

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ  
СПЛОШНЫХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

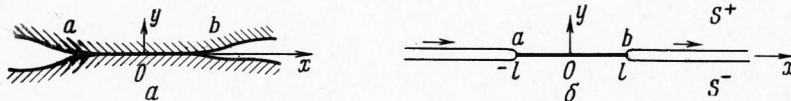
Ю. П. Емец

(Киев)

Дается решение задачи о распределении плотности тока, напряженности и потенциала электрического поля в окрестности контакта двух проводящих сред, которые обладают различными скалярными электропроводностями  $\sigma$  и постоянными Холла  $R_H$ . Такая задача встречается в теории магнитной гидродинамики и в физике полу-проводников, например, при исследовании полей в кусочно-неоднородных средах или на электродах в магнитогидродинамических каналах и электротехнических устройствах.

Если одна из двух сред обладает совершенными свойствами ( $\sigma = \infty, R_H = 0$ ), то в рамках приближенной теории (пренебрегается индуцированным магнитным полем) задача сводится к нахождению аналитической функции в области, занимаемой второй средой, и ее решение часто можно найти при помощи конформного отображения области на многоугольник [1,2]. В иных случаях электрическое поле в каждой среде зависит от физических свойств и геометрии областей двух сред совместно и требуется найти решение, сопряженное на контакте. Удобным математическим аппаратом для решения таких задач служит теория сингулярных интегральных уравнений [3,4].

1. Приведем решение задачи, предполагая, что электрический контакт осуществляется между двумя электропроводными телами. Будем считать, что участок контакта мал по сравнению с радиусом кривизны обоих тел, тогда удобно каждое тело представить полуплоскостями с общей границей на участке  $ab$  (фиг. 1, а, б).



Фиг. 1

Положим, что внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}(0, 0, H_z)$  всюду однородно, но, в общем случае, не одинаковое в верхней и нижней полуплоскостях и направлено нормально к векторам тока  $\mathbf{j}(x, y)$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(x, y)$ ; собственным магнитным полем рассматриваемых токов пренебрежем. Из системы

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} - \frac{\omega \tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, & \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \omega \tau &= R_H \sigma H \end{aligned} \quad (1.1)$$

и принятых предположений вытекает, что поле тока удовлетворяет уравнениям  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{j} = 0$ . Поэтому можно ввести, как и в работе [5], комплексный потенциал электрического тока  $F(z)$

$$\begin{aligned} F(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) & (z &= x + iy) \\ \frac{dF(z)}{dz} &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = j_x(x, y) - ij_y(x, y), & \frac{dF(z)}{dz} &= j(\bar{z}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $P$  и  $Q$  — потенциальная и силовая функции тока соответственно.

Обозначим полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  через  $S^+$ , а полуплоскость  $\text{Im } z < 0$  — через  $S^-$ ; за положительное направление обхода на действительной оси примем то, которое оставляет область  $S^+$  слева.

Решается задача о распределении полевого тока, протекающего через контакт. Имеем следующие граничные условия: на участке контакта нормальная компонента тока и касательная компонента напряженности электрического поля непрерывны, на остальных участках действительной оси нормальная компонента тока равна нулю в каждой области. Эти условия приводят к следующей краевой задаче (индексы 1 и 2 относятся соответственно к  $S^+$  и  $S^-$ ):

$$\begin{aligned} \text{Im } j_1(x) &= \text{Im } j_2(x), \quad -l < x < l \quad \text{при } y=0 \\ \text{Re} \left\{ \frac{1+i\omega_1\tau_1}{\sigma_1} j_1(x) \right\} &= \text{Re} \left\{ \frac{1+i\omega_2\tau_2}{\sigma_2} j_2(x) \right\}, \quad -l < x < l \quad \text{при } y=0 \quad (1.3) \\ \text{Im } j_1(x) &= \text{Im } j_2(x) = 0, \quad |x| > l \quad \text{при } y=0 \end{aligned}$$

Здесь использована комплексная запись закона Ома (1.1)

$$j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y) = \frac{-\sigma}{1+i\omega\tau} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

где  $U$  — электростатический потенциал.

