

УДК 532.516

ДАЛЬНЯЯ АСИМПТОТИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ СПУТНЫХ ВИХРЕЙ

Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предлагается приближенная математическая модель, постановка задачи и ее приближенное решение для дальней области турбулентного вихревого следа, возникающего за движущимся телом, где отклонение горизонтальной составляющей скорости от равномерного потока мало. Предполагается, что единственным существенным параметром в этой области, определяющим основные характеристики течения, является вихревой импульс на единицу длины, создаваемый в жидкости подъемной силой, равной нескомпенсированному выталкивающей силе весу движущегося тела. При этом течение оказывается автомодельным и закон автомодельности определяет интенсивность, форму и положение вихревых шнуров в зависимости от расстояния вниз по потоку с точностью до постоянного множителя, величина которого не определяется теоретически и должна находиться путем сравнения теории с экспериментом. Для определения структуры течения в вихревых шнурах (распределение завихренности) формулируется краевая задача, решение которой получено численно в пределе «исчезающей турбулентной вязкости». Изменение максимальной скорости в вихревом шнуре с расстоянием, определяемое автомодельностью, удовлетворительно согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Введение. Проблема спутных вихрей приобрела особую остроту в связи с появлением тяжелых самолетов, за которыми интенсивные вихревые шнуры тянутся на несколько километров и представляют серьезную опасность для небольших самолетов, попадающих в зону этих вихрей [1].

В связи с этим определенным интерес представляют исследования дальней области вихревого следа, под которой подразумевается область, где уже не существует обычный безимпульсный след (сила сопротивления компенсируется тягой двигателей) и в то же время еще не успевают обнаружиться явления, связанные с неустойчивостью и распадом вихревой пары на структуры типа вихревых колец, и т. п.

Экспериментальные исследования и теоретическое описание этого явления связаны с решением сложных проблем динамики концентрированных вихрей. В лабораторных условиях измерения в дальней области невозможны из-за ограниченности размеров экспериментальных установок и существенного влияния следа, связанного с сопротивлением обтекаемого тела (в реальных условиях оно компенсируется работой двигателей). Проведение натурных экспериментов является трудной задачей с чисто технической точки зрения и осложняется многими дополнительными факторами: турбулентностью атмосферы, наличием ветра, стратификацией атмосферы и т. п. Эти обстоятельства приводят к большому разбросу в результатах измерений и в некоторых случаях к противоречиям, порождающим сомнения в их достоверности.

В реальных условиях, и это подтверждается экспериментально, движение в таких вихрях является турбулентным. Отсутствие надежной, работоспособной математической модели для описания турбулентного движения жидкости создает дополнительные трудности на пути построения адекватной математической модели и достаточно полного теоретического описания данного явления.

Сложность задачи объясняет существенные упрощения, сделанные при ее аналитических исследованиях. В ряде работ рассматривается один из вихревых шнуров, при этом течение в его окрестности предполагается осесимметричным, без учета влияния второго [2, 3]. Такой подход оправдан на начальном участке после свертывания вихревой пелены, стекающей с крыла (несущей поверхности), до тех пор пока изменение полной циркуляции за счет турбулентной диффузии завихренности пренебрежимо мало. Ясно, что на некотором расстоянии влияние вихрей друг на друга станет существенным, течение в окрестности каждого вихря перестанет быть осесимметричным, а циркуляция будет со временем уменьшаться.

Используемый в данной работе подход аналогичен подходу, который был применен ранее при исследовании турбулентного вихревого кольца и вихревой пары (плоский аналог вихревого кольца) [4–6]. Краевая задача для определения структуры течения, возникающая в данной работе, фактически совпадает с соответствующей задачей для плоского аналога вихревого кольца. Предполагается, что стратификация атмосферы отсутствует.

1. Уравнения движения. Уравнения для осредненного потока, описывающие стационарное турбулентное течение за движущимся телом, в декартовой системе координат в общепринятых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} W_0 \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \\ W_0 \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} W_0 \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где W_0 — скорость натекающего вдоль оси z из бесконечности потока, $v_z = W_0 + w$, σ_{ik} — тензор вязких и турбулентных напряжений Рейнольдса. Ось x направлена вдоль силы тяжести.

