УДК 533.6.011.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ДВУХСВЯЗНОМ ОБЪЕМЕ С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ СТЕНКАМИ

А. М. Липанов, А. Н. Семакин

Институт прикладной механики УрО РАН, 426067 Ижевск
E-mail: arte-semaki@yandex.ru

Предложен численный метод расчета течения вязкого газа в исходной двухсвязной области, представляющий собой объем с отверстиями, в котором расположена сфера. Рассмотрены виды подобластей (конечных объемов), на которые можно разбить исходную область. Для каждого вида конечного объема указана криволинейная система координат. Приведены результаты расчетов течения при $\mathrm{Re} = 100$, 500 и $\mathrm{M} = 0{,}6$.

Ключевые слова: двухсвязная область, конечный объем, вязкий газ, система уравнений гидромеханики, криволинейная система координат.

Введение. Проблема расчета полей гидромеханических параметров для многосвязных областей имеет место при решении таких практически важных задач, как сушка зерна в гуртах потоком теплого воздуха, фильтрация вязкой жидкости через поры в горных породах, очистка загрязненных или газообразных сред методом фильтрации через слой частиц, находящихся в некотором объеме и т. д. Традиционно такие пространственные задачи решаются путем сведения многосвязной области к односвязной, введения коэффициента пористости, скорости фильтрации и т. д. [1]. В работе [2] предложен альтернативный подход, позволяющий рассчитывать поля гидромеханических параметров непосредственно для многосвязной области без дополнительных предположений и допущений. Настоящая работа посвящена реализации данного подхода применительно к двухсвязным областям.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объем Q с отверстиями, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с одним входом и двумя выходами. Вход расположен в центре передней грани, выходы — на вертикальной оси симметрии задней грани. Вход и оба выхода имеют форму круга. В данном объеме расположен шар, который может касаться каких-либо его стенок. На рис. 1 приведен пример рассматриваемой области, когда шар расположен в центре объема Q. Через входное отверстие поступает вязкий газ. Необходимо рассчитать параметры газа при прохождении им данного объема.

2. Конечные объемы. Введем глобальную декартову систему координат (X, Y, Z), в которой рассматривается вся исходная область, и разделим эту область на N_{fv} подобластей, или конечных объемов (КО). Формы всех КО можно свести к пяти стандартным видам: прямоугольный, сферический, пирамидальный, кольцевой и цилиндрический (рис. 2). Прямоугольный КО представляет собой прямоугольный параллелепипед. Сферический КО используется для выделения пространства в окрестности сферы вдали от боковых стенок объема Q. Одной из шести граней сферического объема является поверхность сферы. Пирамидальный КО имеет клинообразную форму и выделяет пространство вблизи точки касания сферы с одной из боковых сторон объема Q. У кольцевого КО одна грань является частью цилиндрической поверхности. Цилиндрический КО представляет собой цилиндр, используемый для описания входа и выходов.

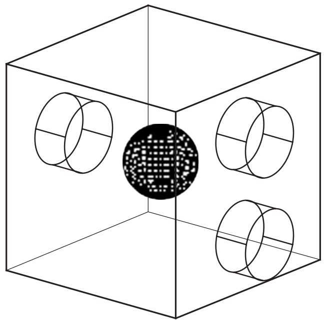

Рис. 1. Пример расчетной области

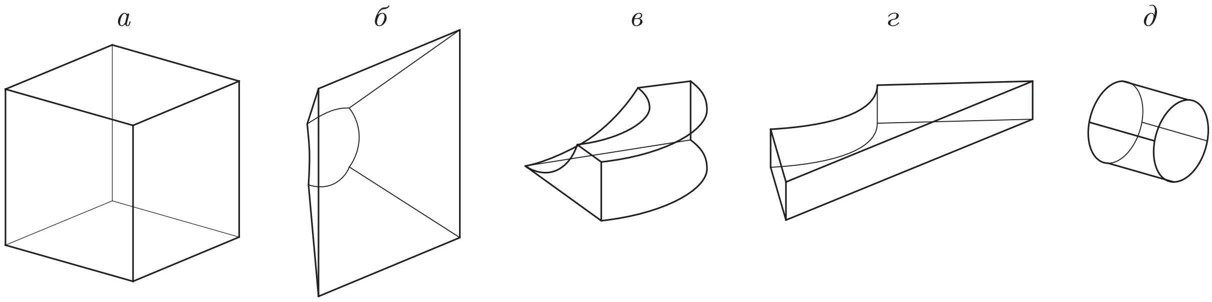

Рис. 2. Виды конечных объемов:
а — прямоугольный, *б* — сферический, *в* — пирамидальный, *г* — кольцевой, *д* — цилиндрический

