ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ХОПФА

В. Л. Катков *(Новосибирск)*

Приведена групповая классификация решений уравнения Хопфа в зависимости от вида коэффициента «вязкости», а также различные решения этого уравнения.

Задача состоит в отыскании основной группы преобразований, допускаемой уравнением

$$u_t + uu_x = (\varepsilon u_x)_x \tag{1}$$

и расширении ее за счет выбора частных видов функции $\varepsilon(u)$, где приведены примеры групповой классификации уравнений нелинейной теплопроводности, адиабатических движений газа и др.

Уравнение (1) допускает преобразование переноса $u' = u + a$, $x' = at + x$, $t' = t$ и растяжения $u' = u / b$, $x' = bx$, $t' = b^2 t$, так что по u допустимое любое линейное преобразование $u_1 = pu + q$. Отнесенное к функции $\varepsilon(u)$ это преобразование будет таким: $\varepsilon_1(u) = \varepsilon(pu + q)$. Два уравнения вида (1) будем называть эквивалентными, если одно из них переходит в другое после преобразования галилеева переноса и растяжения.

Вычисление основной группы, допускаемой системой уравнений, описано в [1]; здесь приведен окончательный результат — базисные операторы соответствующей алгебры Ли.

Таблица

$\varepsilon = \varepsilon(u)$	X_1 X_2	$u = U(x)$ $u = U(t)$
$\varepsilon = e^u$	X_1, X_2 X_3^1	$u = \ln t + U(\lambda), \quad \lambda = x/t - \ln t$
$\varepsilon = u^{2m}$	$m = 1/2$ X_2 $X_1 + X_2$ $X_2 + X_3^2$ $m = 1$ $X_1, \quad X_1 + X_2$ $X_1 + X_3^2$ m — любое $X_2, \quad X_1 + X_2$ X_3^2	$u = U(x - t)$ $u = t^{-1} U(\lambda), \ \lambda = x + \ln t$ $u = e^t U(\lambda), \quad \lambda = x e^{-t}$ $u = t^{\frac{1}{2(m-1)}} U(\lambda), \quad \lambda = x t^{-\frac{2m-1}{2(m-1)}}$
$\varepsilon = 1$	$X_1, \ X_2$ X_4 $X_1 + X_3^3$ $X_4 + X_5$ $\alpha X_1 + \beta X_2 + X_5$	$u = t^{-1/2} U(\lambda), \ \lambda = x t^{-1/2}$ $u = t + U(\lambda), \ \lambda = x - 1/2\, t^2$ $u = x(t+2)^{-1} + 1/x\ U(\lambda), \ \lambda = x[t(t+2)]^{-1/2}$ $\alpha \neq 0$ (можно взять $\alpha = 1$) $u = \beta + (t^2+1)^{-1/2}[\lambda t + U(\lambda)]$ $\lambda \neq (x - \beta t)(t^2+1)^{-1/2}$ $\alpha = 0, u = \beta t^{-2} + \lambda + t^{-1} U(\lambda), \lambda = x/t + \beta t^{-2}$

1°. Пусть $\varepsilon(u)$ — произвольная функция. Уравнение (1) допускает лишь два оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

2°. Если же $\varepsilon(u) = e^u$, то уравнение (1) допускает более широкую группу; к операторам (2) добавляется

$$X_3^1 = t\frac{\partial}{\partial t} + (x + t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$$

3°. При $\varepsilon(u) = u^{2m}$ основная группа будет порождаться тоже тремя операторами, но вместо X^1 будем иметь

$$X_3^2 = 2(m-1)\,t\frac{\partial}{\partial t} + (2m-1)\,x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$$

4°. $\varepsilon(u) = 1$. В этом случае к операторам (2) добавляются сразу три новых

$$X_3{}^3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + (x - ut)\frac{\partial}{\partial u}$$

5°. Если $\varepsilon = 0$, то алгебра Ли оказывается бесконечномерной: уравнение (1) допускает любой оператор вида

$$X = \psi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + [u\psi + tf(u, x - ut) + \varphi(u, x - ut)]\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольными функциями f, φ, ψ.

Для построения инвариантных решений на указанных группах необходимо знать оптимальные системы каждой группы, т. е. ограничиться построением лишь существенно различных решений [1]. Опуская выкладки, приводим результат — оптимальные системы каждой группы и вид решения (см. таблицу, в которой указаны операторы подгрупп и вид решения).

Л. В. Овсянниковым было отмечено, что решение задачи групповой классификации для уравнения или равносильной ему системы уравнений первого порядка может привести к различным результатам. В рассматриваемом случае классификация была выполнена двумя способами: для уравнения (1) и для равносильной системы из двух уравнений первого порядка. Результат оказался одинаковым.

Поступила 25 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЕ

Л. М. Симуни (Ленинград)

Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской прямоугольной яме, вызванное движением плоскости (фиг. 1). Система уравнений Навье — Стокса введением функции тока сводится обычным образом к уравнению

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\right) = \Delta(\Delta\psi) \qquad \left(u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{1}$$

Здесь u, v — безразмерные составляющие скорости, x, y, t — безразмерные аргументы, R — число Рейнольдса.

Предположим, что плоскость AH движется по закону

$$u = 1 - e^{-k_1 t} \quad (k_1 = \mathrm{const})$$

Размерные скорости v_ξ, v_η и аргументы τ, ξ, η связаны с безразмерными равенствами

$$u = \frac{v_\xi}{U}, \quad v = \frac{v_\eta}{U}, \quad y = \frac{\eta}{h}, \quad x = \frac{\xi}{h}, \quad t = \frac{\tau\nu}{h^2} \qquad (U = \mathrm{const})$$

Уравнение (1) решаем с граничными и начальными условиями

$$\psi = {}^1/_2(1 - e^{-k_1 t}) \text{ на } BCDEFG$$

$$\partial\psi / \partial y = 0 \text{ на } BC, DE \text{ и } FG \qquad \partial\psi / \partial x = 0 \text{ на } AB, CD, EF \text{ и } GI$$

$$\psi = {}^1/_2(1 - e^{-k_1 t})\, y^2 \text{ на } AB \text{ и } GH \qquad \psi = 0,\ \partial\psi / \partial y = 1 - e^{-k_1 t} \text{ на } AH$$

$$\psi = 0 \text{ при } t = 0$$

Таким образом, предполагаем, что

$$u = (1 - e^{-k_1 t})\, y, \; v = 0 \text{ на линиях } AB \text{ и } GH$$

Уравнение (1) сводим к системе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + R\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \Delta\varphi, \qquad \Delta\psi = \varphi \tag{2}$$

Заменим производные в системе (2) конечно-разностными отношениями. Вводим производственно-временную сетку (t_n, x_i, y_k), где $t_n = n\Delta t$, $x_i = i\Delta x$, $y_k = k\Delta y$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots, I;\ k = 0, 1, 2, \ldots, K)$.