Толщина образца меди ∅50мм, мм	Измеренный радиус r, м	tg α	Скорость звука c, км/с	Средняя скорость звука, км/с	Скорость звука по [1], км/с
13,98	16,40	0,616	5,39		
14,00	16,30	0,621	5,41		
13,97	16,37	0,618	5,40	5,36+0,05	5,30
13,96	16,55	0,606	5,37		
13,95	16,73	0,593	5,32		
13,98	16,92	0,578	5,28		

веден результат из работы [1], который хорошо согласуется с нашим результатом.

Из приведенного примера видно, что предлагаемый метод успешно может быть применен в исследованиях свойств веществ при высоких давлениях. Применение предложенного метода создает возможность для определения углов разгрузки в волнах сложной формы и для установления профиля волны.

Поступила 1 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Бражник М. И., Владимиров Л. А., Сперанская М. П., Фунтиков А. И.** Изэнтропическая сжимаемость алюминия, меди, свинца и железа при высоких давлениях.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 4.
2. **Говорков В. А.** Электрические и магнитные поля. М., Госэнергоиздат, 1960.
3. **Бриш А. А., Тарасов М. С., Цукерман В. А.** Электропроводность продуктов взрыва конденсированных взрывчатых веществ.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 6.
4. **Альтшулер Л. В., Кормер С. В., Баканова А. А., Трунин Р. Ф.** Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 3.

УДК 533.21

АСИМПТОТИКА ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЦЕНТРА ПРИ СХЛОПЫВАНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Я. М. Каждан

(*Москва*)

1. В работах [1, 2] рассмотрена задача о схлопывании сферической полости и приведен предельный режим для течения газа вне полости в окрестности центра при стремлении радиуса полости $R \to 0$*. Уравнение состояния газа в обычных обозначениях имеет вид

$$p = \rho_0 \frac{c_0^2}{\varkappa} (\delta^\varkappa S - 1), \tag{1.1}$$

где p — давление; ρ — плотность; $\delta = \rho/\rho_0$; c — скорость звука; S — энтропийная величина; индекс 0 соответствует невозмущенному состоянию. Течение до момента схлопывания в рассматриваемом приближении

* Все персональные ссылки, связанные с автомодельным решением соответствующей задачи, приведены в работе [1].

предполагалось изэнтропическим $S = S_0$. Границе полости соответствовало нулевое давление и, следовательно, постоянные, отличные от нуля, удельная плотность $\delta = \delta_0$ и скорость звука $c_0/\sqrt{\delta_0}$, причем $\delta_0^{\varkappa} S_0 = 1$. Не нарушая общности, можно считать, что $S_0 = \delta_0 = 1$ и соответственно скорость звука на свободной границе равна c_0, ибо уравнения газодинамики совместно с уравнением состояния (1.1) инвариантны относительно преобразования подобия:

$$r = r_0 r,\ t = t_0 t,\ u = u_0 u,\ \delta = \delta_0 \delta,\ S = S_0 S,$$

где

$$u_0 = r_0/t_0;\ S_0 \delta_0^{\varkappa} = 1;\ u_0 = 1/\sqrt{\delta_0}.$$

Из опыта и численных расчетов хорошо известно, что при стремлении $R \to 0$ в окрестности центра возникают большие плотности и соответственно давления. Поэтому при получении главного члена асимптотики течения при $R \to 0$ уравнение состояния (1.1) было заменено уравнением состояния политропического газа

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \delta^{\varkappa} S}{\varkappa}. \tag{1.2}$$

Предполагалось, что искомый предельный режим не зависит от начальных данных. В такой постановке задача свелась к нахождению автомодельного решения уравнений газодинамики, соответствующих сферической симметрии, удовлетворяющего граничным условиям на свободной поверхности:

$$p = 0, \quad \frac{dR}{dt} = u, \tag{1.3}$$

где u — скорость; t — время, отсчитываемое от момента схлопывания.

В силу уравнения (1.2) нулевому давлению соответствуют нулевая плотность и, следовательно, нулевая скорость звука. Таким образом, скорость звука на свободной границе в найденном автомодельном решении, являющемся главным членом асимптотики в окрестности центра при $R \to 0$, отличалась на конечную постоянную величину c_0, фигурирующую в исходной постановке задачи.

В предлагаемой работе выписывается второй член асимптотики в окрестности центра при $R \to 0$. Сумма первых двух членов асимптотики оказывается достаточной, чтобы получить заданную скорость звука c_0 на скорректированной вторым членом асимптотики свободной границе, при $R \to 0$. При этом, как и ранее, течение при схлопывании предполагается изэнтропическим.