В каждом КО введем локальную декартову систему координат (x, y, z), которая определяется заданием начала координат $O(a_0^1, a_0^2, a_0^3)$ и базисных векторов $\boldsymbol{i} = (a_1^1, a_1^2, a_1^3)$, $\boldsymbol{j} = (a_2^1, a_2^2, a_2^3)$, $\boldsymbol{k} = (a_3^1, a_3^2, a_3^3)$ в глобальной системе координат (X, Y, Z). Тогда локальные (x, y, z) и глобальные (X, Y, Z) координаты точки связаны соотношениями [3]

$$(x, y, z) \to (X, Y, Z): \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 x + \boldsymbol{a}_2 y + \boldsymbol{a}_3 z,$$
$$(X, Y, Z) \to (x, y, z): \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}^1 X + \boldsymbol{a}^2 Y + \boldsymbol{a}^3 Z - \boldsymbol{b},$$

где

$$\boldsymbol{R} = (X, Y, Z), \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z), \qquad \boldsymbol{a}_0 = (a_0^1, a_0^2, a_0^3),$$
$$\boldsymbol{a}_1 = (a_1^1, a_1^2, a_1^3), \qquad \boldsymbol{a}_2 = (a_2^1, a_2^2, a_2^3), \qquad \boldsymbol{a}_3 = (a_3^1, a_3^2, a_3^3),$$
$$\boldsymbol{a}^1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1), \qquad \boldsymbol{a}^2 = (a_1^2, a_2^2, a_3^2), \qquad \boldsymbol{a}^3 = (a_1^3, a_2^3, a_3^3),$$
$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_0).$$

Во всех видах КО, кроме прямоугольного, необходимо также ввести криволинейную систему координат (ξ, η, ζ), в которой данный КО можно представить в виде параллелепипеда. Согласно [4–6] определим формулы перехода к криволинейным координатам:

— для сферического КО

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \eta = -y/x, \qquad \zeta = -z/x, \tag{1}$$

где $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$; $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$;

— для пирамидального КО

$$\xi = (x^2 + y^2 + z^2)/\sqrt{x^2 + z^2}, \qquad \eta = 2y/(x^2 + y^2 + z^2), \qquad \zeta = -z/x, \tag{2}$$

где $0 \leqslant \eta \leqslant 1/r$; $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$; r — радиус сферы;

— для кольцевого КО

$$\xi = \sqrt{x^2 + z^2}, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = -z/x, \tag{3}$$

где $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$;

— для цилиндрического КО

$$\xi = x, \qquad \eta = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad \zeta = \operatorname{arctg}(z/y) + \pi k, \tag{4}$$

где $-\pi \leqslant \zeta \leqslant \pi$.

При построении разностных сеток производилось их сжатие (измельчение) к поверхности сферы, а также к передней и задней граням объема Q.

3. Система уравнений гидромеханики. Для каждого КО в его локальной декартовой системе координат запишем систему уравнений гидромеханики в безразмерной форме [7, 8]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(u\,\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\,\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\,\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\Big) + \frac{1}{2}\,\rho \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) = 0,\\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z}\Big) - \frac{1}{\rho \operatorname{Re}}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) = \\
= -\frac{1}{\rho k \mathrm{M}^2}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\,u \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) + \frac{1}{3\rho \operatorname{Re}}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\operatorname{div}(\boldsymbol{V}),\\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z}\Big) - \frac{1}{\rho \operatorname{Re}}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big) = \\
= -\frac{1}{\rho k \mathrm{M}^2}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2}\,v \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) + \frac{1}{3\rho \operatorname{Re}}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\operatorname{div}(\boldsymbol{V}), \qquad (5)\\
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\Big) - \frac{1}{\rho \operatorname{Re}}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) = \\
= -\frac{1}{\rho k \mathrm{M}^2}\,\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2}\,w \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) + \frac{1}{3\rho \operatorname{Re}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\operatorname{div}(\boldsymbol{V}),\\
\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} + w\,\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z}\Big) - \frac{k}{\rho \operatorname{Re} \operatorname{Pr}}\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big) = \\
= -\frac{k-1}{\rho}\,p \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) + \frac{1}{2}\,T \operatorname{div}(\boldsymbol{V}) + \frac{k(k-1)\,\mathrm{M}^2}{\rho \operatorname{Re}}\Big[2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 + \\
+ \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 - \frac{2}{3}\,(\operatorname{div}(\boldsymbol{V}))^2\Big].
\end{gathered}$$

