

УДК 532.51

## **Нестационарные периодические пространственные волны на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру\***

**О.Ю. Цвелодуб<sup>1,2</sup>, А.А. Бочаров<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Новосибирский государственный университет*

<sup>2</sup>*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

<sup>3</sup>*Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск*

E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассматриваются течения вязкой пленки жидкости по внешней поверхности вертикального цилиндра. Исследование волновых режимов в случае малых расходов и больших радиусов цилиндра сводится к анализу решений одного нелинейного эволюционного уравнения для толщины пленки. В рассматриваемой модели существует счетное число стационарно-бегущих семейств решений. Большинство из них в свою очередь неустойчиво к двумерным и трехмерным возмущениям. В силу этого, эволюция начальных возмущений в разных областях значений параметров существенно различается.

В работе приводятся некоторые характерные сценарии развития возмущений. Особый интерес представляют начальные возмущения с определенными симметриями, которые сохраняются в процессе эволюции. В этих случаях решения притягиваются к стационарно-бегущим решениям, обладающими такими же симметриями.

**Ключевые слова:** стекающая пленка, вертикальный цилиндр, модельное уравнение, эволюция, трехмерные возмущения, семейства решений.

### **Введение**

Интерес к волновым режимам стекающих пленок вязких жидкостей, начиная с пионерских экспериментов П.Л. Капицы [1], не ослабевает у многих исследователей до сих пор. Прикладная значимость пленочных течений обусловлена широким использованием стекающих пленок жидкости в технологических процессах химической промышленности, энергетики, металлургии и других областях.

Уже при достаточно малых числах Рейнольдса, вследствие неустойчивости течения пленки с плоской свободной границей, на ее поверхности возникает сложная волновая картина. Относительно простое ламинарное течение волновой пленки

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (грант № 11.G34.31.0035, ГОУ ВПО НГУ) и РФФИ (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

демонстрирует большое разнообразие как регулярных, так и хаотичных волновых режимов. Использование при их изучении различных теоретических подходов позволяет получать интересные упрощенные модели, которые в то же время обладают достаточной универсальностью, так как появляются и в других разделах физики. Поэтому вязкие пленки жидкости можно классифицировать как уникальные объекты для изучения фундаментальных закономерностей развития нелинейных волновых структур.

Как показывает большинство экспериментов, зарождающиеся двумерные волны очень быстро становятся трехмерными и нерегулярными. Поэтому с физической точки зрения даже при изучении двумерных волновых режимов нужно проводить исследование их на устойчивость к трехмерным возмущениям. Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию волновых режимов на поверхности жидкости, в настоящее время трехмерные волновые режимы в стекающих пленках изучены далеко не достаточно.

Целью настоящей работы является исследование трехмерных волновых режимов, возникающих на поверхности пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру. Для этого рассматриваются решения модельного уравнения, полученного в [2].

### 1. Модельное уравнение

В полной постановке исследование волновых режимов в стекающих пленках жидкости сводится к рассмотрению системы уравнений Навье–Стокса и неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. В случае малых расходов и больших сил поверхностного натяжения эту проблему можно свести к исследованию одного уравнения для толщины пленки. В работе [2] при этих предположениях для цилиндров больших радиусов было получено одно нелинейное уравнение, которое для случая возмущений малой, но конечной амплитуды описывает эволюцию отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня. После некоторых преобразований это уравнение записывается в виде [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + S^4 \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 H = 0, \quad (1)$$

$$S = L/R = 1/(1 + 0,8 \text{Re}/\text{We}\delta_0^2)^{1/2} < 1.$$

Здесь  $\text{Re} = V_0 h_0 / \nu \sim 1$  — число Рейнольдса,  $\text{We} = \sigma / \rho g h_0^2 \sim 1/\varepsilon^2$  — число Вебера,  $h_0$  — толщина невозмущенной пленки,  $R$  — радиус цилиндра,  $L$  — характерный масштаб возмущений,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $x$  — аксиальная цилиндрическая координата, ее направление совпадает с направлением вектора силы тяжести,  $\varphi$  — азимутальная цилиндрическая координата,  $\tau$  — безразмерное и преобразованное время, функция  $H$  — трансформированное определенным образом, обезразмеренное отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Предположение об использовании цилиндров больших радиусов означает, что справедливо неравенство  $\delta_0 = h_0 / R \ll 1$ . Полагается также, что выполнено условие длинноволности возмущений, т. е. характерная длина возмущений свободной поверхности много больше толщины пленки —  $\varepsilon = h_0 / L \ll 1$ . Характерная скорость  $V_0 = g h_0^2 / 2\nu$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  равна скорости поверхности пленки при безволновом режиме течения.

Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью нейтральных аксиально-симметричных возмущений. В результате проведенных преобразований оно содержит один варьируемый параметр  $S$ , характеризующий форму цилиндра.

В случае аксиально-симметричных возмущений уравнение (1) переходит в широко известное уравнение Курамото–Сивашинского. Для пленочных течений оно впервые было получено в работе [4]. Устремляя радиус цилиндра к бесконечности ( $R \rightarrow \infty$ ) и совершая соответствующим образом предельный переход, из уравнения (1) можно получить уравнение, описывающее трехмерные волны на поверхности пленки, стекающей по вертикальной плоскости, представленное в работе [5].

Из линейного анализа устойчивости тривиального решения  $H \equiv 0$  уравнения (1) к возмущениям вида

$$H \sim \exp(i\alpha(x - ct)) \{ \exp(in_\varphi \varphi) + \exp(-in_\varphi \varphi) \} + \text{к.с.} \quad (2)$$

следует, что оно неустойчиво, если волновые числа  $(\alpha, n_\varphi)$  удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + S^4 n_\varphi^2 - (\alpha^2 + S^2 n_\varphi^2)^2 > 0. \quad (3)$$

В выражении (2)  $\alpha$  — компонента волнового числа в направлении оси  $x$ ,  $n_\varphi$  — азимутальная компонента волнового числа, к.с. — комплексно-сопряженное выражение. Из физических соображений очевидно, что  $n_\varphi$  принимает только целочисленные значения.

Из неравенства (3) следует, что неустойчивые волновые числа лежат внутри интервалов  $(\alpha_{n1}, \alpha_{n2})$ .