2. В силу изэнтропичности течения при уравнении состояния (1.1) или (1.2) уравнения газодинамики, соответствующие сферической симметрии, могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \alpha \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2r}, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} + \beta \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2r},$$

где A и B — римановы инварианты; α и β — наклоны характеристик

$$A = u + \frac{2}{\varkappa - 1} c, \qquad B = u - \frac{2}{\varkappa - 1} c. \tag{2.1}$$

Асимптотику течения при $R \to 0$ ищем в виде

$$A = \frac{r}{kt}\left[a_0(\xi) + r^{\nu} a_1(\xi)\right], \qquad B = \frac{r}{kt}\left[b_0(\xi) + r^{\nu} b_1(\xi)\right], \tag{2.2}$$

где

$$\xi = \xi_0 t r^{-k}. \tag{2.3}$$

В автомодельном течении свободной поверхности соответствует линия $\xi = \mathrm{const} = 1$, этого можно добиться, подобрав соответствующим образом постоянную ξ_0.

В предлагаемом приближении уравнение свободной границы представляется в виде

$$\xi = 1 + gR^{\nu_1}. \tag{2.4}$$

Из условий (1.3) в силу (1.1) условия на свободной границе переписываются в виде

$$\frac{\varkappa-1}{4}\frac{R}{kt}\{a_0(\xi) - b_0(\xi) + R^{\nu}[a_1(\xi) - b_1(\xi)]\} \to c_0, \tag{2.5}$$

$$\frac{R}{kt}\left(1 - \frac{\nu_1}{k} gR^{\nu_1}\right) \approx \frac{R}{2kt}\{a_0(\xi) + b_0(\xi) + R^{\nu}[a_1(\xi) + b_1(\xi)]\}$$

при $R \to 0$.

3. Функции $a_0(\xi)$ и $b_0(\xi)$ — главные члены асимптотики, соответствующие автомодельному течению, определяются системой обыкновенных уравнений

$$k\xi\frac{da_0}{d\xi} = \frac{2(h-1)ka_0 - (h+1)a_0^2 - (h-2)a_0b_0 + b_0^2}{2(h-1) - ha_0 - (h-2)b_0},$$

$$k\xi\frac{db_0}{d\xi} = \frac{2(h-1)kb_0 - (h+1)b_0^2 - (h-2)a_0b_0 + a_0^2}{2(h-1) - hb_0 - (h-2)a_0} \quad \left(h = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right). \tag{3.1}$$

Граничные условия ставятся на свободной поверхности, которой соответствует линия $\xi = 1$, и на линии $\xi = 0$, соответствующей фокусировочному разрезу.

Как уже отмечалось, в автомодельном решении скорость звука на свободной границе равна нулю. Поэтому из (1.3), (2.1) и (2.2) следует, что при $\xi = 1$

$$a_0(1) = b_0(1) = 1, \tag{3.2}$$

а из условия конечности функций на фокусировочном разрезе следует, что при $\xi = 0$

$$a_0(0) = b_0(0) = 0. \tag{3.3}$$

Как известно [1], показатель k в представлении (2.4) не может быть определен из соображений размерности, а находится из условия существования решения системы (3.1), удовлетворяющего граничным условиям (3.2), (3.3). При этом искомая интегральная кривая должна пройти через особую точку системы (3.1)

$$\xi = \xi_1 \quad (0 < \xi_1 < 1), \quad a_0(\xi_1) = \frac{2(h-1) - hb_0(\xi_1)}{h-2}, \tag{3.4}$$

$$b_0(\xi_1) = \frac{1}{4}\left[-(h-2)^2(k-1) + 2h - \sqrt{[(h-2)^2(k-1) - 2h]^2 - 16(h-1)}\right].$$

Для значений показателя политропы $\varkappa$, принадлежащего интервалу $0 < \varkappa < 8{,}47$, характер особенности этой точки типа узла. Поэтому для этих значений $\varkappa$ оказалось, что возможные значения k заполняют целый интервал, концы которого определяются показателем политропы $\varkappa$. Однако почти всем им соответствуют решения, терпящие слабый разрыв на линии $\xi = \xi_1$, соответствующей характеристике, приходящей в центр в момент схлопывания. Ввиду того, что слабый разрыв на указанной характеристике не соответствует физической постановке задачи, в качестве искомых значений показателя автомодельности k принимаются «аналитические» показатели, т. е. те, которым соответствуют аналитические решения. Однако оказывается, что это требование не обеспечивает единственности решения — «аналитических» показателей существует дискретное множество [1].

В дальнейшем величина k соответствует какому-нибудь фиксированному «аналитическому» показателю автомодельности при данном показателе политропы $\varkappa$.