Здесь $\boldsymbol{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости; p, ρ, T — давление, плотность и температура; Re — число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} = 1$ — число Прандтля; M — число Маха; $k = 1{,}4$ — отношение изобарной C_p и изохорной C_v теплоемкостей; $\operatorname{div}(\boldsymbol{V}) = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ — дивергенция скорости.

Система уравнений (5) замыкается безразмерным уравнением состояния

$$p = \rho T. \tag{6}$$

Способ обезразмеривания уравнений (5), (6) приведен в работе [9].

Для перехода к криволинейной системе координат в исходных уравнениях необходимо выполнить замену переменных. Например, первую производную по x заменим выражением

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \xi}\,\xi_x + \frac{\partial W}{\partial \eta}\,\eta_x + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\,\zeta_x.$$

Аналогичные выражения можно записать для производных по y и z. Сумма вторых производных заменяется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\,\nabla\xi\nabla\xi + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}\,\nabla\eta\nabla\eta + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2}\,\nabla\zeta\nabla\zeta + \\ + 2\,\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\,\partial \eta}\,\nabla\xi\nabla\eta + 2\,\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\,\partial \zeta}\,\nabla\xi\nabla\zeta + 2\,\frac{\partial^2 W}{\partial \eta\,\partial \zeta}\,\nabla\eta\nabla\zeta + \\ + \frac{\partial W}{\partial \xi}\,(\xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz}) + \frac{\partial W}{\partial \eta}\,(\eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz}) + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\,(\zeta_{xx} + \zeta_{yy} + \zeta_{zz}). \quad (7)$$

Здесь $\nabla\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$; $\nabla\eta = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$; $\nabla\zeta = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$; $\nabla\xi\nabla\eta$, $\nabla\xi\nabla\zeta$, $\nabla\eta\nabla\zeta$ — скалярные произведения векторов.

Подставляя выражения (7) в исходные уравнения, можно получить систему уравнений гидромеханики в криволинейных координатах. Значения производных ξ_x, η_x, ζ_x и т. д. вычисляются аналитически на основе преобразований координат (1)–(4) для различных видов КО.

4. Начальные и граничные условия. Для решения уравнений гидромеханики необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве начальных условий берутся следующие значения: $u = v = w = 0$, $p = \rho = T = 1$. Условия на границах многосвязной области ставятся согласно работам [2, 10]. В случае если какие-либо грани КО выходят на границу многосвязной области, для этих граней задается одно из указанных в [2, 10] граничных условий.

При вычислении частных производных по пространственным направлениям в узлах разностной сетки используется метод неопределенных коэффициентов, позволяющий рассчитывать эти производные с любым порядком точности. Согласно этому методу для определения производной в данной точке необходимо знать значения искомой функции в нескольких соседних узлах. Поэтому при расчете производных в точках, расположенных вблизи границы КО, необходимо “заходить” в соседние КО. Как правило, разностные сетки в двух смежных КО не согласованы, т. е. при “заходе” в соседний КО рассматриваемые точки могут не совпадать с расчетными точками разностной сетки этого КО. Поэтому для определения значения величин в нужных точках необходимо провести интерполяцию по известным значениям этих величин в расчетных точках соседнего КО.

5. Интерполяция. Неизвестное значение величины f в точке $\boldsymbol{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ определяется через известные значения этой величины в точках $\boldsymbol{x}^k = (x^k, y^k, z^k)$ $(k = \overline{1, N})$ с помощью отрезка ряда Фурье, построенного с использованием системы ортогональных многочленов [11]:

$$f(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{i+j+k=0}^{n} c_{ijk}\psi_{ijk}(\boldsymbol{x}^0), \qquad c_{ijk} = (\psi_{ijk}(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})).$$