Нейтральные волновые числа  $\alpha_{n1,2}$  находятся из выражения

$$\alpha_{n1,2}^2 = (1 - 2S^2 n_\varphi^2 \pm \sqrt{1 - 4S^2 n_\varphi^2 (1 - S^2)}) / 2. \quad (4)$$

Таким образом, для фиксированного значения  $S$  область неустойчивости представляет собой дискретный набор интервалов для волновых чисел  $\alpha$ , соответствующих  $n_\varphi = 0, 1, 2, \dots$ . Число таких интервалов и их размеры зависят от конкретных значений  $S$ . Так, из формулы (4) следует, что при заданном  $n_\varphi \geq 1$  соответствующий интервал неустойчивых волновых чисел  $\alpha$  существует, если значения параметра  $S$  удовлетворяют неравенству

$$S < S_c(n_\varphi) = \sqrt{(n_\varphi - \sqrt{n_\varphi^2 - 1}) / 2n_\varphi}. \quad (5)$$

Из неравенства (5) следует, что при  $S > S_c(1) \approx 0,707$  тривиальное решение  $H \equiv 0$  устойчиво по отношению ко всем пространственным возмущениям вида (2). В этом случае могут нарастать только аксиально-симметричные возмущения с  $n_\varphi = 0$  и волновыми числами  $\alpha < 1$ .

Пространственные стационарно-бегущие волны с волновыми числами, лежащими в окрестности нейтральных волновых чисел, аналитически построены в работе [3]. Решения, волновые числа которых расположены внутри области неустойчивости достаточно далеко от нейтральных волновых чисел, приходится искать численно.

## 2. Методы вычислений

Метод численного нахождения стационарно-бегущих решений ( $H(x, \varphi, \tau) = H(\xi, \varphi)$ ,  $\xi = x - c\tau$ ,  $c$  — фазовая скорость волны) уравнения (1) подробно описан в работе [6]. Отметим здесь, что фазовая скорость  $c$  является собственным значением задачи и для заданных волновых чисел может принимать только дискретный набор значений.

Метод исследования устойчивости стационарно-бегущих решений  $H(\xi, \varphi)$  и использования полученных результатов для анализа бифуркаций, т. е. ветвления новых решений, вполне аналогичен изложенному в работах [7, 8]. Поэтому поясним его здесь кратко на примере аксиально-симметричных решений  $H = H(\xi)$ .

Пусть  $H_0(\xi)$  — периодическое решение уравнения (1) с волновым числом  $\alpha$ . Для исследования его устойчивости подставим в (1)  $H = H_0(\xi) + h(\xi, \varphi, \tau)$  и линеаризуем его по возмущению  $h(\xi, \varphi, \tau)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} - c \frac{\partial h}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial H_0 h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + S^4 \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + S^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 h = 0. \quad (6)$$

Учитывая, что переменные  $\tau$  и  $\varphi$  не входят в уравнение (6) явно, его решение ищем в виде:

$$h(\xi, \varphi, \tau) = \exp(-\gamma t) \{ \exp(in_\varphi \varphi) + \exp(-in_\varphi \varphi) \} h_1(\xi) + \text{к.с.} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), для  $h_1(\xi)$  приходим к обыкновенному линейному уравнению с периодическими коэффициентами:

$$-\gamma h_1 - c \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial H_0 h_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} - S^4 n_\varphi^2 h_1 + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - S^2 n_\varphi^2 \right)^2 h_1 = 0. \quad (8)$$

Из теоремы Флоке следует, что физически разумные решения  $h_1(\xi)$  уравнения (8), ограниченные на бесконечностях, имеют вид:  $h_1(\xi) = \exp(iQ\alpha\xi)\phi(\xi)$ , где  $\phi(\xi)$  — периодическая функция того же периода, что и  $H_0(\xi)$ ;  $Q$  — вещественный параметр.

Таким образом, исследование устойчивости аксиально-симметричных, стационарно-бегущих решений уравнения (1) сводится к изучению при различных значениях  $Q$  и  $n_\varphi$  спектра собственных значений  $\gamma$ , при которых уравнение (8) имеет периодические решения того же периода, что и  $H_0(\xi)$ . Как видно из (7), волна устойчива, если для любых значений  $Q$  и  $n_\varphi$  у всех  $\gamma$  вещественные части  $\gamma_r > 0$ . Новые стационарно-бегущие режимы ответвляются от решения  $H_0(\xi)$ , если в некоторой точке  $(\alpha, n_\varphi, Q)$  какое-нибудь из собственных значений  $\gamma$  обращается в ноль:  $\gamma(\alpha, n_\varphi, Q) = 0$ . Если  $\gamma_r(\alpha, n_\varphi, Q) = 0$ , а его мнимая часть не равна нулю —  $\gamma_i(\alpha, n_\varphi, Q) \neq 0$ , то возможно рождение нестационарных режимов.

Обобщение метода анализа устойчивости на случай пространственных решений очевидно и здесь не приводится.

Для нахождения нестационарных решений уравнения (1) функция  $H$  представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, \varphi, \tau) = \sum_{n,m} H_{nm}(\tau) \exp(i\alpha n x + i m n_{\varphi} \varphi). \quad (9)$$

В силу вещественности функции  $H$  для комплексных Фурье–гармоник  $H_{nm}(\tau)$  справедливы соотношения:

$$\bar{H}_{-n,-m} = H_{n,m},$$

где черта сверху означает операцию комплексного сопряжения.

Как показано в работе [3], задача рассмотрения спиральных волн сводится к изучению уравнения Курамото–Сивашинского. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся решениями  $H$ , которые удовлетворяют условию симметрии по переменной  $\varphi$ :  $H(x, \varphi, \tau) = H(x, -\varphi, \tau)$ . Это условие приводит к дополнительным соотношениям для гармоник  $H_{nm}(\tau)$ :

$$H_{n,-m} = H_{n,m}.$$

После подстановки (9) в уравнение (1) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье–гармоники  $H_{nm}(\tau)$ . Полагая, что все  $H_{nm}(\tau)$  с индексами  $|n| \geq N$ ,  $|m| \geq M$  равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{nm} = & -2i\alpha n \sum_{n_1=n-N}^N \sum_{m_1=m-M}^M H_{n-n_1, m-m_1} H_{n_1 m_1} + \\ & + \left( \alpha^2 n^2 + n_{\varphi}^2 S^4 m^2 - (\alpha^2 n^2 + n_{\varphi}^2 S^2 m^2)^2 \right) H_{nm}, \quad n = 0, \dots, N; \quad m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь точка над  $H_{nm}$  означает дифференцирование по времени.