Из уравнений (3.1) и условия (3.2) можно получить асимптотику функций $a_0(\xi)$ и $b_0(\xi)$ при $\xi \to 1$

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} a_0(\xi) &\approx 1 - \sqrt{\frac{2(h-1)(k-1)(1-\xi)}{k}} + \frac{2}{h+1}\,\frac{(h-1)k-(h+2)}{k}(1-\xi),\\ b_0(\xi) &\approx 1 + \sqrt{\frac{2(h-1)(k-1)(1-\xi)}{k}} + \frac{2}{h+1}\,\frac{(h-1)k-(h+2)}{k}(1-\xi) \end{aligned}$$

и при $\xi \to 0$

$$(3.6)\qquad a_0(\xi) \approx R_0\xi,\quad b_0(\xi) \approx Q_0\xi.$$

4. Функции $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$ определяются уравнениями

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &a_1'\xi\left(1 - \frac{\varkappa+1}{4}a_0 - \frac{3-\varkappa}{4}b_0\right) - a_1\left[1 - \frac{\varkappa+1}{4}\left(\frac{1}{k}a_0 - a_0'\xi\right) - \right.\\ &\left. - \frac{1+\nu}{k}\left(\frac{\varkappa+1}{4}a_0 + \frac{3-\varkappa}{4}b_0\right) - \frac{\varkappa-1}{2k}a_0\right] + b_1\left[\frac{3-\varkappa}{4}\left(\frac{a_0}{k} - a_0'\xi\right) - \right.\\ &\left. - \frac{\varkappa-1}{2k}b_0\right] = 0,\\ &b_1'\xi\left(1 - \frac{\varkappa+1}{4}b_0 - \frac{3-\varkappa}{4}a_0\right) - b_1\left[1 - \frac{\varkappa+1}{4}\left(\frac{1}{k}b_0 - b_0'\xi\right) - \right.\\ &\left. - \frac{1+\nu}{k}\left(\frac{\varkappa+1}{4}b_0 + \frac{3-\varkappa}{4}a_0\right) - \frac{\varkappa-1}{2k}b_0\right] + a_1\left[\frac{3-\varkappa}{4}\left(\frac{b_0}{k} - b_0'\xi\right) - \right.\\ &\left. - \frac{\varkappa-1}{2k}a_0\right] = 0. \end{aligned}$$

Значения $\xi = 1$, $\xi = \xi_1$ и $\xi = 0$ будут особыми для этой системы. Для получения асимптотик функций $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$ в окрестности этих значений коэффициенты при этих функциях и их производных в системе (4.1) заменяются их разложениями в окрестности этих значений.

Если в окрестности значения $\xi = 1$, используя асимптотику (3.5), заменить соответствующие коэффициенты системы (4.1) первыми членами их разложений в этой окрестности, то соответствующие уравнения имеют вид

$$(4.2)\qquad \frac{\varkappa-1}{2}(1-\xi)\,a_1' = \frac{\varkappa+1}{8}a_1 + \frac{3-\varkappa}{8}b_1,\quad \frac{\varkappa-1}{2}(1-\xi)\,b_1' = \frac{3-\varkappa}{8}a_1 + \frac{\varkappa+1}{8}b_1,$$

откуда

$$\frac{db_1}{da_1} = \frac{(\varkappa+1)\,b_1 + (3-\varkappa)\,a_1}{(3-\varkappa)\,b_1 + (\varkappa+1)\,a_1}.$$

Общим решением этого уравнения будет

$$(4.3)\qquad b_1 - a_1 = C(b_1 + a_1)^{(\varkappa-1)/2}.$$

Система (4.2) не обладает ограниченным решением при $\xi = 1$, кроме тривиального $a_1 \equiv b_1 \equiv 0$. Действительно, для ограниченности решения при $\xi = 1$ необходимо, чтобы $a(1) = b(1) = 0$. Подставляя, согласно решению (4.3), в систему (4.2) $b_1 \approx a_1$ или $b_1 \approx -a_1$, получаем в первом случае

$$a_1 \approx C(1-\xi)^{-1/(\varkappa-1)},\ b_1 \approx C(1-\xi)^{-1/(\varkappa-1)},$$