Необходимо указать еще расположение источников и стоков тока в  $S^+$  и  $S^-$ . Ради упрощения полученных ниже формул положим, что в  $S^+$  в точке  $z = \infty$  расположен источник конечной интенсивности, а в  $S^-$  в точке  $z = \infty$  — сток. Тогда получаем условие на бесконечности

$$j_i(z) = \frac{C_i}{z} + O(z^{-2}) \quad (i=1, 2) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

2. Для решения задачи введем две кусочно-голоморфные функции

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= \begin{cases} \Psi_1^+(z) & \text{при } z \in S^+, \Psi_1^+(z) = j_1(z) \\ \Psi_1^-(z) & \text{при } z \in S^-, \Psi_1^-(z) = \overline{j_1(\bar{z})} \end{cases} \\ \Psi_2(z) &= \begin{cases} \Psi_2^+(z) & \text{при } z \in S^+, \Psi_2^+(z) = \overline{j_2(\bar{z})} \\ \Psi_2^-(z) & \text{при } z \in S^-, \Psi_2^-(z) = j_2(z) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Нормальную компоненту тока на контакте обозначим через  $h(x)$  и положим, что она удовлетворяет условию Гельдера.

На основании первого и последнего граничных условий (1.3) функции  $\Psi_i(z)$  ( $i=1, 2$ ) можно выразить при помощи интеграла Шварца через  $h(x)$

$$\Psi_1(z) = \frac{-1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{h(x) dx}{x-z}, \quad \Psi_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{h(x) dx}{x-z} \quad (2.2)$$

Эти функции, очевидно, удовлетворяют на бесконечности условию (1.5). Разложение функций  $\Psi_1(z)$  и  $\Psi_2(z)$  в бесконечно удаленных точках соответственно в областях  $S^+$  и  $S^-$  дает

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= \frac{z^{-1}}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx + \frac{z^{-2}}{\pi} \int_{-l}^l xh(x) dx + \dots \quad \text{при } z \in S^+ \\ \Psi_2(z) &= -\frac{z^{-1}}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx - \frac{z^{-2}}{\pi} \int_{-l}^l xh(x) dx - \dots \quad \text{при } z \in S^- \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда находим значения постоянных  $C_{11}$  и  $C_{21}$  в (1.5)

$$C_{11} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx, \quad C_{21} = -\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l h(x) dx, \quad C_{11} = -C_{21} = \pi^{-1} I \quad (2.4)$$

где  $I$  — заданная в задаче величина суммарного тока, протекающего через контакт или, что то же, интенсивность источника, помещенного в точку  $z = \infty$  в области  $S^+$ .

Второе граничное условие (1.3), учитывая (2.1) и (2.2), представим в виде

$$\frac{1 + i\omega_1\tau_1}{\sigma_1} \Psi_1^+(x) + \frac{1 - i\omega_1\tau_1}{\sigma_1} \Psi_1^-(x) = \frac{1 + i\omega_2\tau_2}{\sigma_2} \Psi_2^+(x) + \frac{1 - i\omega_2\tau_2}{\sigma_2} \Psi_2^-(x) \quad \text{при } y = 0 \quad (2.5)$$

Отсюда, используя формулы Сохоцкого — Племеля, получаем однородное сингулярное интегральное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $h(x)$

$$(\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1) h(x) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{h(t) dt}{t - x} = 0 \quad (-l < x, t < l) \quad (2.6)$$

Этому уравнению соответствует обобщенная задача линейного сопряжения (задача Римана) [3,4]; для функции  $\Psi_1(z)$  она имеет вид

$$\Psi_1^+(x) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + i(\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1)}{\sigma_1 + \sigma_2 - i(\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1)} \Psi_1^-(x) \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0$$

$$\Psi_1^+(x) = \Psi_1^-(x) \quad |x| > l \quad \text{при } y = 0 \quad (2.7)$$

Исходя из физического предположения о скоплении тока на концах контакта, решение краевой задачи (2.7) находим в классе функций, имеющих интегрируемые особенности в узлах  $a$  и  $b$ . Это решение, по условию (1.5), исчезает на бесконечности

$$\Psi_1(z) = C_{11} (z + l)^{-1/2-\varepsilon} (z - l)^{-1/2+\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad -\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

$$\left( (z + l)^{-1/2-\varepsilon} (z - l)^{-1/2+\varepsilon} = \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \text{ при } |z| \rightarrow \infty \right)$$

Согласно (2.4), функция  $\Psi_1(z)$  должна удовлетворять условию

$$\Psi_1(z) = \overline{\Psi_1(\bar{z})}$$

из которого следует, что постоянная  $C_{11}$  должна быть действительной величиной. Из (2.8) находим все искомые поля в  $S^+$ .