Максимальные значения индексов Фурье–гармоник  $N$  и  $M$  выбирались в процессе вычислений так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\max_{n,m} (|H_{Nm}|, |H_{nM}|)}{\max_{n,m} (|H_{nm}|)} < 10^{-5}.$$

При нахождении периодических стационарно-бегущих решений уравнения (1) в работе [6] в качестве условия нормировки полагалось, что среднее отклонение толщины от невозмущенного уровня равно нулю, т. е.:  $H_{00} = 0$ . При исследовании нестационарных решений для начального возмущения мы будем брать такую же нормировку. Как ясно из (10), в процессе эволюции она будет сохраняться.

Как видно из (10), на эволюцию гармоник  $H_{0m}$  другие гармоники не влияют, а со временем эти гармоники экспоненциально затухают. Исключение представляет собой гармоника  $H_{01}$  при  $n_{\varphi} = 1$ . Для стационарно-бегущих решений с азимутальным волновым числом  $n_{\varphi} = 1$  гармоника  $H_{01}$  является произвольным параметром. Для нестационарных решений, как видно из (10), она остается постоянной во времени. Во всех рассматриваемых ниже случаях у начального возмущения будем брать  $H_{01} = 0$ .

После разделения системы (10) на действительные и мнимые части приходим к системе обыкновенных вещественных дифференциальных уравнений, которые решались численно методом Рунге–Кутты до восьмого порядка точности с автоматическим выбором шага.

### 3. Результаты исследований стационарно-бегущих решений

Результаты расчетов стационарно-бегущих волн показывают, что пространственное семейство решений с азимутальным волновым числом  $n_\varphi = 1$  ответвляется от тривиального решения  $H \equiv 0$  в окрестности нейтрального волнового числа  $\alpha_n = \sqrt{1 - 2S^2}$ . Это семейство будем называть первым пространственным семейством (семейством I). Область неустойчивых волновых чисел  $\alpha$  в этом случае лежит в интервале  $(0, \alpha_n)$ . Для этого семейства зависимость амплитуды решений  $\Delta H = H_{\max} - H_{\min}$  от волнового числа  $\alpha$  и параметра  $S$  представлена в виде поверхности на рис. 1. Из этого рисунка видно, что в случае, когда  $\alpha_n > 0,5$ , первое пространственное семейство непрерывно продолжается внутрь области неустойчивости, и, наоборот, в случае, когда  $\alpha_n < 0,5$ , это семейство продолжается в область устойчивости тривиального решения  $H \equiv 0$  к малым трехмерным возмущениям. При  $\alpha_n = 0,5$  семейство I вырождается в решение с нулевой амплитудой. Фазовая скорость волн  $c$  этого семейства тождественно равна нулю. Линия  $p$  на рис. 1 является проекцией края поверхности «амплитуд решений  $\Delta H$ » на плоскость  $(\alpha, S)$ . При значениях  $\alpha, S$ , принадлежащих этой линии  $p$ , трехмерные волны семейства I вырождаются в аксиально-симметричные волны с удвоенным волновым числом  $2\alpha$ . Оказывается, что эти волны принадлежат аксиально-симметричному семейству решений, ответвляющемуся от тривиального решения  $H \equiv 0$  в окрестности точки  $\alpha_n = 1$ . Это семейство в дальнейшем будем называть первым аксиально-симметричным семейством (семейством Ia).

Решения первого стационарно-бегущего пространственного семейства имеют три симметрии  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые для функции  $H(x, \varphi)$  при определенном выборе начала координат имеют вид

$$A_1: H(\lambda/2 - x, \varphi) = -H(x, \varphi),$$

$$A_2: H(-x, \varphi + \pi) = -H(x, \varphi), \quad (11)$$

$$A_3: H(x + \lambda/2, x + \pi) = H(x, \varphi).$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны в направлении оси  $x$ . Для гармоник  $H_{nm}$  наличие симметрий (11) сводится к следующим

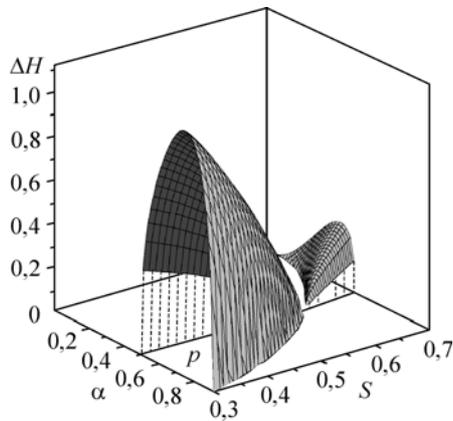


Рис. 1. Зависимость амплитуды решений первого пространственного семейства решений от волнового числа  $\alpha$  и параметра  $S$ .

условиям:

$$A_1: \operatorname{Re} H_{nm} = 0 \text{ для четных } n, \quad \operatorname{Im} H_{nm} = 0 \text{ для нечетных } n,$$

$$A_2: \operatorname{Re} H_{nm} = 0 \text{ для четных } m, \quad \operatorname{Im} H_{nm} = 0 \text{ для нечетных } m,$$

$$A_3: H_{nm} = 0 \text{ для нечетных } n + m.$$

Заметим, что если функция  $H$  имеет две из трех представленных симметрий, то она будет обладать и третьей симметрией. Но поскольку часть из обсуждаемых ниже стационарно-бегущих семейств решений обладает только одной из перечисленных симметрий, здесь представлены все три.

Как упоминалось выше, симметрии (11) выполняются для функции  $H(x, \varphi)$  при вполне определенном выборе начала координат. При произвольном его сдвиге соотношения (11), естественно, будут нарушаться. Однако мы по-прежнему будем говорить, что решение  $H(x, \varphi)$  обладает соответствующими типами симметрий из (11), подразумевая, что определенными сдвигами координат для него можно добиться выполнения данных симметрий.

Если какими-то симметриями (11) обладает начальное возмущение, то они сохраняются в процессе эволюции у любых функций  $H$ , являющихся решениями уравнения (1).

Процесс ветвления от семейств I и Ia новых пространственных стационарно-бегущих семейств подробно рассмотрен в работе [6]. На рис. 2 для значения  $S = 0,4$  показаны лишь те из них, которые используются при дальнейшем анализе.

Так, здесь представлена часть семейства II, ответвляющегося от семейства I, которое продолжается до сколь угодно малых волновых чисел  $\alpha$  и в пределе переходит, как показано в [6], в солитонное решение. У решений семейства II после ветвления сохраняется из представленных в (11) лишь симметрия  $A_3$ .