а во втором

$$a_1 \approx D(1-\xi)^{-1/2},\ b_1 \approx -D(1-\xi)^{-1/2}.$$

При $\varkappa = 3$ возможны следующие асимптотики:

$$a_1 \approx C_1(1-\xi)^{-1/2},\ b_1 \approx C_2(1-\xi)^{-1/2},$$

где, вообще говоря, $C_1 \neq C_2$. В результате учета последующих членов разложений коэффициентов системы (4.1) асимптотика общего решения этой системы в окрестности значения $\xi = 1$ выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
a_1 \approx M(1-\xi)^{-1/(\varkappa-1)} + K(1-\xi)^{(\varkappa-3)/2(\varkappa-1)} + \ldots \\
\ldots + N(1-\xi)^{-1/2}, \\
b_1 \approx M(1-\xi)^{-1/(\varkappa-1)} - K(1-\xi)^{(\varkappa-3)/2(\varkappa-1)} + \ldots \\
\ldots - N(1-\xi)^{-1/2} \text{ при } \varkappa \neq 3, \\
a_1 \approx M_1(1-\xi)^{-1/2},\ b_1 \approx M_2(1-\xi)^{-1/2} \text{ при } \varkappa = 3,
\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $K = \dfrac{2M}{2-\varkappa}\left[\dfrac{2-\varkappa}{\varkappa}\dfrac{(h-1)k-(h+2)}{k} + 1 - \dfrac{\nu+2}{k}\right]$; M, N, M_1, M_2 — произвольные постоянные. При $\xi = \xi_1$ коэффициент при $b_1'\xi$ обращается в нуль. Так как функции $a_0(\xi)$ и $b_0(\xi)$ аналитичны в окрестности значения $\xi = \xi_1$, то в результате замены коэффициентов системы (4.1) первыми членами их разложений в окрестности ξ_1 получаются уравнения

$$a_1' \approx a_1B + b_1D, \qquad b_1' \approx \frac{a_1A + b_1C}{\xi - \xi_1},$$

где A, B, C, D — постоянные, определенные автомодельным решением. Решение системы (4.1), ограниченное в окрестности линии $\xi = \xi_1$, существует при условии

$$a_1(\xi_1)A + b_1(\xi_1)C = 0. \tag{4.5}$$

Из точки ξ_1, $a_1(\xi_1)$, $b_1(\xi_1)$ выходят две аналитические интегральные кривые системы (4.1). Одна соответствует решению $\xi = \xi_1$ и лежит в плоскости a_1b_1 и вторая — кривая L, которая при $\xi \to 1$ стремится к бесконечности, согласно асимптотике (4.4). В силу линейности и однородности системы (4.1) две интегральные кривые, соответствующие разным решениям уравнения (4.5), отличаются постоянным множителем.

При $\xi = 0$, согласно (3.3), функции $a_0(\xi)$, $b_0(\xi)$ обращаются в нуль. Поэтому из системы (4.1) следует, что функции $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$ также обращаются в нуль при $\xi = 0$, согласно асимптотике:

$$a_1(\xi) \approx R_1\xi,\ b_1(\xi) \approx Q_1\xi, \tag{4.6}$$

где R_1 и Q_1 — постоянные величины.

5. Условия (2.5) на свободной границе, согласно полученным асимптотикам (3.4), (4.4), выглядят следующим образом:

$$\frac{\varkappa-1}{4k}R^{1-k}\xi_0\left\{-2\sqrt{\frac{2(h-1)(k-1)(1-\xi)}{k}} + \right.$$
$$\left. + R^{\nu}O\left[(1-\xi)^{\min\left(-\frac{1}{2},\,(\varkappa-3)/2(\varkappa-1)\right)}\right]\right\} \to c_0,$$

$$\frac{R}{kt}\left(1-\frac{\nu_1}{k}\,gR^{\nu_1}\right)\approx\frac{R}{kt}\left\{1+\frac{2}{h+1}\,\frac{(h-1)\,k-(h+2)}{k}\,(1-\xi)+\right.$$

$$\left.+\,M\,(1-\xi)^{-1/(\varkappa-1)}R^{\nu}\right\}\ \text{при}\ R\to 0$$

(при $\varkappa = 3$ $2M$ и $3N$ заменяются величинами $M_1 + M_2$, $M_1 - M_2$). С учетом уравнения свободной границы (2.4) эти условия будут выполнены тогда и только тогда, когда

$$\nu=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,\nu_1.$$

Так как при этом $\nu+\min\left(-\frac{\nu_1}{2},\ \frac{(\varkappa-3)\,\nu_1}{2\,(\varkappa-1)}\right)>\frac{\nu_1}{2}$, то

(5.1) $$-\frac{(\varkappa-1)\,\xi_0}{2\varkappa}\sqrt{\frac{-2\,(h-1)\,(k-1)}{k}}\,g=c_0,\quad \nu_1=2\,(k-1);$$

(5.2) $$\left\{\frac{\nu_1}{k}+\frac{2}{(h+1)\,k}\,[(h-1)\,k-(h+2)]\right\}g+M\,(-g)^{-1/(\varkappa-1)}=0.$$