На достаточно больших расстояниях от движущегося тела вниз по течению составляющая скорости w вносимого в поток возмущения мала по сравнению с W_0 , а скорость изменения величин с расстоянием вдоль оси z мала так, что $\partial/\partial z \sim \varepsilon(\partial/\partial x) \sim \varepsilon(\partial/\partial y)$ ($\varepsilon \ll 1$), но $W_0(\partial/\partial z) \approx u(\partial/\partial x)$, $v(\partial/\partial y)$. Поэтому члены, содержащие производные по z , в первом приближении можно отбросить, за исключением первых членов в уравнениях (1). Удобно ввести фиктивное «время» — величину $\tau = z/W_0$.

В дальнейшем для описания турбулентного движения используется простейшая модель с турбулентным коэффициентом вязкости, зависящим от «времени» τ , так что тензор напряжений в пренебрежении молекулярной вязкостью имеет вид

$$\sigma_{ik} = -\frac{1}{3}(u_i^2) \delta_{ik} + \nu_*(\tau) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

где u_i^2 — пульсационные составляющие скорости, $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$.

С учетом (3) уравнения (1), (2) в первом приближении записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu_*(\tau) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu_*(\tau) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где $p' = p + (1/3)\rho(u'_k)^2$ — модифицированное давление.

Из уравнений (3), (4) следует, что в первом приближении задача об определении перпендикулярных к натекающему потоку компонент скорости не зависит от компоненты продольного возмущения скорости. После того как u, v и p' найдены, для определения w получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \nu_{*}(\tau) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Из уравнения (5) продольное возмущение скорости может быть определено аналогично тому, как это сделано в работе [7]. В настоящей работе такая задача не рассматривается.

2. Автомодельность. Пусть движение некоторого тела с постоянной скоростью поддерживается работой двигателей. За телом образуется безымпультный след (полная горизонтальная составляющая силы, действующей на тело, равна нулю), в котором горизонтальная составляющая скорости w относительно быстро затухает. В дальнейшем предполагается, что на некотором расстоянии от движущегося тела вниз по потоку существует область, в которой основную роль играет вихревой след, связанный с подъемной силой.

Пусть вес движущегося тела P уравновешивается подъемной силой. Для компенсации веса тела жидкости должен сообщаться импульс в единицу времени $J = P$. За время t тело проходит расстояние $z = W_0 t$, где W_0 — скорость движения тела, и поэтому на единицу длины пройденного расстояния приходится импульс $J_0 = P/W_0$ или вихревой импульс $2j_0 = J_0/\rho$. Здесь ρ — плотность жидкости, которая предполагается несжимаемой и однородной, а величина вихревого импульса с учетом антисимметричности течения относительно плоскости $y = 0$ определяется формулой

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} y \omega_z dx dy.$$

Данная величина является интегралом движения системы (4), и, таким образом, в каждом сечении $z = \text{const}$ содержится постоянный (не зависящий от «времени» τ) импульс $2j_0$. Размерность вихревого импульса $[j_0] = L^3/T$. Если, учитывая турбулентный характер течения в следе, кинематической вязкостью жидкости можно пренебречь, то эта величина является единственной размерной постоянной, которая и должна определять все характеристики течения. При таком предположении рассматриваемая задача становится эквивалентной задаче о движении плоского аналога вихревого кольца — вихревой пары, создаваемой в жидкости за счет внесения вихревого импульса в бесконечно малый объем жидкости [4]. В данном случае роль времени играет величина $\tau = z/W_0$. В соответствии с этим из соображений размерности сразу получаем форму и расположение вихревых шну-
ров

$$x = x_0(P/2\rho W_0^2)^{1/3} z^{1/3}, \quad y = y_0(P/2\rho W_0^2)^{1/3} z^{1/3}, \quad (6)$$

где x_0 и y_0 — некоторые константы, определяемые положением максимума завихренности в плоскости x, y для вихревого шнура, у которого $y > 0$. Если спроецировать картину течения в плоскостях x, y для различных значений z на плоскость $z = 0$, то из (6) получим перемещающуюся со «временем» τ пару вихрей в соответствии с указанной выше аналогией. При этом траектории проекций точек, соответствующих каждому вихревому шнуру, являются в этой плоскости прямыми, выходящими из некоторого виртуального начала и проходящими (приблизительно) через концы несущих крыльев, так что между

ними образуется угол 2β . Положим $\alpha = \operatorname{tg} \beta = y_0/x_0$. Эта величина не может быть найдена (в рамках данной постановки) теоретически и связана, как будет ясно из дальнейшего, с величиной турбулентного коэффициента вязкости. По аналогии с вихревыми кольцами можно ожидать, что α — малая величина ($\approx 10^{-1} \div 10^{-2}$). Пусть $2b$ — размах крыла (размах несущей поверхности). Из автомодельности следует, что в проекции на плоскость $z = z_s$, где расположено крыло ($z = 0$ соответствует положению виртуального начала вихревых шнуров), расстояние между шнурами изменяется по закону $y = b + \alpha(x - x_s)$, где x_s — координата несущей поверхности (крыла).