Пространственное семейство решений II' ответвляется от первого аксиально-симметричного семейства Ia в область меньших волновых чисел. В отличие от семейства II, оно может быть продолжено до некоторой ненулевой крайней точки. В этой точке решение семейства II' вырождается в пространственную волну с удвоенным волновым числом  $2\alpha$ , которая принадлежит семейству I. Другими словами, семейство решений II', ответвившись от первого аксиально-симметричного семейства Ia, в дальнейшем слилось с первым пространственным семейством I. У решений этого семейства имеется лишь симметрия  $A_2$ . Все представленные на рис. 2 семейства стационарно-бегущих решений, кроме семейства II, имеют нулевую фазовую скорость.

Некоторые результаты исследования устойчивости семейств Ia, I и II по отношению к возмущениям того же периода в  $x$ -направлении показаны на рис. 3–5, соответственно. На рис. 3, 4, 5, а для нескольких наиболее опасных возмущений даны зависимости вещественных частей  $\gamma_r$  от волнового числа  $\alpha$ . Здесь, как и на рис. 2, значение параметра  $S = 0,4$ . На рис. 5, б представлены зависимости мнимых частей  $\gamma_i$  от  $\alpha$ . В тех

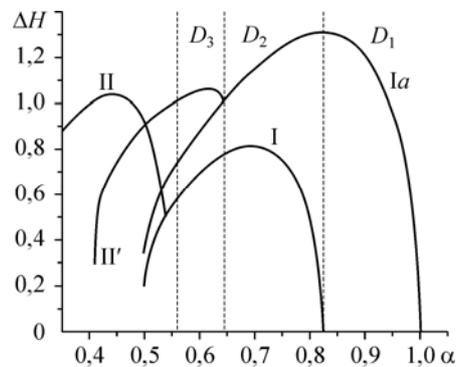


Рис. 2. Зависимость амплитуды некоторых стационарно-бегущих семейств решений от волнового числа для  $S = 0,4$ .

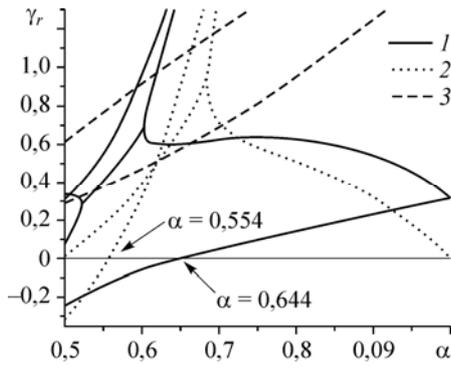


Рис. 3. Результаты исследования устойчивости для решений семейства Ia к возмущению с  $Q = 0$ . Зависимость  $\gamma_r$  наиболее опасных возмущений от волнового числа для  $S = 0,4$ .

Возмущения: аксиально-симметричные — 1 ( $n_\varphi = 0$ ), пространственные — 2 ( $n_\varphi = 1$ ), 3 ( $n_\varphi = 2$ ).

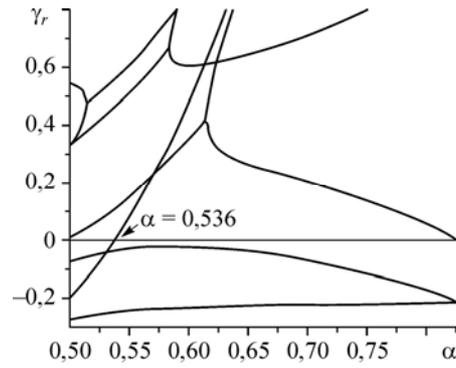


Рис. 4. Результаты исследования устойчивости для решений семейства I к возмущениям с  $Q = 0$  и  $n_\varphi = 1$ . Зависимость  $\gamma_r$  наиболее опасных возмущений от волнового числа для  $S = 0,4$ .

точках оси абсцисс, где какой-нибудь из декрементов затухания  $\gamma$  проходит через ноль, от исходных семейств решений ответвляются новые волновые семейства. Так, например, на рис. 3 именно в точке  $\alpha_{23} = 0,644$  одно из  $\gamma$  проходит через ноль, в результате чего и происходит ветвление пространственного семейства II' от аксиально-симметричного семейства Ia, как показано на рис. 2. Вторая точка на рис. 3, в которой одно из  $\gamma$  равно нулю, это —  $\alpha_3 = 0,554$ . Семейство, ответвляющееся в этой точке, на рис. 2 не показано, хотя оно и существует.

Границы областей  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  на рис. 2 определяются соответствующими нейтральными волновыми числами для  $n_\varphi = 0$ ,  $n_\varphi = 1$  и точками ветвлений, представленных на рис. 3 —  $\alpha_{23}$  и  $\alpha_3$ .

На рис. 4 в точке  $\alpha = 0,536$  от семейства I ответвляется семейство II. Эта ситуация так же изображена на рис. 2.

Точка  $\alpha = 0,523$  на рис. 5 отличается от упомянутых выше точек бифуркаций тем, что в ней обращается в ноль только вещественная часть соответствующего декремента затухания  $\gamma$  (сравним рис. 5, a и b). Поэтому, хотя при ее прохождении

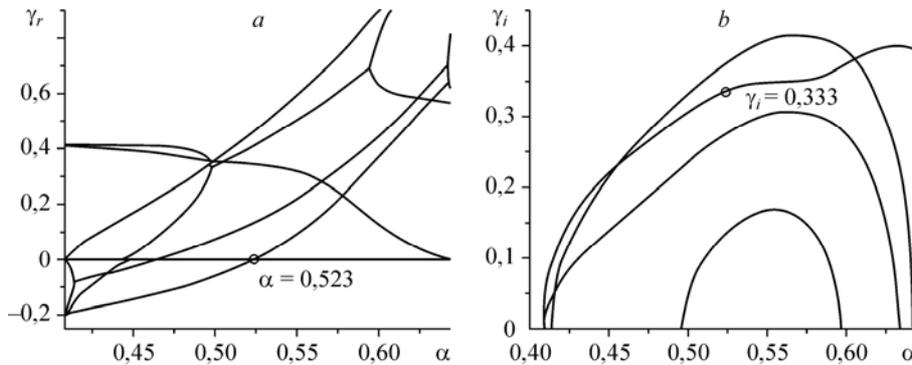


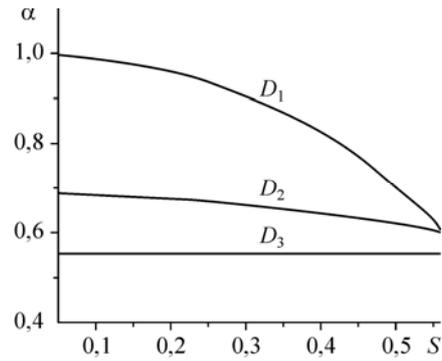
Рис. 5. Результаты исследования устойчивости для решений семейства II' к возмущениям с  $Q = 0$  и  $n_\varphi = 1$  для  $S = 0,4$ .