Систему ортогональных многочленов $\psi_{ijk}(\boldsymbol{x})$ можно получить последовательно по формулам

$$\psi_{ijk}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{ijk}(\boldsymbol{x}) / \|\varphi_{ijk}(\boldsymbol{x})\|,$$

$$\varphi_{000} = 1, \qquad \varphi_{ijk}(\boldsymbol{x}) = x\psi_{i-1jk}(\boldsymbol{x}) + y\psi_{ij-1k}(\boldsymbol{x}) + z\psi_{ijk-1}(\boldsymbol{x}) + \sum_{M} \alpha_{mnl}\psi_{mnl}(\boldsymbol{x}),$$

$$\alpha_{mnl} = -(x\psi_{i-1jk}(\boldsymbol{x}) + y\psi_{ij-1k}(\boldsymbol{x}) + z\psi_{ijk-1}(\boldsymbol{x}), \psi_{mnl}(\boldsymbol{x})),$$

где M — множество созданных многочленов.

Скалярное произведение и норма в пространстве многочленов определяются следующим образом:

$$(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})) = \sum_{k=1}^{N} f(\boldsymbol{x}^k) g(\boldsymbol{x}^k), \qquad \|f(\boldsymbol{x})\| = \sqrt{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}))}.$$

При проведении вычислений полагалось $n = 2$, $N = 10$, что эквивалентно интерполяции полиномом второй степени. Точки $\boldsymbol{x}^k$ выбирались таким образом, чтобы выполнялось условие $\|\varphi_{ijk}(\boldsymbol{x})\| \geqslant 10^{-4}$ для всех $\varphi_{ijk}(\boldsymbol{x})$.

6. Численный метод решения уравнений гидромеханики. При интегрировании системы уравнений гидромеханики по времени использовался метод Рунге — Кутты второго порядка точности [11], при вычислении частных производных по пространственным переменным — центральная разностная схема произвольного порядка точности [9]. Для устранения нефизических осцилляций в разностную схему добавлялась искусственная диссипация [12].

После выполнения очередного шага по времени возникает необходимость передачи значений гидромеханических параметров (скорости, плотности и температуры) из одного КО в другой. Поскольку плотность и температура являются скалярными величинами, их значения не зависят от ориентации локальных систем координат различных КО. Однако при переходе из одной системы координат в другую компоненты вектора скорости меняются, поэтому при передаче значений компонент вектора скорости из одного КО в другой они сначала переводятся в глобальную систему координат по формулам [3]

$$U = a_1^1 u + a_2^1 v + a_3^1 w, \qquad V = a_1^2 u + a_2^2 v + a_3^2 w, \qquad W = a_1^3 u + a_2^3 v + a_3^3 w,$$

а затем из глобальной системы координат в локальную, но другого КО:

$$u = a_1^1 U + a_1^2 V + a_1^3 W, \qquad v = a_2^1 U + a_2^2 V + a_2^3 W, \qquad w = a_3^1 U + a_3^2 V + a_3^3 W.$$

Коэффициенты перехода a_i^j определены выше.

7. Результаты расчетов. В качестве тестовой задачи рассматривалась задача обтекания сферы. Расчетная область представляет собой шар радиусом 7,8, в который помещена сфера радиусом 0,5. Данная расчетная область делится на шесть сферических КО. В качестве критерия правильности расчетов использовался коэффициент сопротивления сферы C_x. При выбранном числе Маха набегающего потока $\mathrm{M} = 0{,}1$ результаты расчетов должны быть близки данным для несжимаемой жидкости [13]. Следовательно, значения C_x, полученные путем расчетов, можно сравнивать со стандартной зависимостью коэффициента сопротивления сферы несжимаемой жидкости от числа Рейнольдса, аппроксимируемой по формуле [14]

$$C_x = 24(1 + 0{,}25\sqrt{\mathrm{Re}} + 0{,}0117\,\mathrm{Re})/\,\mathrm{Re}, \qquad 1 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 1000. \tag{8}$$

В табл. 1 представлена зависимость коэффициента сопротивления сферы от количества расчетных узлов N_p и порядка точности разностной схемы по пространственным переменным N_c при $\mathrm{Re} = 100$. Из табл. 1 следует, что при расчете по разностной схеме шестого порядка точности значение C_x, полученное на наиболее грубой сетке, при дальнейшем увеличении числа узлов практически не меняется (изменения в третьем знаке после

Таблица 1

Зависимость коэффициента сопротивления сферы от количества расчетных узлов и порядка точности разностной схемы при $\mathrm{Re} = 100$