Величины перпендикулярных к натекающему потоку компонент скоростей и модифицированное давление в соответствии с автомодельностью определяются соотношениями

$$u, v \sim W_0(P/2\rho W_0^2)^{1/3}/z^{2/3}, \quad p' \sim \rho W_0^2(P/2\rho W_0^2)^{2/3}/z^{4/3}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует, что $w \sim W_0(P/2\rho W_0^2)^{2/3}/z^{4/3}$. Интенсивность вихревого шнура вниз по потоку изменяется с расстоянием по закону $\Gamma = W_0(P/2\rho W_0^2)^{2/3}/z^{1/3}$.

Турбулентный коэффициент вязкости в соответствии с автомодельностью определяется равенством

$$\nu_* = \lambda \frac{j_0^{2/3}}{\tau^{1/3}} = \lambda W_0 \frac{(P/2\rho W_0^2)^{2/3}}{z^{1/3}}, \quad (8)$$

где λ — некоторая безразмерная константа, остающаяся в рассматриваемой постановке свободным параметром.

Автомодельные переменные x', y' определяются равенствами

$$x' = \frac{x}{(j_0/W_0)^{1/3} z^{1/3}} = \frac{x}{j_0^{1/3} \tau^{1/3}}, \quad y' = \frac{y}{(j_0/W_0)^{1/3} z^{1/3}} = \frac{y}{j_0^{1/3} \tau^{1/3}}. \quad (9)$$

3. Формулировка краевой задачи. Переходя от искомым функций u, v к новым величинам — завихренности $\omega = (\omega)_z$, $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ и функции тока ψ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

с учетом (8), а также того, что в силу автомодельности и (9)

$$\omega = \frac{1}{\tau} \omega'(x', y'), \quad \psi = \frac{j_0^{1/3}}{\tau^{1/3}} \psi'(x', y'),$$

для определения этих функций получаем следующую краевую задачу (штрихи опущены). Требуется найти решение уравнений

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3} y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (11)$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$\omega = \psi = 0 \text{ при } y = 0; \quad \omega \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (12)$$

и условию нормировки, вытекающему из закона сохранения вихревого импульса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} y \omega(x, y) dx dy = 1. \quad (13)$$

Сформулированная выше задача позволяет определить структуру распределения завихренности в вихревой паре и течение, создаваемое ею. В такой постановке все течение определяется одной величиной — коэффициентом λ и однозначно связанной с ней величиной α , которая может быть определена из эксперимента. Эта связь определяется соотношением $\alpha = y_0(\lambda)/x_0(\lambda)$, где $x_0(\lambda)$ и $y_0(\lambda)$ — значения координат, определяющих положение максимума $\omega(x, y)$ в плоскости (x, y) .

В действительности течение, создаваемое вихревой парой, образующейся при обтекании движущегося тела, не является автомодельным. В непосредственной близости от обтекаемого тела структура вихрей зависит от деталей конфигурации тела. Однако, как и в случае вихревых колец [4–6], можно ожидать, что на достаточном удалении от обтекаемого тела структура вихревой пары и создаваемого ею течения приобретает некоторый универсальный характер. Течение жидкости и структура вихревой пары в этой области не зависят от деталей конструкции движущегося тела. Вся информация о деталях механизма формирования вихревой пары при обтекании тела на больших расстояниях содержится в одной величине — коэффициенте α . После того как вихревая пара смещается вдоль координаты y на расстояние порядка нескольких размахов крыла, в результате действия турбулентной вязкости вырабатывается автомодельное распределение завихренности, зависящее от условий формирования вихревой пары на начальном участке только через постоянную α .

4. Приближенное решение. Точное аналитическое решение сформулированной задачи получить не удастся. Для больших значений λ строгое доказательство существования и единственности решения получено в [8]. Следует отметить, что для сравнения с экспериментом представляют интерес решения рассматриваемой задачи для малых значений λ (это станет ясно, как только будет получена связь (приближенная) между λ и α). В соответствии с этим коэффициент λ , входящий в уравнения при старших производных, является малым параметром. Указанный факт усложняет исследование рассматриваемой проблемы, так как расчет течения численными методами требует (в данной задаче) достаточно точного определения положения экстремумов завихренности в плоскости (x, y) . В связи с этим представляется необходимым и полезным изучение модельной задачи, сохраняющей ряд основных свойств точной задачи и в то же время простой настолько, что решение можно довести до конца в аналитической форме.