Постоянные g_0 и M_0, удовлетворяющие уравнениям (5.1), (5.2), определяют искомое решение $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$. Действительно, при $\xi\to 1$ асимптотика интегральной кривой системы (4.1), выходящей из точки ξ_1, $a_1(\xi_1)$, $b_1(\xi_1)$, где $a_1(\xi_1)$ и $b_1(\xi_1)$ — любые значения, удовлетворяющие условию (4.5), определяется формулами (4.4). Искомое решение получается в результате умножения значений $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$ на постоянный множитель M_0/M_1 при $\varkappa \neq 3$ и $2M_0/M_1 + M_2$ при $\varkappa = 3$, что возможно ввиду однородности и линейности системы (4.1). Полученное решение может быть продолжено на интервал $\xi_1 > \xi > 0$, причем при $\xi \to 0$ функции $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$ обращаются в нуль, согласно асимптотике (4.6).

6. При построении автомодельного решения, соответствующего течению после момента схлопывания, следует иметь в виду, что при $t > 0$ автомодельное решение не может быть непрерывным образом продолжено на всю окрестность центра. Возникает отраженная ударная волна, идущая из центра, которой в силу автомодельности соответствует линия $\xi = \xi_в = \text{const}$. Поэтому скорость ударной волны D определяется формулой

$$D = r/kt.$$

Скорость и скорость звука в автомодельном течении, согласно (2.2), представляются в виде

$$u=\frac{r}{kt}\,\frac{a_0(\xi)+b_0(\xi)}{2}=\frac{r}{kt}\,U_0(\xi),\quad c=\frac{r}{kt}\,\frac{a_0(\xi)-b_0(\xi)}{2\,(h-1)}=\frac{r}{kt}\,C_0(\xi).$$

Из условия на фронте ударной волны

$$\frac{\rho_{01}}{\rho_{00}}=\frac{D-U_{00}}{D-U_{01}}=\frac{1-U_{00}(\xi_в)}{1-U_{01}(\xi_в)}$$

(второй индекс 0 соответствует значению функции перед фронтом, а 1 — за фронтом) следует, что на фронте отношение плотностей постоянно. Так как перед фронтом скорость звука отлична от нуля, то будет также постоянным отношение скоростей звука. В силу уравнения состояния (1.2) будет постоянным также и отношение энтропийных величин. Энтропия перед фронтом была постоянной, следовательно, в автомодельном течении она будет постоянной и за фронтом ударной волны.

Уравнения для функций $U_0(\xi)$ и $C_0(\xi)$ следуют из системы (3.1)

(6.1)
$$\frac{dU_0}{dC_0} = (h-1)\frac{C_0\left[(h-1)C_0(k-U_0) - 3C_0U_0\right] - (1-U_0)\left[U_0^2 + (h-1)C_0^2 - kU_0\right]}{C_0\left\{(1-U_0)\left[(h-1)(k-U_0) - 3U_0\right] - \left[U_0(U_0-k) + (h-1)C_0^2\right]\right\}},$$
$$\frac{d\xi}{dC_0} = \frac{k\xi}{C_0}\frac{\left[C_0 dU_0/dC_0 - (h-1)(1-U_0)\right]}{\left[3U_0 - (h-1)(k-U_0)\right]},$$

а условия на фронте ударной волны имеют вид

(6.2)
$$\frac{1-U_{00}(\xi_{\text{в}})}{1-U_{01}(\xi_{\text{в}})} = \frac{C_{00}^2(\xi_{\text{в}}) + \varkappa\left[1-U_{00}(\xi_{\text{в}})\right]^2}{C_{01}^2(\xi_{\text{в}}) + \varkappa\left[1-U_{01}(\xi_{\text{в}})\right]^2} =$$
$$= \frac{(\varkappa+1)\left[1-U_{00}(\xi_{\text{в}})\right]C_{01}^2(\xi_{\text{в}}) + (\varkappa-1)\left[1-U_{01}(\xi_{\text{в}})\right]C_{00}^2(\xi_{\text{в}})}{(\varkappa-1)\left[1-U_{00}(\xi_{\text{в}})\right]C_{01}^2(\xi_{\text{в}}) + (\varkappa+1)\left[1-U_{01}(\xi_{\text{в}})\right]C_{00}^2(\xi_{\text{в}})}.$$

Центру $r = 0$, $t > 0$ соответствует линия $\xi = -\infty$. Так как скорость в центре равна нулю, а скорость звука конечна, то $C_0(-\infty) > U_0(-\infty)$. Учитывая это, можно получить из системы (6.1) асимптотику функций при $\xi \to -\infty$

(6.3) $$U_0 \approx A_0 + A_1(-\xi)^{-2/k},\quad C_0 \approx F_0(-\xi)^{1/k} + F_1(-\xi)^{-1/k},$$

где $A_0 = \frac{1}{3}(h-1)(k-1)$; $A_1 = \frac{A_0(1-A_0)(k-A_0)}{5F_0^2}$, $F_1 = -\frac{A_0(A_0-k)}{2(h-1)F_0}$.