N_p	C_x		
	$N_c = 2$	$N_c = 4$	$N_c = 6$
$6 \times 30 \times 13 \times 13$	1,502	1,130	1,099
$6 \times 40 \times 17 \times 17$	1,320	1,114	1,098
$6 \times 50 \times 23 \times 23$	1,246	1,096	1,092

Таблица 2

Зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса при $N_p = 6 \times 30 \times 13 \times 13$ и шестом порядке точности

Re	C_x	C_x^t
50	1,582	1,609
100	1,099	1,121
250	0,723	0,756
500	0,601	0,597
1000	0,536	0,495

запятой обусловлены, скорее всего, погрешностями вычисления коэффициента сопротивления), т. е. для определения коэффициента сопротивления сферы в расчетах по схеме шестого порядка достаточно использовать наиболее грубую разностную сетку. В табл. 2 приведены результаты расчетов коэффициента сопротивления при различных значениях числа Рейнольдса на сетке $6 \times 30 \times 13 \times 13$ по схеме шестого порядка точности. Видно, что значения коэффициента сопротивления C_x, полученные в расчетах, хорошо согласуются со значениями коэффициента сопротивления C_x^t, полученными по аппроксимационной зависимости (8).

При $\mathrm{Re} = 50$, 100, 250 были измерены длина отрывной зоны за сферой (0,4, 0,8, 1,1 соответственно) и угол отрыва потока (41°, 52°, 65° соответственно). Полученные результаты согласуются с данными работы [14].

Далее сфера помещалась в объем с одним входом и двумя выходами (длина, высота и ширина объема равны 3, радиус входа и выходов, длина входа и радиус сферы равны 0,5). В расчетах рассматривались три возможных варианта положения сферы: 1) сфера находится в центре канала; 2) сфера опускается на расстояние от центра канала, равное одному радиусу; 3) сфера касается нижней плоскости канала.

В варианте 1 длина выходов принималась равной 0,5, в остальных вариантах — 0,2. Расчеты проводились при $\mathrm{Re} = 100$, 500 и $\mathrm{M} = 0{,}6$. При $\mathrm{Re} = 100$ проведено исследование сходимости решения в зависимости от количества расчетных узлов разностной сетки и порядка точности разностной схемы в варианте 1. Рассматривались схемы второго, четвертого и шестого порядков точности на сетках с количеством узлов $N_p = 49\,338$ и $N_p = 378\,918$. Расчеты показали, что для получения сходящегося решения достаточно использовать разностную схему четвертого порядка точности на наиболее грубой сетке. В табл. 3 приведены значения некоторых параметров течения, вычисленные по схеме четвертого порядка точности ($\omega_{\max}$ — максимум модуля завихренности; α_u, α_p — угол отрыва потока от сферы и угол, соответствующий минимальному давлению на сферу, отсчитываемые от задней критической точки сферы; m_1, m_2 — массовые расходы на входе и выходе). Согласно табл. 3 $\alpha_p > \alpha_u$, что соответствует теории пограничного слоя [7]. На крупной сетке разность значений m_1, m_2 составляет 4 %, на мелкой — 1,7 % по отношению к наименьшей из величин m_1, m_2.

Согласно закону сохранения массы для стационарного течения в отсутствие источников и стоков должно выполняться условие $m_1 = m_2$. В данном случае погрешность выполнения закона сохранения массы обусловлена погрешностью численного интегрирования при вычислении массового расхода, погрешностью интерполяции (значения гидромеханических переменных передаются из одного конечного объема в другой с помощью полиномиальной интерполяции, которая реализовывалась без учета законов сохранения),

Таблица 3

Некоторые характеристики течения для варианта 1 при $\mathrm{Re} = 100$

N_p	C_x	$\omega_{\max}$	α_u, град	α_p, град	m_1	m_2
49 338	1,165	14,588	65,74	113,20	1,132	1,177
378 918	1,170	14,670	66,14	113,63	1,118	1,099