Вместо системы (10), (11) рассмотрим систему уравнений

$$\lambda \Delta \omega + \frac{1}{3} x \omega_x + \frac{1}{3} y \omega_y + \omega = \psi(x_0, y_0) \omega_x; \quad (14)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (15)$$

с теми же граничными условиями (12) и нормировкой (13), что и для системы (10), (11). Здесь x_0 и y_0 — координаты точки, в которой $\omega(x, y)$ достигает максимума (в силу очевидной нечетности решения по y достаточно рассматривать только верхнюю полуплоскость).

Модельную систему (14), (15) можно рассматривать как некоторое грубое приближение к точной системе (10), (11). Уравнение (14) мало отличается от соответствующего уравнения (10) в окрестности точки (x_0, y_0) максимума $\omega(x, y)$, так как в этой точке $\psi_0(x_0, y_0) \sim \alpha \psi_y(x_0, y_0)$ в соответствии с автомодельностью, и вторым членом в правой части (10) можно пренебречь по сравнению с первым, так как α — малая величина, как было указано выше. На больших расстояниях от точки (x_0, y_0) при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ главной становится линейная (левая) часть, совпадающая в обоих уравнениях. В соответствии с этим можно ожидать, что решение модельной задачи хотя бы по порядку величины позволит определить положение максимума $\omega(x, y)$ и его величину.

Так же как и точная, модельная задача является нелинейной, так как коэффициент при ω_x в правой части (14) является функционалом от $\omega(x, y)$.

Решение модельной задачи можно получить следующим образом. Произведем замену переменных, полагая

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{6\lambda}}[x - 3\psi_y(x_0, y_0)], \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{6\lambda}}y, \quad \omega(\xi, \eta) = \exp[-(1/2)(\xi^2 + \eta^2)]Z(\xi, \eta). \quad (16)$$

В результате замены (16) из уравнения (14) получаем следующее уравнение для $Z(\xi, \eta)$:

$$Z_{\xi\xi} + Z_{\eta\eta} + (4 - \xi^2 - \eta^2)Z = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) допускает разделение переменных. Полагая $Z = U(\xi)V(\eta)$, для U и V получим уравнения

$$U'' - \xi^2 U = -(C + 4)U; \quad (18)$$

$$V'' - \eta^2 V = CV, \quad (19)$$

где C — константа разделения, с граничными условиями

$$U \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow 0 \text{ при } |\eta| \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Кроме того, в силу требования антисимметричности должно выполняться условие

$$V(\eta) = V(-\eta). \quad (21)$$

Таким образом, имеем две связанные друг с другом константой разделения C задачи на собственные значения. Задача на собственные значения для уравнений такого вида хорошо изучена, и решение ее известно. Решения уравнений (18) и (19), удовлетворяющие граничным условиям (20) и требованию антисимметричности (21), существуют только при условии, что

$$C + 4 = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad -C = 2m + 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Из (22) следует, что либо $n = 0, m = 1$, либо $n = 1, m = 0$. Требование антисимметричности по η оставляет только одну возможность $n = 0, m = 1$. Соответствующее решение имеет вид $U(\xi) = A_1 \exp[-(1/2)\xi^2]$, $V(\eta) = A_2 \eta \exp[-(1/2)\eta^2]$. Отсюда $Z(\xi, \eta) = A \eta \exp[-(1/2)(\xi^2 + \eta^2)]$, где A — произвольная постоянная, определяемая нормировкой (13). Она оказывается равной

$$A = \frac{\sqrt{6}}{9\pi\lambda^{3/2}}. \quad (23)$$

Уравнение (15) определяет $\psi(x, y)$ по известной теперь $\omega(x, y)$. Учитывая требование равенства нулю функции тока на бесконечность, имеем

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x', y') \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2] dy' dx'.$$

Проще, однако, для вычисления функции ψ поступить следующим образом. В переменных ξ, η уравнение (15) имеет вид

$$\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} = -6\lambda A \eta \exp(-\rho^2), \quad (24)$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. Будем искать $\psi(\xi, \eta)$ в виде $\psi(\xi, \eta) = \eta f(\rho)$. Подставляя это в (24), для определения $f(\rho)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\rho \left(\frac{1}{\rho} f' \right)' + \frac{4}{\rho} f' = -6\lambda A \exp(-\rho^2).$$