Зависимости  $\gamma_r$  (a) и  $\gamma_i$  (b) наиболее опасных возмущений от волнового числа.

Рис. 6. Волновые числа, определяющие границы областей  $D_{1-3}$  в зависимости от параметра  $S$ .

также происходит потеря устойчивости семейства  $\Pi'$ , но при этом ответвляется новое, не стационарно-бегущее, а осциллирующее по времени семейство решений.

Зависимости значений волновых чисел  $\alpha$  для границ областей  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  от параметра  $S$  показаны на рис. 6. Хотя здесь соответствующие кривые начинаются с минимального значения параметра  $S = 0,05$ , все представленные ниже результаты ограничиваются параметрами  $S > S_c(2) \approx 0,259$ . Это связано с тем, что при  $S \leq S_c(2)$  для рассматриваемых диапазонов волновых чисел  $\alpha$  наряду с  $n_\varphi = 1$  существуют пространственные стационарно-бегущее семейства решений с  $n_\varphi \geq 2$ . В этих случаях рассмотрение нестационарных волновых режимов значительно усложняется.



#### 4. Результаты расчетов нестационарных волновых режимов

Информация о стационарно-бегущих решениях уравнения (1), представленная в предыдущем пункте, позволяет лучше понять особенности эволюции некоторых нестационарных решений. Наиболее полно удастся это сделать в случаях, когда начальные возмущения лежат в области умеренных волновых чисел  $\alpha \sim 0,5 \div 1$ , а именно — внутри областей  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ . Это обусловлено прежде всего тем, что в данных областях имеется лишь несколько стационарно-бегущих семейств решений, каждое из которых можно однозначно охарактеризовать симметриями (11). Ниже представлены типичные примеры различных эволюционных перестроек для таких волновых чисел. С уменьшением волнового числа  $\alpha$  происходит быстрый рост числа стационарно-бегущих семейств решений, в результате чего поведение нестационарных решений становится существенно более сложным и практически хаотическим.

Если волновое число  $\alpha$  лежит в области  $D_1$ , то бесконечно малые пространственные возмущения затухают при любых  $n_\varphi \neq 0$ , а бесконечно малые аксиально-симметричные возмущения, соответствующие  $n_\varphi = 0$ , возрастают. Поэтому можно ожидать, что нарастать могут только такие начальные пространственные возмущения, для которых свертка в уравнении (10) обеспечивает генерацию амплитуды неустойчивой гармоники  $H_{10}$ . В этом случае, как показали расчеты, при  $\tau \rightarrow \infty$  решение  $H$  стремится к аксиально-симметричной волне семейства  $Ia$ . В противном случае начальное возмущение будет затухать, даже если начальные амплитуды гармоник достаточно велики.

Такое асимптотическое поведение пространственных решений  $H$ , т. е. притяжение их при возрастании  $\tau$  к аксиально-симметричной волне семейства  $Ia$ , вполне понятно. Действительно, в этой области существует только одно стационарное семейство — семейство  $Ia$ . Причем оно для волновых чисел  $\alpha$  из области  $D_1$  оказывается устойчивым ко всем малым возмущениям того же периода (см. рис. 3). Таким образом, решения семейства  $Ia$  с волновыми числами из данной области для

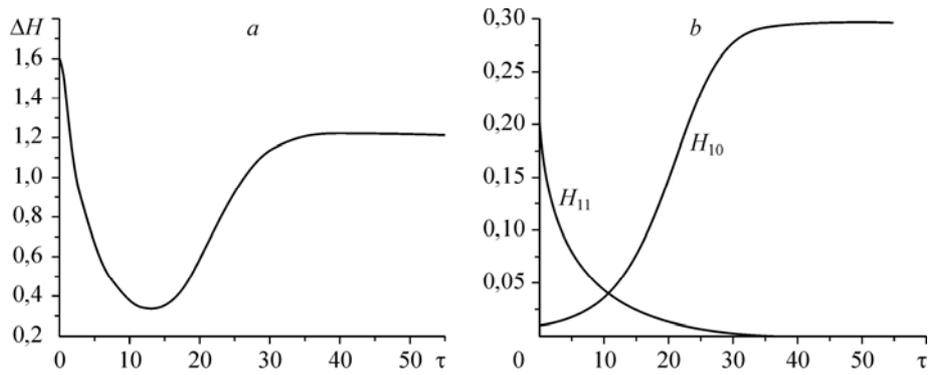


Рис. 7. Зависимости амплитуды (а) и двух основных гармоник (b) от времени нестационарного решения с  $\alpha = 0,9$ ,  $n_\varphi = 1$ ,  $S = 0,4$ .

всех периодических возмущений, со сделанными выше оговорками, являются глобальным аттрактором. Пример эволюции амплитуды возмущения, для которого начальная гармоника  $H_{11}$  много больше гармоники  $H_{10}$ , показан на рис. 7, а. На рис. 7, b на примере двух гармоник качественно показано, как происходит затухание пространственных гармоник (гармоник  $H_{nm}$  с  $m \neq 0$ ) и рост аксиально-симметричных гармоник (гармоник  $H_{n0}$ ). Профили волн этого решения для нескольких моментов времени показаны на рис. 8. Здесь и ниже, на подобных рисунках с профилями волн, в направлении  $x$  представлены два периода волны, а по направлению  $\varphi$  — один период (вдоль образующей цилиндра произведен разрез и его поверхность расправлена — линии  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  являются одной линией).