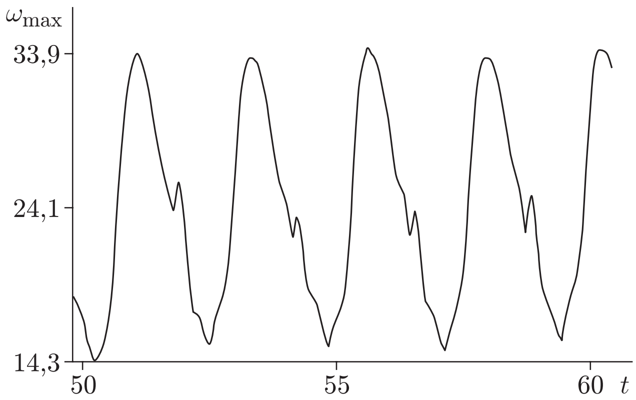

Рис. 3

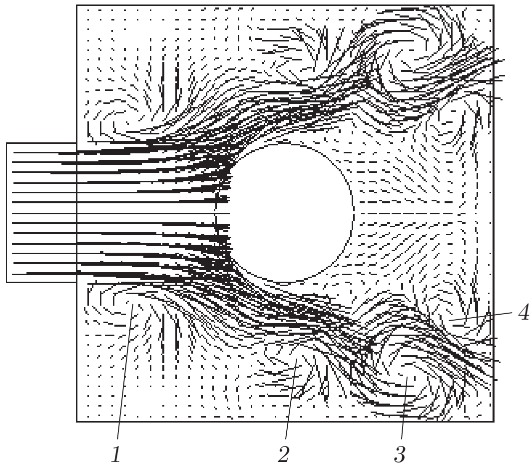

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость максимума модуля завихренности от времени при $\mathrm{Re} = 500$ для варианта 1

Рис. 4. Поле скоростей в сечении XZ при $Y = 1{,}5$ для варианта 1:
1–4 — вихри (*1* — образующийся вихрь, *2* — вихрь, движущийся вдоль струи газа, *3* — стационарный вихрь, *4* — малые периодически возникающие вихри)

погрешностью разностной схемы (разностная схема построена на основе системы уравнений гидромеханики в симметричной форме и, следовательно, не является консервативной, т. е. реализует интегральные законы сохранения с некоторой ошибкой).

Из сказанного выше можно сделать вывод, что представленный расчетный метод позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся как с теорией, так и с экспериментом.

При $\mathrm{Re} = 100$ во всех случаях получается стационарное решение. Газ втекает в объем в виде четко выраженной струи, сохраняющей свою форму до столкновения со сферой. Далее в вариантах 1 и 2 эта струя при обтекании сферы принимает форму купола, края которого направлены к выходам. В варианте 3 струя лишь касается сферы и без существенных изменений продолжает двигаться к выходам, незначительно смещаясь к верхней стенке. Слева и справа от струи газа, входящей в объем, а также за сферой образуются крупные вихри.

При $\mathrm{Re} = 500$ течение несколько усложняется, становясь нестационарным, периодическим (рис. 3). На рис. 4 приведены результаты расчетов при $\mathrm{Re} = 500$ для варианта 1 в сечении XZ ($Y = 1{,}5$). Как и при $\mathrm{Re} = 100$, в этом случае газ входит в расчетную область в виде струи, движется по направлению к сфере, сталкивается с ней и приобретает куполообразную форму. Через определенные промежутки времени в рассматриваемом сечении XZ ($Y = 1{,}5$) по обе стороны входящего потока газа образуются небольшие вихри (вихрь *1*), которые затем переносятся потоком газа от передней стенки рассматриваемого объема к задней и объединяются с находящимся там стационарным вихрем *3*. С каждой