Общее решение этого уравнения есть

$$f(\rho) = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{3}{2} \frac{\lambda A}{\rho^2} \exp(-\rho^2).$$

Произвольные постоянные определяются условием равенства нулю на бесконечности и ограниченности в нуле. В результате получаем

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{\lambda A}{\rho^2} (1 - \exp(-\rho^2)).$$

Возвращаясь к переменным x, y , определяя величины x_0, y_0 и учитывая (23), окончательно получаем решение в следующем виде:

$$\omega = \frac{y}{9\pi\lambda^2} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2}{6\lambda}\right], \quad \psi = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} \left\{1 - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2}{6\lambda}\right]\right\},$$

причем

$$x_0 = \frac{1}{\pi\lambda} (2 \exp(-1/2) - 1) = \frac{0,0686}{\lambda}, \quad y_0 = \sqrt{3\lambda}, \quad \alpha = \frac{\pi\sqrt{3}}{2 \exp(-1/2) - 1} \lambda^{3/2} = 25,54\lambda^{3/2}.$$

Значение $\omega(x_0, y_0)$ в точке, где она достигает максимума, есть

$$\omega_{\max} = \frac{1}{3\pi\sqrt{3e}} \frac{1}{\lambda^{3/2}} - \frac{0,0372}{\lambda^{3/2}}.$$

Положение максимума $\psi(x_1, y_1)$ определяется равенствами $x_1 = x_0, y_1 = \beta y_0$, где величина β ($\beta \neq 0$) находится из уравнения $1 + \beta^2 = \exp(\beta^2/2)$, $\beta = 1,585$. Значение $\psi(x, y)$ в этой точке есть

$$\psi_{\max} = \frac{1}{\beta\pi\sqrt{3\lambda}} (1 - \exp(-\beta^2/2)) = \frac{0,0829}{\sqrt{\lambda}}.$$

Наряду с функцией тока ψ в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится, можно рассматривать функцию тока Ψ , связанную с ψ соотношением $\Psi = -(1/3)x_0y + \psi$. Данная функция описывает течение в системе координат, движущейся вместе с вихрем. В этой системе граница $\Psi(x, y) = 0$ делит плоскость течения на две области: внешнюю, в которой линии тока идут из бесконечности в бесконечность, и внутреннюю, в которой линии тока замкнуты. Нетрудно видеть, что эта граница является окружностью $(x-x_0)^2 + y^2 = a^2$, где радиус окружности $a = \beta_1 y_0$ ($\beta_1 \neq 0$) определяется уравнением

$$(2 \exp(1/2) - 1)\beta_1^2 = 1 - \exp(-\beta_1^2/2), \quad \beta_1 = 2,02, \quad a = 3,50\sqrt{\lambda}.$$

В полученной системе координат положение $\Psi(x_2, y_2)$ определяется равенствами $x_2 = x_0, y_2 = \beta_2 y_0$, где β_2 ($\beta_2 \neq 0$) находится из уравнения

$$1 + (2 \exp(-1/2) - 1)\beta_2^2 = (1 + \beta_2^2) \exp(-\beta_2^2/2), \quad \beta_2 = 1.$$

Можно ожидать, что порядки величин, полученные в решении модельной задачи, совпадают с порядками величин, которые должны получиться при решении исходной задачи, по крайней мере при $\lambda \rightarrow 0$. Предполагая, что это верно, введем новые переменные и искомые функции, определяемые равенствами

$$\xi = \lambda^{-1/2}(x - \lambda^{-1}\xi_0), \quad \eta = \lambda^{-1/2}y, \quad \xi_0 = \lambda x_0, \quad \omega = \lambda^{-3/2}\omega_*(\xi, \eta), \quad \psi = \lambda^{-1/2}\psi_*(\xi, \eta).$$

После такой замены система (10), (11) примет следующий вид (у $\omega_*(\xi, \eta)$ и $\psi_*(\xi, \eta)$ звездочки опущены):

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3} \xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \omega - \mu \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{1}{3} \xi_0 \right) - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right]; \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -\omega, \quad \mu = \lambda^{-3/2}. \quad (26)$$

Граничные условия и нормировка примут вид

$$\omega = \psi = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \quad \omega \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty; \quad (27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1.$$

В новых переменных все характерные величины — максимумы ω и ψ , величина $\eta_0 = \lambda^{-1/2} y_0$ — радиус вихря, $\xi_0 = \lambda x_0$ остаются конечными при $\lambda \rightarrow 0$. Параметр $\mu = \lambda^{-3/2}$, входящий в уравнение (25), в рассматриваемой задаче играет роль числа Рейнольдса.