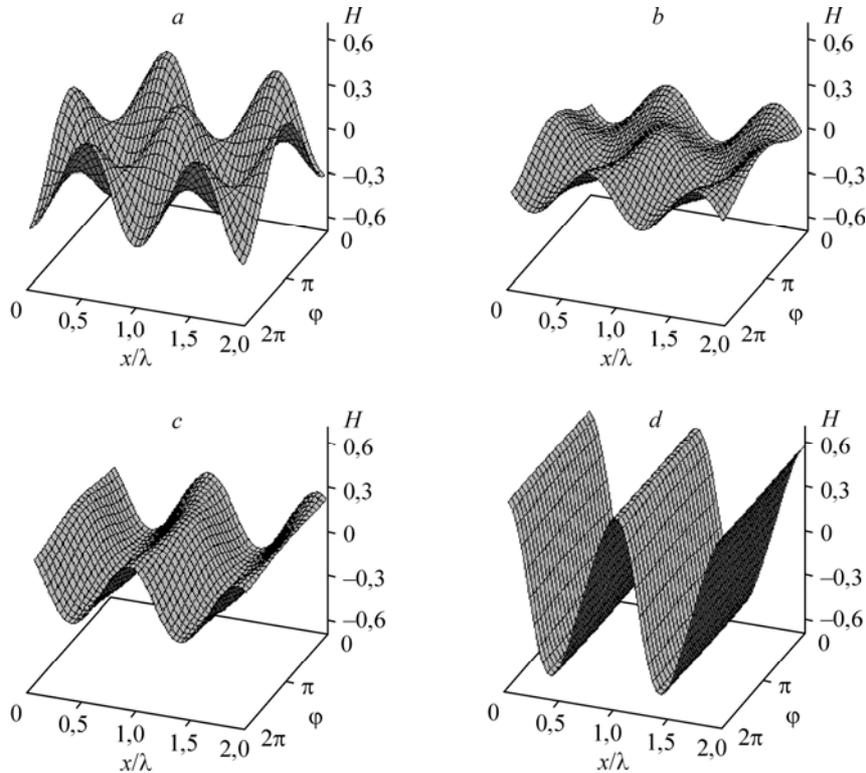


Рис. 8. Профили волн нестационарного решения, представленного на рис. 7.  $t = 5$  (a), 13 (b), 17 (c), 30 (d).

В области  $D_2$  имеется два стационарно-бегущих семейства — I и Ia (см. рис. 2). Здесь начальное возмущение, способное генерировать гармонику  $H_{10}$ , аналогично предыдущему случаю, также эволюционирует к волне семейства Ia.

Начальные пространственные возмущения, обладающие симметрией  $A_3$  и генерирующие гармонику  $H_{11}$ , в области  $D_2$  не затухают, как это имело место в предыдущем случае, а асимптотически приближаются к стационарно-бегущей волне пространственного семейства I.

Примеры для этих двух характерных сценариев развития возмущений представлены на рис. 9, а. Здесь для  $\alpha = 0,8$  даны зависимости амплитуды таких решений от времени. На рис. 9, б показана зависимость от времени двух основных гармоник для решения, представленного кривой 2 на рис. 9, а. На рисунке видно, как начальное возмущение быстро перестраивается таким образом, что значение амплитуды гармоники  $H_{11}$  становится доминирующим и в дальнейшем происходит постепенное нарастание амплитуды волны. Соответствующие профили волн для этого нестационарного решения показаны на рис. 10. Возмущения остальных типов для волновых чисел из области  $D_2$ , которые не были рассмотрены выше, затухают.

Из рассматриваемых в настоящей работе областей наиболее сложна для анализа область  $D_3$  (рис. 2). В ней решения семейства Ia оказываются неустойчивыми по отношению к некоторым трехмерным возмущениям, и к имеющимся семействам I и Ia здесь добавляется еще и семейство II'. Опираясь на данные о симметриях этих решений, можно классифицировать асимптотическое поведение решения  $H$  при  $\tau \rightarrow \infty$  по признаку того, к какому типу относились начальные возмущения:

- (i) — возмущения, имеющие симметрию  $A_3$  и способные генерировать гармонику  $H_{11}$ ;
- (ii) — возмущения, имеющие симметрию  $A_1$  и способные генерировать гармонику  $H_{10}$ ;
- (iii) — возмущения, способные генерировать гармоники  $H_{11}$ ,  $H_{10}$  и не имеющие симметрий  $A_1$  и  $A_3$ ;
- (iv) — возмущения, не подпадающие ни под один из пунктов (i)–(iii).

Проведенные численные исследования показывают, что начальные возмущения, имеющее какую-либо симметрию, асимптотически приближаются к стационарно-бегущей волне с той же симметрией. Поскольку для семейств стационарно-

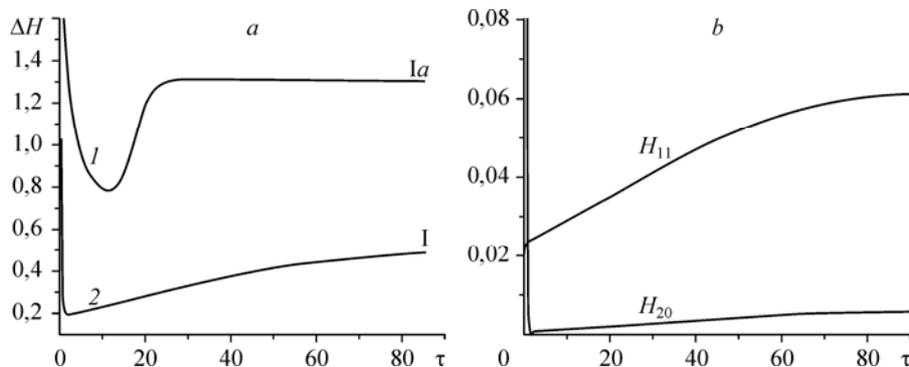


Рис. 9. Зависимости амплитуды с  $\alpha = 0,8$ ,  $n_\varphi = 1$ ,  $S = 0,4$  (а) и двух основных гармоник для кривой 2 с рис. 9, а (б) от времени нестационарных решений.

Начальные возмущения: 1 — с симметрией  $A_3$ , 2 — без симметрии  $A_3$ .