Постоянная F_0 определится в результате склеивания решений перед фронтом ударной волны условиями (6.2). Нахождение фронта ударной волны осуществляется следующим образом. Определяются интегральные кривые первого уравнения системы (6.1): L_1, выходящая из точки $U_0 = C_0 = 0$ в сторону $C_0 > 0$ по направлению, определенному асимптотикой (3.6)

$$U_0 = C_0 = 0,\quad \frac{dU_0}{dC_0} = (h-1)\frac{R_0 + Q_0}{R_0 - Q_0},$$

и L_2, выходящая из точки $U_0 = (1/3)(h-1)(k-1)$, $C_0 = \infty$. По значениям величин на интегральной кривой L_1 строится, согласно уравнениям (6.2), кривая L_3 ($U_{01} = f(C_{01})$). Точка пересечения кривых L_2 и L_3 соответствует значениям функций $U_{01}(\xi_{\text{в}})$ и $C_{01}(\xi_{\text{в}})$ на фронте ударной волны. Квадратура, осуществляемая согласно второму уравнению системы (6.1), определяет значения величины $\xi_{\text{в}}$ и постоянной F_0 в асимптотике (6.3). Значение энтропийной величины S за фронтом ударной волны определяется формулой

$$S = S_{01} = \left(\frac{1-U_{01}}{1-U_{00}}\right)^{\varkappa-1}\frac{C_{01}^2}{C_{00}^2}S_{00}.$$

7. Второй член асимптотики при $t > 0$ может быть получен как непрерывное продолжение найденного в п. 5 решения лишь до значения $\xi = \xi_{\text{в}}$, соответствующего в автомодельном решении фронту отраженной ударной волны. С учетом второго члена асимптотики фронту отраженной ударной волны будет соответствовать линия

$$\xi = \xi_{\text{в}} + dr^{\nu}.$$

Течение за фронтом ударной волны в рассматриваемом приближении уже не будет изэнтропическим. Искомые функции (теперь их уже три: скорость

u, скорость звука c и энтропийная величина S) представляются в виде

$$u = \frac{r}{kt}\,[U_0(\xi) + r^{\nu} U_1(\xi)], \quad c = \frac{r}{kt}\,[C_0(\xi) + r^{\nu} C_1(\xi)], \tag{7.1}$$
$$S = S_0\,[1 + r^{\nu} S_1(\xi)/S_0].$$

Перед фронтом постоянная $S_0 = S_{00} = 1$, за фронтом

$$S_0 = S_{01} = \left[\frac{1 - U_{00}(\xi_{\text{в}})}{1 - U_{01}(\xi_{\text{в}})}\right]^{1-\varkappa} \frac{C_{01}^2(\xi_{\text{в}})}{C_{00}^2(\xi_{\text{в}})}\, S_{00}.$$

Уравнения для функций $U_1(\xi)$, $C_1(\xi)$ и $S_1(\xi)$ имеют вид

$$(1 - U_0)\, U_1'\xi - (h-1)\, C_0 C_1'\xi + \frac{h-1}{2\varkappa}\frac{C_0^2}{U_0}\, S_1'\xi + \frac{2+\nu}{k}\, U_0 U_1 +$$
$$+ (h-1)\left(\frac{2+\nu}{k} C_0 - C_0'\xi\right) C_1 - \left(U_0'\xi + 1\right) U_1 = 0, \tag{7.2}$$
$$C_0 U_1'\xi - (h-1)(1-U_0)\, C_1'\xi - \left[\frac{h+2+\nu(h-1)}{k}\, U_0 - (h-1) - U_0'\xi\right] C_1 -$$
$$- \left[\frac{h+2+\nu}{k}\, C_0 - (h-1)\, C_0'\xi\right] U_1 = 0,$$
$$S_1'\xi + \frac{\nu U_0}{(1-U_0)\,k}\, S_1 = 0.$$

Решения системы (7.2) должны удовлетворять требованию

$$\frac{r^{\nu} U_1(\xi)}{U_0(\xi)} \to 0, \quad \frac{r^{\nu} C_1(\xi)}{C_0(\xi)} \to 0, \quad \frac{r^{\nu} S_1(\xi)}{S_0(\xi)} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0,$$

$t \to 0$ и $-\infty < \xi < \xi_{\text{в}}$. Существуют два решения, удовлетворяющие этому требованию:

$$\{U_{1\text{а}}(\xi),\ C_{1\text{а}}(\xi),\ S_{1\text{а}}(\xi)\},\ \{U_{1\text{в}}(\xi),\ C_{1\text{в}}(\xi),\ S_{1\text{в}}(\xi)\}.$$