Положим $\psi = \Psi + (1/3)\xi_0\eta$. При такой замене граничные условия для Ψ на бесконечности примут вид

$$\Psi_\eta \rightarrow -\frac{1}{3}\xi_0, \quad \Psi_\xi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty.$$

Эта замена соответствует переходу в систему координат, связанную с вихрем, а величина ξ_0 определяется требованием, чтобы максимум ω лежал на линии $\xi = 0$.

5. Предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ («исчезающая вязкость»). Приближенное решение рассматриваемой задачи, полученное выше, дает основание для предположения, что в новых переменных решение при $\lambda \rightarrow 0$ (соответственно $\mu \rightarrow \infty$) стремится к некоторому предельному решению. При таком предположении из (25) следует, что в пределе при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $\omega = \Omega(\Psi)$, где, однако, вид функциональной зависимости $\Omega(\Psi)$ остается неопределенным.

В искомом течении линия тока $\Psi = 0$ разделяет область течения на две области: внешнюю, в которой линия тока идет из бесконечности в бесконечность, и внутреннюю (атмосфера вихревой пары), в которой линия тока замкнута. В силу граничного условия на бесконечности для ω из (27) следует, что во внешней области в пределе $\Omega \equiv 0$. Вид же $\Omega(\Psi)$ во внутренней области необходимо определить.

Аналогичная задача рассматривалась в работе [6] для турбулентной вихревой пары (и вихревого кольца). Проинтегрируем уравнение (25) по области с границей, определяемой некоторой замкнутой линией тока. Правая часть при этом, как нетрудно проверить, тождественно обращается в нуль, и в результате при любом μ мы имеем равенство

$$\oint \nabla \Omega \mathbf{n} dl + 1/3 \oint \xi \Omega n_\xi dl + 1/3 \oint \eta \Omega n_\eta dl + 1/3 \iint \Omega d\xi d\eta = 0. \quad (28)$$

Здесь dl — элемент длины линии тока, \mathbf{n} — единичная нормаль к линии тока.

Совершая теперь предельный переход при $\mu \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом $\Omega \rightarrow \Omega(\Psi)$, из (28) получим

$$\Gamma(\Psi) \frac{d\Omega}{d\Psi} = 1/3 \Gamma(\Psi) + 2/3 S(\Psi) \Omega(\Psi), \quad (29)$$

где $S(\Psi) = \iint d\xi d\eta$ — площадь области, ограниченной линией тока, $\Gamma(\Psi) = \iint \Omega d\xi d\eta$ — циркуляция по линии тока; здесь интегрирование производится по области, определяемой замкнутой линией тока.

Таким образом, в пределе при $\mu \rightarrow \infty$ определение структуры вихревой пары сводится к задаче о склейке [6] потенциального (во внешней области) и вихревого (во внутренней области) течения невязкой жидкости при условии непрерывности Ψ и $\nabla \Psi$ на границе, причем вид функции $\Omega(\Psi)$ определяется обыкновенным (относительно переменной Ψ) дифференциальным уравнением (29).

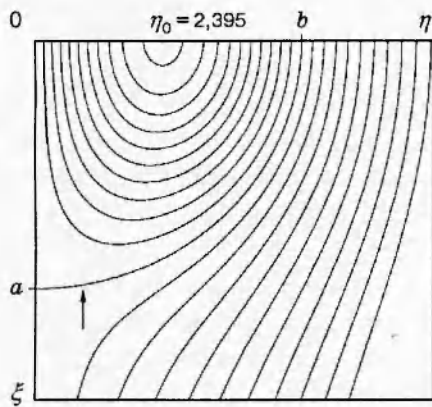


Рис. 1

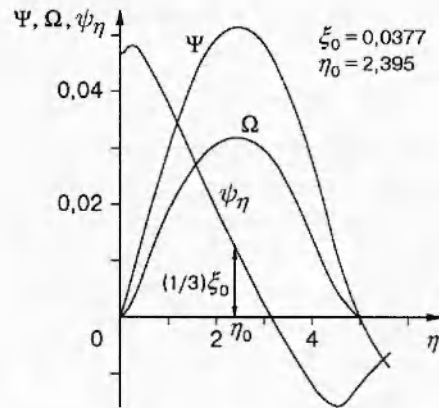


Рис. 2

Можно показать, что из предположения об ограниченности предельного решения следует его непрерывность, поэтому к уравнению (29) следует добавить граничное условие $\Omega(0) = 0$.

