqrt{\sigma\nu}.$$

Тогда

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\hat{b}(t + t^*)e^{y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\sigma t}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\hat{b}(t - t^*)e^{-y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - \sqrt{\sigma t}\right).$$

Полученное поле скоростей может быть использовано для анализа нестационарного пограничного слоя на пористой поверхности движущегося тела.

Поступила 30 VIII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gupta A. S.** Ekman layers on a porous plate.— Phys. Fluids, 1972, vol. 5, pt 5, p. 930—931.
2. **Гурченков А. А., Роговой В. М.** Нестационарный пограничный слой на вращающейся пластине.— В сб.: Динамика упругих конструкций с жидкостью. Томск, 1977.
3. **Эфрос А. М., Данилевский А. М.** Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, 1937.

УДК 536.2—3

СЛОЖНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ДИСПЕРСНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В ТРУБЕ

И. Ф. Гулецкая, Ф. Н. Лисин

(*Свердловск*)

1. Запишем уравнение энергии для турбулентного потока газовзвеси в трубе в виде [1,2]

$$(1-\beta)c\rho u\frac{\partial T}{\partial x} + \beta c_1\rho_1 u_1\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r(\lambda + \lambda_т)\frac{\partial T}{\partial r} - r\beta c_1\rho_1\langle v_1' T_1'\rangle\right\} + \operatorname{div}\mathbf{q}_r, \quad (1.1)$$

где β — объемная концентрация твердой фазы; λ, $\lambda_т$ — молекулярная и турбулентная теплопроводность соответственно; $\langle v_1' T_1'\rangle$ — турбулентный перенос энергии частицами; $\mathbf{q}_r$ — результирующий поток излучения.

Для описания теплообмена двухфазного потока к уравнению (1.1) необходимо добавить уравнение энергии для частиц. Будем рассматривать