Распределение тока в  $S^+$  определяется непосредственно функцией  $\Psi_1(z)$

$$j_1(z) = j_{1x}(x, y) - ij_{1y}(x, y) = C_{11} (z + l)^{1/2-\varepsilon} (z - l)^{-1/2+\varepsilon} \text{ при } z \in S^+, \quad (2.9)$$

а на контакте  $ab$  находится по формулам Сохоцкого — Племеля

$$j_{1y}(x, 0) = h(x) = \frac{\Psi_1^-(x) - \Psi_1^+(x)}{2i} = C_{11} (l + x)^{-1/2-\varepsilon} (l - x)^{-1/2+\varepsilon} \times$$

$$\times \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_1\omega_2\tau_2 - \sigma_2\omega_1\tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (-l < x < l) \quad (2.10)$$

$$j_{1x}(x, 0) = \frac{\Psi_1^+(x) + \Psi_1^-(x)}{2} = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} C_{11} (\sigma_1 \omega_2 \tau_2 - \sigma_2 \omega_1 \tau_1) (l+x)^{-1/2-\varepsilon} \times \\ \times (l-x)^{-1/2+\varepsilon} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_1 \omega_2 \tau_2 - \sigma_2 \omega_1 \tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (-l < x < l)$$

Постоянная  $C_{11}$  определяется из условия

$$\int_{-l}^l j_{1y}(x, 0) dx = I \quad (2.11)$$

Используя известную формулу

$$\int_{-1}^1 (1+t)^{-1/2-\varepsilon} (1-t)^{-1/2+\varepsilon} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \varepsilon} \quad (2.12)$$

легко убедиться, что действительно

$$C_{11} = \pi^{-1} I \quad (2.13)$$

Далее находим электрическое поле в  $S^+$  (2.14)

$$E_1(z) = -\frac{\partial U_1}{\partial x} + i \frac{\partial U_1}{\partial y} = (1 + i\omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} (z+l)^{-1/2-\varepsilon} (z-l)^{-1/2+\varepsilon} \quad \text{при } z \in S^+$$

$$U_1(x, y) = U_1(x_0, y_0) + \operatorname{Re} \left\{ -(1 + i\omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} \int_{z_0}^z (z+l)^{-1/2-\varepsilon} (z-l)^{-1/2+\varepsilon} dz \right\} \\ \text{при } z \in S^- \quad (2.15)$$

В формуле (2.15) интеграл выражается через элементарные функции только тогда, когда показатель степени  $1/2 + \varepsilon$  — рациональное число. Положим в этом случае  $1/2 + \varepsilon = p/q$  ( $p, q$  — натуральные числа;  $p < q$ ) и применим в (2.15) подстановку

$$\left( \frac{z-l}{z+l} \right)^{1/q} = t \quad (2.16)$$

Эта подстановка приводит (2.15) к виду

$$U_1(t) = U_1(t_0) + \operatorname{Re} \left\{ -(1 + i\omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} \int_{t_0}^t \frac{t^{p-1} dt}{1-t^q} \right\} \quad (2.17)$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение [на [простые дроби, получим вместо (2.15)

$$U_1(x, y) = U_1(x_0, y_0) + \operatorname{Re} \left\{ -(1 + i\omega_1 \tau_1) \frac{I}{\pi \sigma_1} \frac{1}{q} \sum_{v=0}^{q-1} \exp \left[ \frac{2\pi i v (p-q)}{q} \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \left[ \exp \left( \frac{i 2\pi v}{q} \right) - \left( \frac{z-l}{z+l} \right)^{1/q} \right] \left[ \exp \left( \frac{2\pi i v}{q} \right) - \left( \frac{z_0-l}{z_0+l} \right)^{1/q} \right]^{-1} \right\} \quad (2.18)$$

Формулы, аналогичные приведенным, можно получить и для области  $S^-$ , причем оказывается, что на контакте имеет место соотношение

$$j_{1x}(x, 0) = -j_{2x}(x, 0), \quad -l < x < l \quad (2.19)$$

которое является следствием полной симметрии областей  $S^+$  и  $S^-$  в геометрическом отношении и в задании краевых условий.

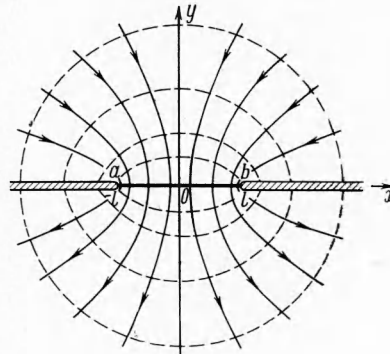
Проанализируем выражения для тока (2.9), (2.10) в следующих случаях.