Численное решение сформулированной задачи получено совместно с Л. Я. Рыбаком. В предельном случае при $\mu \rightarrow \infty$ оно значительно проще исходной задачи и дает следующие результаты. На рис. 1 приведены линии уровня функции тока. Стрелкой отмечена линия $\Psi = 0$. Разность значений между двумя соседними линиями постоянна ($\Delta\Psi = 0,05$). Максимальное значение $\Psi_{\max} = 0,0513$ достигается на линии $\xi = 0$ при $\eta_0 = 2,395$. Отношение полуосей $b/a = 1,057$, $b = 4,996$, $a = 4,727$. На рис. 2 дано распределение Ψ , Ω и вертикальной составляющей скорости ψ_η в неподвижной системе отсчета в зависимости от η на линии $\xi = 0$. В этой системе вихрь движется со скоростью $\xi_0/3$, $\xi_0 = 0,0378$. Скорость и вихревой импульс на единицу длины вихревой пары могут быть представлены в виде

$$U = k_1 \frac{\Gamma}{R}, \quad 2j = k_2 \Gamma R,$$

где $k_1 = 0,070$, $k_2 = 0,972$, а R — половина расстояния между центрами вихревых шнуров.

Следует отметить, что в рассматриваемой модели расчет завихренности и поля скорости в предельном случае исчезающей вязкости не содержит ни одной эмпирической постоянной. Полученные результаты однозначно определяются предположением, что коэффициент турбулентной вязкости не зависит от пространственных координат. Имеются, однако, качественные экспериментальные свидетельства и теоретические соображения, указывающие на то, что в действительности коэффициент турбулентной вязкости не является постоянным по объему вихря и уменьшается при приближении к ядрам вихревой пары за счет подавления турбулентности в ядре вихря [2, 3, 5]. Указания на такой характер поведения турбулентной вязкости следуют из поведения примеси, переносимой вихревым кольцом [9]. Однако в настоящий момент не имеется экспериментальных данных, надежной модели или хорошо обоснованных теоретических соображений, позволяющих с достаточной степенью адекватности определить пространственную структуру этой величины.

Величина α может быть измерена экспериментально и асимптотически (при больших μ) связана с расчетными величинами соотношением

$$\alpha = \frac{\eta_0}{\mu \xi_0} = \frac{63,5}{\mu}.$$

6. Сравнение с экспериментом. Из формул (7) и проведенного расчета следует, что максимальная величина вертикальной скорости u_{\max} достигается практически на оси

вихревой пары и меняется с расстоянием в соответствии с автомодельностью следующим образом:

$$u_{\max} = u_*(z_*/z)^{2/3},$$

где u_* — значение этой величины в точке $z_* > z_s$ (z_* — расстояние от виртуального начала вихревой пары), в качестве которой может быть взята любая точка в области, где предполагается выполнение автомодельного режима. Положим $l = z - z_*$. Тогда должно выполняться соотношение $(u_*/(u_{\max})^{3/2} - 1)/l = \text{const}$.

Экспериментальные результаты работы [2] удовлетворительно согласуются с автомодельным решением при $u_* = 6$ м/с и $z_* = 613$ м (данные, отмеченные на рис. 11 [2] квадратами, охватывают максимальный диапазон расстояний вниз по потоку).

Для зависимости максимальной скорости от расстояния на основании изложенного выше получаем следующую формулу:

$$u_{\max} = W_0 Q \eta_0^2 u_m / [1 + \eta_0^2 \xi_0 \alpha Q (l/b)]^{2/3}, \quad (30)$$

где b — размах крыла; $Q = P/2\rho W_0^2 b^2$; $u_m = \max \psi_\eta$ — максимальное значение этой величины на линии $\xi = 0$; l — расстояние, отсчитываемое вниз по потоку от точки, расположенной на расстоянии 40–50 размахов крыла от движущегося тела в направлении z . В данной формуле все величины, кроме α , определяются постановкой и решением автомодельной задачи. Величина α может быть измерена экспериментально. Однако в опубликованных работах таких данных найти не удалось. Аналогия с вихревыми кольцами и некоторые дополнительные соображения позволяют предположить, что значения α могут лежать в диапазоне $10^{-1} \div 10^{-2}$. Как отмечалось выше, α зависит от деталей условий формирования вихревого шнура. В частности, попытки снизить интенсивность вихревых шнуров с помощью установки на крыльях различного рода антизавихрителей с точки зрения рассматриваемой модели могут влиять только на величину α . Расчет, проведенный в пределе исчезающей вязкости, дает $\eta_0^2 u_m = 0,28$, $\eta_0^2 \xi_0 = 0,22$ и по формуле (30) позволяет оценивать максимальную скорость в вихревом следе.