Первое из них с точностью до постоянного множителя выделяется асимптотикой при $\xi \to -\infty$

$$U_{1\text{а}}(\xi) \approx B_1(-\xi)^{\beta - 2/k}, \quad C_{1\text{а}} \approx B_2(-\xi)^{\beta + 1/k} + D_2(-\xi)^{\beta - 1/k}, \tag{7.3}$$
$$S_{1\text{а}} \approx B_3(-\xi)^{\beta} + D_3(-\xi)^{\beta - 2/k},$$

где $\beta = -\dfrac{\nu(h-1)(k-1)}{3-(h-1)(k-1)}$,

а постоянные B_i, D_i связаны следующими соотношениями:

$$B_2 = \frac{F_0}{2\varkappa}\, B_3,$$
$$D_2 = \frac{k\beta A_0(k-A_0)(k\beta-2) - 10k\beta F_0(2A_0F_1 - A_1F_0) - 10(2+\nu-k\beta)A_0^2F_0F_1}{10(2+\nu-k\beta)A_0^2F_0^2}\, B_2,$$
$$D_3 = \frac{k\beta(k-A_0)}{10F_0^2}\, B_3, \tag{7.4}$$
$$B_1 = \frac{[(h-1)(\nu-k\beta)+5]\,A_1B_2 - 2(h-1)(1-A_0)\,D_2}{(k\beta-\nu-5)\,F_0}.$$

Во втором решении функции $S_{1\text{в}}(\xi) \equiv 0$, а функции $U_{1\text{в}}(\xi)$ и $C_{1\text{в}}(\xi)$ при $\xi \to -\infty$ стремятся к бесконечности, согласно асимптотикам:

$$U_{1\text{в}}(\xi) \approx L_1(-\xi)^{\nu/k}, \quad C_{1\text{в}} \approx L_2(-\xi)^{(1+\nu)/k}. \tag{7.5}$$

Коэффициенты L_1 и L_2 связаны соотношением

$$L_1 = -\frac{(k-1)\,\nu}{3F_0} L_2. \tag{7.6}$$

Асимптотики и, следовательно, в силу линейности сами решения определены с точностью до постоянного множителя. Для определенности в формулах (7.3), (7.4) полагаем $B_3 = 1$, а в формулах (7.5), (7.6) — $L_2 = 1$. Искомое решение представляет собой линейную комбинацию решений системы (7.2), имеющих при $\xi \to -\infty$ асимптотики (7.3), (7.5):

$$\{U_1(\xi),\ C_1(\xi),\ S_1(\xi)\} = q_1\{U_{1\text{а}}(\xi),\ C_{1\text{а}}(\xi),\ S_{1\text{а}}(\xi)\} + q_2\{U_{1\text{в}}(\xi),\ C_{1\text{в}}(\xi),\ S_{1\text{в}}(\xi)\}.$$

Постоянные q_1, q_2 и d определяются условиями на фронте ударной волны. Так как скорость ударной волны в рассматриваемом приближении имеет вид

$$D = \frac{r}{kt}\left[1 - \frac{\nu d}{k\xi_\text{в}} r^\nu\right],$$

то соотношения между вторыми членами на фронте ударной волны представляются тремя уравнениями:

$$\frac{\left(\frac{\nu}{k\xi_\text{в}} + U'_{01}\right)d + U_{11}}{1 - U_{01}} - \frac{\left(\frac{\nu}{k\xi_\text{в}} + U'_{00}\right)d + U_{10}}{1 - U_{00}} =$$

$$= \frac{(\varkappa+1)\,\alpha + (\varkappa-1)\,\beta}{(\varkappa+1)\,C_{01}^2(1-U_{00}) + (\varkappa-1)\,C_{00}^2(1-U_{01})} - \frac{(\varkappa-1)\,\alpha + (\varkappa+1)\,\beta}{(\varkappa-1)\,C_{01}^2(1-U_{00}) + (\varkappa+1)\,C_{00}^2(1-U_{01})} =$$

$$= \frac{2C_{00}\left(C'_{00}d + C_{10}\right) + \varkappa\left\{(1-U_{00})\left[\left(U'_{01} - U'_{00}\right)d + U_{11} - U_{10}\right] - (U_{01} - U_{00})\left[\left(\frac{\nu}{k\xi_\text{в}} + U'_{00}\right)d + U_{10}\right]\right\}}{C_{00}^2 + \varkappa(1-U_{00})(U_{01} - U_{00})} - 2\left(\frac{C'_{01}d + C_{11}}{C_{01}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varkappa - 1}\left[2\left(\frac{C'_{01}d + C_{11}}{C_{01}} - \frac{C'_{00}d + C_{10}}{C_{00}}\right) - \frac{S_{11}}{S_{01}}\right],$$