(а) Пусть в двух средах эффект Холла не проявляется ( $\omega_1\tau_1 = \omega_2\tau_2 = 0$ ), а проводимость каждой из них имеет конечное значение  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Тогда из (2.9) — (2.10) следует

$$j_1(z) = \frac{I}{\pi \sqrt{z^2 - l^2}} \quad \text{при } z \in S^+ \quad (2.20)$$

$$j_{1y}(x, 0) = \frac{I}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}}, \quad j_{1x}(x, 0) = 0, \\ -l < x < l \quad (2.21)$$

На фиг. 2 изображена качественная картина распределения силовых (сплошные кривые) и потенциальных (пунктирные кривые) линий электрического тока, описываемая выражением (2.20). Отсутствие касательной компоненты тока на контакте объясняется симметрией распределения тока в двух средах относительно оси ординат. Зависимость (2.21) иллюстрируется кривой 1 на фиг. 3.



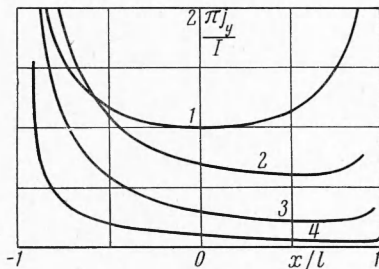
Фиг. 2

(б) Рассмотрим случай, когда только в среде, занимающей область  $S^+$ , проявляется эффект Холла ( $\omega_1\tau_1 \neq 0$ ,  $\omega_2\tau_2 = 0$ ), и по-прежнему проводимость двух сред конечна. Величины  $j_1(z)$ ,  $j_{1y}(x, 0)$  и  $j_{1x}(x, 0)$  в  $S^+$  определяются теперь формулами

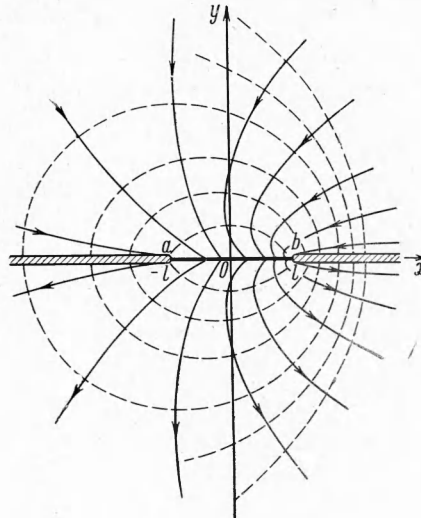
$$j_1(z) = \frac{I}{\pi} (z+l)^{-1/2-\varepsilon_1} (z-l)^{-1/2+\varepsilon_1} \quad \text{при } z \in S^+ \\ j_{1y}(x, 0) = \frac{1}{\pi} I (l+x)^{-1/2-\varepsilon_1} (l-x)^{-1/2+\varepsilon_1} \left(1 + \frac{\sigma_2^2 \omega_1^2 \tau_1^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}\right)^{-1/2}, \quad -l < x < l \\ j_{1x}(x, 0) = \frac{-\sigma_2 \omega_1 \tau_1 I}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} (l+x)^{-1/2-\varepsilon_1} (l-x)^{-1/2+\varepsilon_1} \left(1 + \frac{\sigma_2^2 \omega_1^2 \tau_1^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}\right)^{-1/2}, \quad -l < x < l \quad (2.22) \\ \left(\varepsilon_1 = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{-\sigma_2 \omega_1 \tau_1}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad 0 \leq |\varepsilon| < \frac{1}{2}\right)$$

Качественная картина распределения тока, получаемая из (2.22), и аналогичных формул для области  $S^-$  приведена на фиг. 4. Влияние эффекта Холла проявляется в искривлении линий тока на отрезке  $ab$  и в увеличении их плотности возле одного из концов контакта. Концентрация тока возле этого конца возрастает по мере увеличения параметра  $\omega_1\tau_1$ .

На фиг. 3 приведены кривые 2, 3 и 4, характеризующие распределение нормальной плотности тока на отрезке  $ab$ , соответственно для трех значений безразмерного параметра  $\sigma_2 \omega_1 \tau_1 / (\sigma_1 + \sigma_2) = 1, 3$  и 10 (концентрация тока возле конца контакта  $a$ ).



Фиг. 3



Фиг. 4

При фиксированном значении параметра  $\omega_1\tau_1$  концентрацию тока на контакте можно ослабить путем уменьшения проводимости среды, занимающей область  $S^-$ .

(в) В общем случае, когда эффект Холла существует в двух средах, качественная картина распределения тока совпадает с той, которая приведена на фиг. 4, и спра-