Сравнение найденной численно структуры течения с наблюдаемой в эксперименте невозможно из-за отсутствия результатов измерения в дальней области следа. Если же экстраполировать структуру, полученную на достаточно больших расстояниях, на дальнюю область следа, то обнаруживается значительное расхождение с результатами измерений: размытость расчетного профиля завихренности; максимум вертикальной скорости достигается практически на оси вихревой пары и значительно меньше наблюдаемого в эксперименте. Причина этого расхождения заключается, по-видимому, в указанном выше пренебрежении уменьшением турбулентной вязкости в ядре вихря. Возможно, что учет этого обстоятельства за счет выбора более сложной модели позволит устранить указанное расхождение и приблизить значения расчетных величин в (30) к экспериментальным. Следует, однако, отметить, что в реальной ситуации практически всегда имеет место стратификация атмосферы, которая существенно влияет на эволюцию вихревой пары и может приводить к значительным отклонениям от автомодельности.

Заключение. Основной результат, вытекающий из принятого в данной работе подхода, состоит в следующем: турбулентная вихревая пара, образующаяся за движущимся тяжелым телом, начиная с некоторого расстояния от тела и до тех пор, пока турбулентная вязкость значительно превосходит молекулярную, в первом приближении описывается автомодельным решением соответствующих уравнений. Можно ожидать, что в реальных ситуациях это описание будет справедливо на расстояниях порядка нескольких километров за движущимся телом. Автомодельность определяет положение и интенсивность вихревых шнуров, тем самым появляется возможность оценивать опасность для летательных аппаратов, попадающих в область спутных вихрей.

Вид автомодельности при условии, что молекулярной вязкостью можно пренебречь, не связан с выбором конкретной модели для описания турбулентного движения жидкости. В любой адекватной модели сколь угодно высокого уровня в рассматриваемом приближении должен выполняться закон сохранения вихревого импульса на единицу длины и должны существовать инвариантные относительно группы растяжений решения [10], соответствующие полученной в настоящей работе автомодельности. Поэтому использование моделей более высокого уровня для определения структуры вихревых шнуров и поля скорости не будет влиять на вид автомодельности. Однако в настоящее время из-за трудностей проведения соответствующих экспериментов не имеется достаточно полных и надежных измерений в дальней области следа, сравнение с которыми могло бы обосновать выбор конкретной модели высокого порядка. Эти соображения оправдывают использование в данной работе простейшей модели турбулентного движения жидкости. Тем не менее отмеченное выше несоответствие структуры распределения завихренности, полученной в расчете, результатам экспериментов требует дальнейших исследований в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fluid Vortices**. Ser. Fluid Mechanics and its Applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1995. V. 30.
2. **Baldwin B. S., Chigier N. A., Sheaffer Y. S.** Decay of far-flowfield in trailing vortices // AIAA J. 1973. V. 11, N 12. P. 1601, 1602.
3. **Covidaraju S. P., Saffman P. G.** Flow in turbulent trailing vortex // Phys. Fluids. 1974. V. 14. P. 2074–2080.
4. **Луговцов Б. А.** О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1970. С. 182–189.
5. **Луговцов Б. А.** Турбулентные вихревые кольца // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 38. С. 71–88.
6. **Луговцов Б. А.** Структура турбулентного вихревого кольца в пределе исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 5. С. 544–546.
7. **Batchelor G. K.** Axial flow in trailing vortices // J. Fluid Mech. 1964. V. 20, pt 4. P. 645–658.
8. **Пухначев В. В.** Корректность плоского аналога задачи о движении турбулентного вихревого кольца // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1971. Вып. 8. С. 85–102.
9. **Владимиров В. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф.** Подавление турбулентности в ядрах концентрированных вихрей // ПМТФ. 1985. № 5. С. 69–76.
10. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.