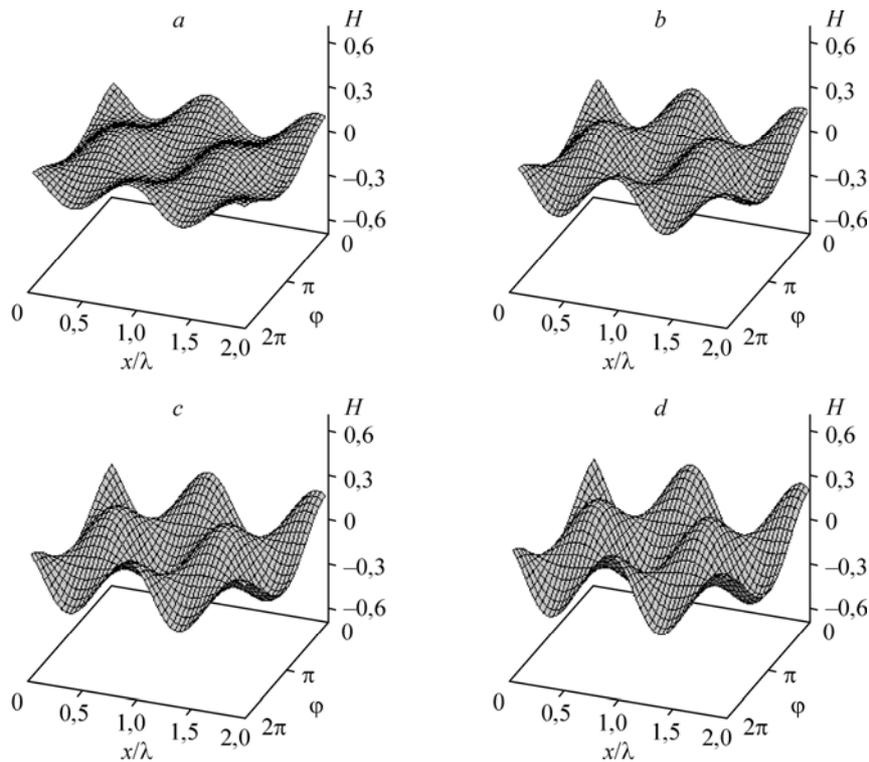


Рис. 10. Профили волн нестационарного решения, амплитудная зависимость которого представлена на рис. 9 кривой 2.  
 $t = 10$  (a),  $30$  (b),  $50$  (c),  $80$  (d).

бегущих решений из области  $D_3$  имеющийся набор симметрий  $A_i$  индивидуален, то классификацию эволюции начальных возмущений можно провести однозначно. Только семейство I имеет симметрию  $A_3$ . Поэтому именно к нему асимптотически притягиваются решения  $H$  с начальными возмущениями типа (i) несмотря на то, что решения семейства I, вообще говоря, неустойчивы, так как для них есть растущие моды возмущений, у которых  $\gamma_r < 0$  (см. рис. 4). Пример эволюции решения с типом начальных возмущений (i) представлен на рис. 11, a кривой 1.

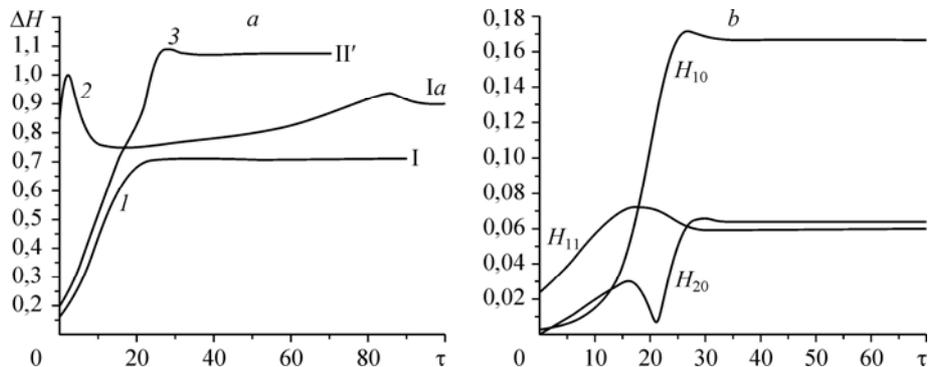


Рис. 11. Зависимости амплитуды с  $\alpha = 0,6$ ,  $n_\varphi = 1$ ,  $S = 0,4$  (a) и трех основных гармоник для кривой 3 с рис. 11, a (b) от времени нестационарного решения.  
 Начальные возмущения, представленные по типам: 1 — (i), 2 — (ii), 3 — (iii).

Симметрией  $A_1$  и ненулевой гармоникой  $H_{10}$  обладают только стационарно-бегущие решения семейства Ia. Поэтому начальные возмущения, относящиеся к типу (ii), эволюционируют именно к волне этого семейства. И это несмотря на то, что решение семейства Ia неустойчиво к некоторым модам трехмерных возмущений (рис. 3), а решение семейства II' устойчиво ко всем малым возмущениям того же периода (см. рис. 5). Пример такого сценария эволюции продемонстрирован на рис. 11, *a* кривой 2. В данной области волновых чисел эволюция начальных возмущений, относящихся к типам (i) и (ii), качественно аналогична поведению подобных возмущений с волновыми числами из области  $D_2$ .

Если начальное возмущение относится к типу (iii), то нестационарное решение  $H$  при  $\tau \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к стационарно бегущей волне семейства II'. Пример эволюции решения для этого типа начальных возмущений показан кривой 3 на рис. 11, *a*. Для этого решения зависимость от времени трех основных гармоник представлена на рис. 11, *b*. Профили волн для данного нестационарного решения показаны на рис. 12.

Возмущения типа (iv) с волновыми числами из области  $D_3$  затухают.

Поскольку из всевозможных начальных возмущений накладываемым условиям симметрий (i)–(ii) удовлетворяет существенно более узкий их набор, а возмущения типа (iv) затухают, то можно сказать, что в данной области  $D_3$  выделенным является семейство II', к решениям которого притягивается основная доля начальных возмущений.

В заключение приведем пример возникновения осциллирующей во времени волны. Как видно из рис. 5, для значения параметра  $S = 0,4$  решение семейства II' при движении в сторону меньших волновых чисел впервые теряет устойчивость после прохождения значения волнового числа  $\alpha = 0,523$ . В этой точке у одного из

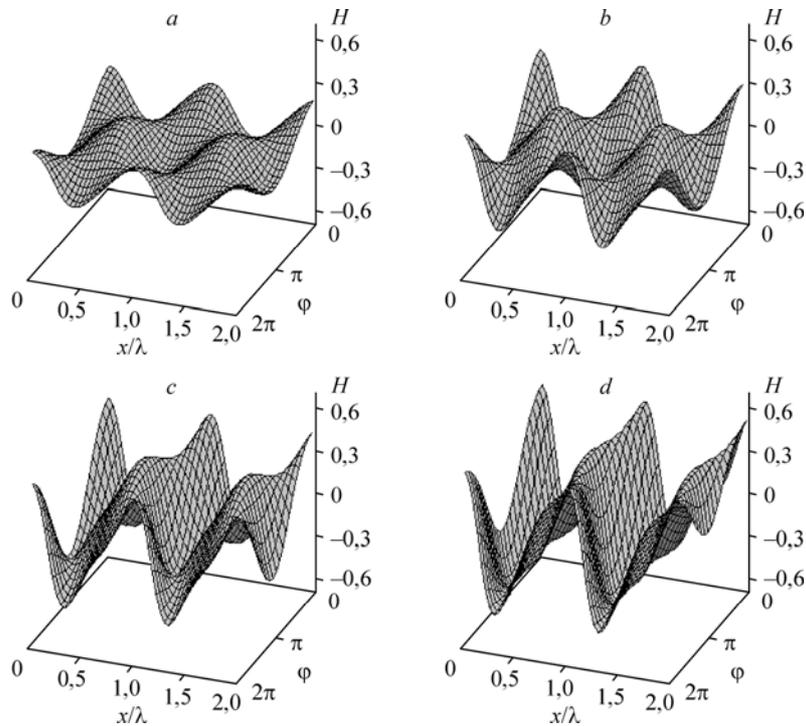


Рис. 12. Профили волн нестационарного решения, амплитудная зависимость которого представлена на рис. 11 кривой 3.