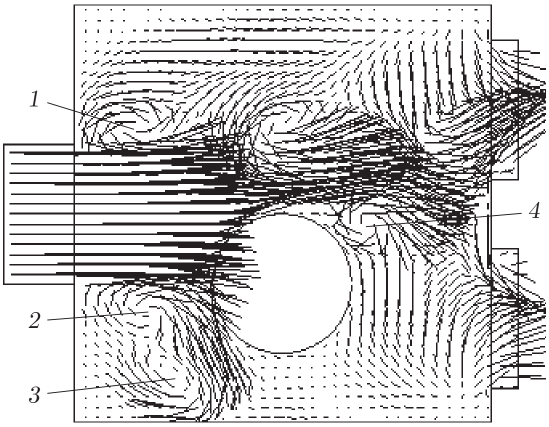

Рис. 5

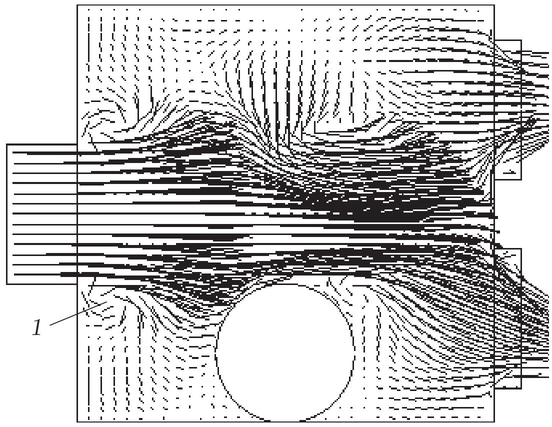

Рис. 6

Рис. 5. Поле скоростей в сечении XY при $Z = 1{,}5$ для варианта 2:
1–4 — вихри (*1, 2, 4* — малые периодически возникающие вихри, *3* — стационарный вихрь)

Рис. 6. Поле скоростей в сечении XY при $Z = 1{,}5$ для варианта 3:
1 — нижний вихрь

стороны струи может одновременно находиться до трех вихрей (вихри *1–3*). Данная вихревая система заменяет большие вихри, занимавшие все пространство между передней и задней гранями объема при Re = 100. Как и при Re = 100, между сферой и задней гранью рассматриваемой области расположена отрывная зона, однако в данном случае она имеет более сложное строение: по краям ее задней части располагаются два малых вихря (вихрь *4*).

На рис. 5 представлено поле скоростей в сечении XY ($Z = 1{,}5$) для варианта 2 при Re = 500. Достигая сферы, набегающий поток делится на две части: верхнюю и нижнюю. Верхняя половина потока движется далее по направлению к выходам, а нижняя половина струи газа резко меняет направление и начинает двигаться к нижней стенке. По обе стороны от входящей в объем струи периодически образуются небольшие вихри *1, 2*. Далее верхний вихрь движется вдоль струи газа к выходам, а нижний вихрь — к нижней стенке, где объединяется с расположенным там стационарным вихрем *3*. В задней части сферы в месте отрыва набегающей струи газа также происходит периодическое образование вихрей (вихрь *4*), которые отрываются от сферы и сносятся потоком газа к выходам.

На рис. 6 приведены поля скоростей в сечении XY ($Z = 1{,}5$) для варианта 3 (сфера касается нижней плоскости) при Re = 500. В этом случае течение во многом аналогично течению в варианте 2, однако при достижении сферы нижний вихрь *1* разрушается.

8. Выводы. Рассмотрен вариант метода конечных объемов, исследована возможность его использования применительно к задаче моделирования течения вязкого газа в объеме с перфорированными стенками, содержащем сферу.

Полученные результаты расчетов согласуются как с экспериментальными, так и с теоретическими данными.

Изучено течение вязкого газа в объеме с перфорированными стенками, в котором расположена одна сфера, при Re = 100, 500 и M = 0,6. Для каждого варианта положения сферы приведены поля скоростей, проанализирован характер течения и образования вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Басниев К. С.** Нефтегазовая гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005.
2. **Липанов А. М.** Метод численного решения уравнений гидромеханики в многосвязных областях (первое сообщение) // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 12. С. 3–18.
3. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
4. **Беклемишев Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2000.
5. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. СПб.: Изд-во "Лань", 2002.
6. **Камке Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
7. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. СПб.: Изд-во "Лань", 2004. Т. 1, 2.
8. **Самарский А. А.** Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. М.: Едиториал УРСС, 2004.
9. **Липанов А. М.** Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А. М. Липанов, Ю. Ф. Кисаров, И. Г. Ключников. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001.
10. **Федорченко А. Т.** Численное исследование нестационарных дозвуковых течений вязкого газа во внезапно расширяющемся плоском канале // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 4. С. 32–41.
11. **Вержбицкий В. М.** Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002.
12. **Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г.** Класс разностных схем высокого порядка точности для прямого моделирования турбулентных потоков при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^5$ // Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике: Сб. тр. науч. конф. Ижевск: Ин-т прикл. механики УрО РАН, 1996. С. 81–102.
13. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
14. **Горохов М. М.** Математическое моделирование обтекания и горения гранул твердого топлива в турбулентных потоках: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ижевск, 2005.

Поступила в редакцию 13/II 2008 г.,
в окончательном варианте — 18/XI 2009 г.