$$\alpha = 2\left(C'_{01}d + C_{11}\right)(1 - U_{00}) - C_{01}^2\left[\left(\frac{\nu}{k\xi_\text{в}} + U'_{00}\right)d + U_{10}\right],$$

$$\beta = 2\left(C'_{00}d + C_{10}\right)(1 - U_{01}) - C_{00}^2\left[\left(\frac{\nu}{k\xi_\text{в}} + U'_{01}\right)d + U_{11}\right],$$

где U_{00}, C_{00}, S_{00}, U_{10}, C_{10}, S_{10} — значения автомодельного решения и второго приближения перед фронтом ударной волны, а U_{01}, C_{01}, S_{01}, U_{11}, C_{11}, S_{11} — соответственно за фронтом ударной волны при $\xi = \xi_\text{в}$, штрих означает производную по ξ при $\xi = \xi_\text{в}$. В результате замены

$$U_{11} = q_1 U_{1\text{а}}(\xi_\text{в}) + q_2 U_{1\text{в}}(\xi_\text{в}), \quad C_{11} = q_1 C_{1\text{а}}(\xi_\text{в}) + q_2 C_{1\text{в}}(\xi_\text{в}),$$
$$S_{11} = q_1 S_{1\text{а}}(\xi_\text{в}) + q_2 S_{1\text{в}}(\xi_\text{в})$$

получается система линейных неоднородных уравнений с тремя неизвестными: q_1, q_2 и d. Коэффициенты этих уравнений суть гладкие функции показателя $\varkappa$ и показателя автомодельности k и могут быть получены лишь в результате численного интегрирования, поэтому следует ожидать, что в общем случае определитель системы отличен от нуля, что подтверждается численным счетом отдельных вариантов. Равенство нулю определителя системы если и происходит, то разве что при исключительных значениях $\varkappa$ и k. Определением q_1, q_2 и d полностью завершается постановка фронта ударной волны и нахождение газодинамических функций за ним во втором приближении.

Из асимптотических формул (7.3), (7.5) и представления функций следует, что значения добавок для скорости и энтропийной величины в центре ($r = 0$, $t \geqslant 0$) равны нулю.

А. Е. Луцкий произвел численный расчет второго члена асимптотики для значения показателя $\varkappa = 3$ ($k = 1{,}411332$, $\nu = 1{,}233996$, $\nu_1 = 0{,}822664$). В результате численного интегрирования получены значения постоянных коэффициентов для асимптотических формул (2.4), (2.2), (7.1), определяющих форму свободной границы, фронта ударной волны и значения газодинамических функций при $r \to 0$, $t \to 0$: уравнение свободной границы

$$t \approx \frac{1}{\xi_0} r^k \left[1 - 3{,}417 \frac{c_0^2}{\xi_0^2} r^{\nu_1}\right],$$

значения газодинамических функций на разрезе

$$u \approx \xi_0 r^{1-k} \left[0{,}5150 + 9{,}463 \frac{c_0^3}{\xi_0^3} r^{\nu}\right],$$

$$c \approx -\xi_0 r^{1-k} \left[0{,}5480 + 8{,}514 \frac{c_0^3}{\xi_0^3} r^{\nu}\right],$$

уравнение фронта ударной волны

$$t \approx \frac{1}{\xi_0} r^k \left[-0{,}6132 + 6{,}8502 \frac{c_0^3}{\xi_0^3} r^{\nu}\right],$$

значения газодинамических функций на фронте ударной волны

$$u \approx -\xi_0 r^{1-k} \left[0{,}1926 - 7{,}219 \frac{c_0^3}{\xi_0^3} r^{\nu}\right],$$

$$c \approx -\xi_0 r^{1-k} \left[1{,}371 + 40{,}01 \frac{c_0^3}{\xi_0^3} r^{\nu}\right], \quad S \approx 1{,}2049 + 5{,}1547 \frac{c_0^3}{\xi_0^3} r^{\nu}.$$

Автор выражает благодарность И. М. Гельфанду, по предложению которого выполнена эта работа, и А. Е. Луцкому за проведенные им трудоемкие расчеты.

Поступила 26 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. **Брушлинский К. В., Каждан Я. М.** Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.— УМН, 1963, т. XVIII, вып. 2 (110).
2. **Hunter G.** On the collapse of an empty cavity in water.— J. Fluid. Mech., 1960, vol. 8, N 2. Рус. пер. Сб. Механика, 1961, № 3 (67).