$t = 5$  (a), 13 (b), 21 (c), 35 (d).

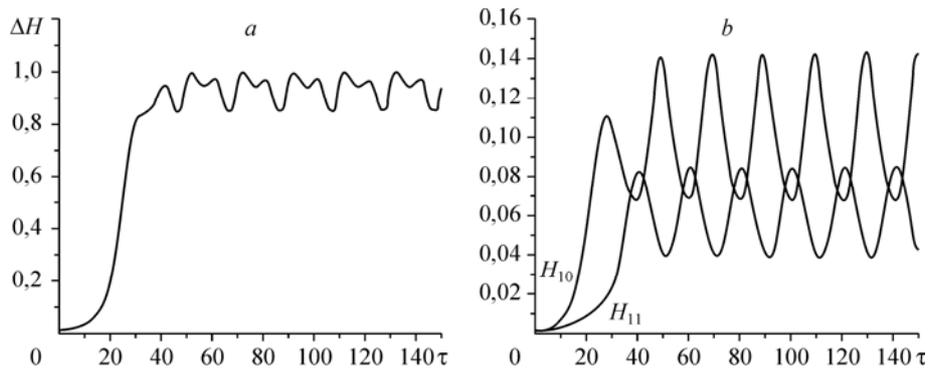


Рис. 13. Зависимости амплитуды (а) и двух основных гармоник (б) от времени нестационарного решения, притягивающегося к осциллирующему волновому режиму.  
 $\alpha = 0,52, S = 0,4.$

собственных значений  $\gamma_r$  обращается в ноль. Но при этом его мнимая часть  $\gamma_i$  остается неравной нулю, поэтому в окрестности  $\alpha = 0,523$  от решения семейства  $\Pi'$  ответвляется новое семейство периодических по времени волновых решений. Здесь уместно подчеркнуть, что по волновым числам область существования этого нового семейства расположена левее области  $D_3$ . Пример временной зависимости амплитуды и двух основных гармоник для такого типа решения с волновым числом  $\alpha = 0,52$  показан на рис. 13. К этому решению притягиваются только те решения, у которых начальные возмущения относятся к типу (iii). Как видно из этого рисунка, период колебаний данного волнового режима равен примерно 20 единицам безразмерного времени  $\tau$ . Профили волн такого решения в последовательные моменты времени, принадлежащие одному временному периоду, показаны на рис. 14.

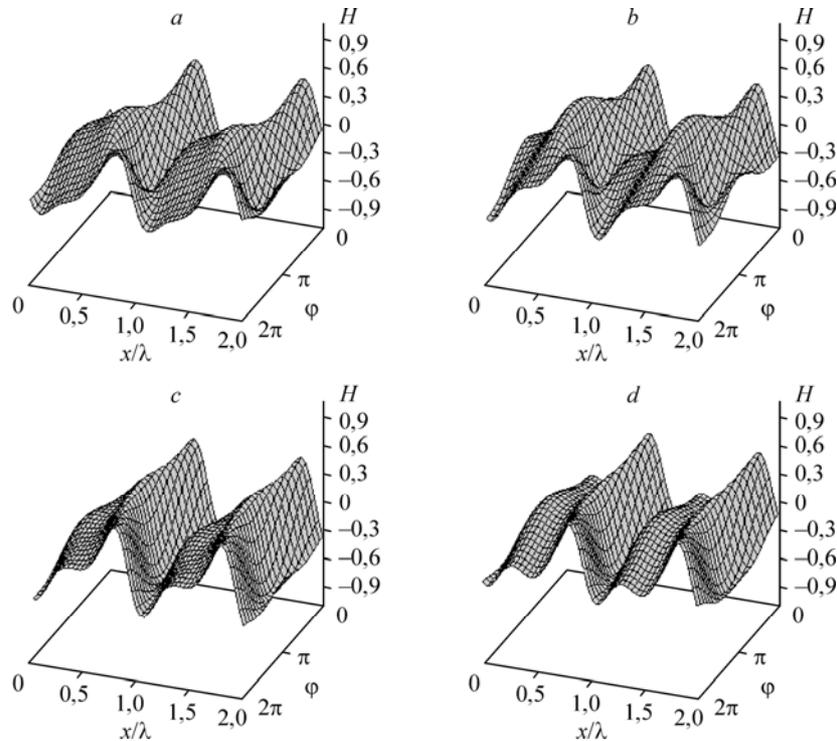


Рис. 14. Профили волн нестационарного решения, представленного на рис. 13.  
 $t = 80$  (а), 85 (б), 90 (с), 95 (д).

### Заключение

Используемые в настоящей статье подходы могут оказаться полезными для изучения широкого класса нелинейных активно-диссипативных эволюционных уравнений в частных производных. Эти подходы заключаются в построении стационарно-бегущих семейств решений, исследованию их устойчивости и проведению с использованием этой информации исследования нестационарных решений.

Представленные результаты демонстрируют, как в области, в которой существует лишь небольшое число стационарно-бегущих семейств решений, удается выявить и проанализировать типичные сценарии эволюции начальных возмущений. Для рассматриваемого уравнения (1) этот анализ основывается на наличии или отсутствии сохраняющихся в процессе эволюции симметрий исследуемых решений, которыми однозначно классифицируются волновые режимы.

### Список литературы

1. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
2. Shlang T., Sivashinsky G.J. Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J. Phys. 1982. Vol. 43, No. 3. P. 459–466.
3. Цвелодуб О.Ю. Спиральные волны на поверхности пленки, стекающей по поверхности цилиндра // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 56–63.
4. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.
5. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // Гидродинамика: Сб. науч. тр. Пермь. 1974. Вып. 5. С. 91–104.
6. Бочаров А.А., Цвелодуб О.Ю. Волновые режимы течения вязкой пленки, стекающей по вертикальному цилиндру // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 2. С. 176–183.
7. Tselodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya. On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. Vol. 39. P. 336–351.
8. Tselodub O.Yu., Kotychenko L.N. Spatial wave regimes on a surface of thin viscous liquid film // Physica D. 1993. Vol. 63. P. 361–377.

*Статья поступила в редакцию 12 апреля 2011 г.*