

УДК 539.3

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ БАЛКИ

А. Е. Алексеев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Согласно классификации [1, 2], основные подходы к построению теории многослойных конструкций делятся на несколько направлений. В первую очередь это работы, основанные на кинематических гипотезах, принимаемых либо для всего пакета в целом (гипотеза единой нормали), либо для каждого отдельного слоя (например, гипотеза ломаной линии [3]).

Широкое распространение получил подход к построению теории слоистых сред, изложенный в [4], где основные уравнения получены с использованием энергетического приема размазывания или усреднения.

Для создания уточненных теорий используются методы, основанные на представлении характеристик напряженно-деформированного состояния в виде рядов (асимптотические методы и методы, в которых неизвестные величины разлагаются в ряды по поперечной координате).

Настоящая работа относится к последнему направлению. За основу приняты результаты [5, 6], где изложен метод построения уравнений упругого слоя для произвольных граничных условий на лицевых поверхностях (могут задаваться как перемещения, так и напряжения) при сохранении дифференциального порядка соответствующей системы дифференциальных уравнений. Отличительной особенностью этого подхода является использование нескольких аппроксимаций для одних и тех же искомых величин.

Ниже данный метод применяется при решении задачи изгиба трехслойной ортотропной балки. Упругое деформирование каждого из монослоев описывается уравнениями [7]. На межслойных границах удовлетворяются условия сопряжения как в перемещениях, так и в напряжениях. Эффективность этого метода иллюстрируется на примере изгиба трехслойной балки из углепластика. Проводится сравнение с известными в литературе решениями.

1. Уравнения упругого деформирования ортотропной балки. Рассмотрим балку единичной ширины, высотой $2h$ и длиной L . Балка деформируется в условиях плоского напряженного состояния $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$. Перемещения в направлении осей x и y обозначим через u и v . На границах $y = h$ и $y = -h$ приложены внешние силы $\{p^+, q^+\}$ и $\{p^-, q^-\}$ соответственно (p^\pm, q^\pm — нормальные и касательные силы). Балка изготовлена из ортотропного материала с осями ортотропии, совпадающими с осями x, y . Деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ связаны с напряжениями законом Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y}, & \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}}, & \frac{\nu_{xy}}{E_x} &= \frac{\nu_{yx}}{E_y}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В соответствии с результатами [6] напряжения аппроксимируются от-

резками рядов по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ ($\xi = y/h$):

$$\begin{aligned} 2h\sigma_x &= N + \frac{3M}{h}P_1(\xi), \quad \sigma_y = p_0 + \Delta p P_1(\xi), \\ 2h\sigma_{xy} &= Q + 2h\Delta q P_1(\xi) + (2hq_0 - Q)P_2(\xi), \\ \Delta q &= 0,5(q^+ - q^-), \quad q_0 = 0,5(q^+ + q^-), \\ \Delta p &= 0,5(p^+ - p^-), \quad p_0 = 0,5(p^+ + p^-). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $N = \int_{-h}^h \sigma_x dy$ — усилие; $M = \int_{-h}^h \sigma_{xy} dy$ — момент; $Q = \int_{-h}^h \sigma_{xy} dy$ — перерезывающая сила.

Перемещения и деформации аппроксимируются отрезками рядов:

$$u = \sum_{k=0}^3 [u]^k P_k(\xi), \quad v = \sum_{k=0}^2 [v]^k P_k(\xi); \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d}{dx}[u]^0 + \frac{d}{dx}[u]^1 P_1(\xi), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{h}[v]^1 + \frac{3}{h}[v]^2 P_1(\xi), \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{d}{dx}[v]^0 + \frac{1}{h}([u]^1 + [u]^3) + \frac{3}{h}[u]^2 P_1(\xi) + \frac{5}{h}[u]^3 P_2(\xi). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставим напряжения (1.2) и деформации (1.4) в закон Гука (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых полиномах. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[u]^0 &= \frac{N}{2hE_x} - \nu_{xy} \frac{p_0}{E_y}, \quad \frac{d}{dx}[u]^1 = \frac{3M}{2h^2 E_x} - \nu_{xy} \frac{\Delta p}{E_y}, \\ \frac{d}{dx}[v]^0 + \frac{1}{h}([u]^1 + [u]^3) &= \frac{Q}{2hG_{xy}}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$[u]^2 = \frac{h}{3G_{xy}} \Delta q, \quad [u]^3 = \frac{h}{5G_{xy}} \left(q_0 - \frac{Q}{2h} \right), \quad (1.6)$$

$$[v]^1 = h \frac{p_0}{E_y} - \nu_{xy} \frac{N}{2E_x}, \quad [v]^2 = h \frac{\Delta p}{3E_y} - \nu_{xy} \frac{M}{2hE_x}.$$

Уравнения (1.5), (1.6) дополним уравнениями равновесия:

$$\frac{d}{dx}N + 2\Delta q = 0, \quad \frac{d}{dx}M - Q + 2hq_0 = 0, \quad \frac{d}{dx}Q + 2\Delta p = 0. \quad (1.7)$$

При заданных внешних силах $\{p^+, q^+\}$, $\{p^-, q^-\}$ уравнения (1.5), (1.7) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка относительно неизвестных функций N , M , Q , $[u]^0$, $[u]^1$, $[v]^0$. Неизвестные функции $[u]^2$, $[u]^3$, $[v]^1$, $[v]^2$ определяются из алгебраических уравнений (1.6).

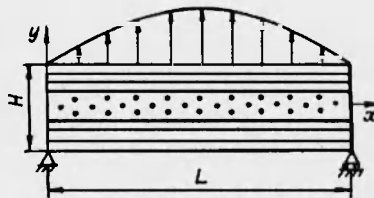


Рис. 1. Изгиб трехслойной балки

2. Уравнения изгиба трехслойной балки. Рассмотрим задачу изгиба трехслойной балки толщиной H и длиной L (рис. 1), которая составлена из армированных монослоев. Направления армирования 1-го и 3-го слоев совпадают с осью балки, а направление армирования 2-го слоя перпендику-

лярно оси балки: $E_x^k = E_{11}$, $G_{xy}^k = G_{12}$ ($k = 1, 3$); $E_x^2 = E_{22}$, $G_{xy}^2 = G_{23}$. Здесь и ниже все величины, относящиеся к k -му слою, обозначаются верхним индексом k . Толщина каждого из монослоев постоянна и равна $2h$ ($H = 6h$).

На лицевых поверхностях балка нагружена следующими внешними силами:

$$p^{3+} = g_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad q^{3+} = 0, \quad p^{1-} = 0, \quad q^{1-} = 0. \quad (2.1)$$

Упругое деформирование каждого из монослоев описывается уравнениями (1.5)–(1.7). При этом вводятся три локальные системы координат (x^k, y^k) :

$$x^k = x \quad (k = 1, 2, 3), \quad y^1 = H/3 + y, \quad y^2 = y, \quad y^3 = y - H/3.$$

Соответственно безразмерная переменная $\xi = y^k/h$ ($k = 1, 2, 3$).

Для упрощения задачи примем, что смещения v^k ($k = 1, 2, 3$) не зависят от координаты y , т. е. в аппроксимациях перемещений (1.3) и деформаций (1.4) имеем

$$[v^k]^\alpha = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2). \quad (2.2a)$$

Кроме того, в законе Гука полагаем

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \cong 0. \quad (2.2b)$$

При этих допущениях уравнения (1.5)–(1.7) для каждого слоя принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} N^k + 2\Delta q^k &= 0, & \frac{d}{dx} M^k - Q^k + 2hq^k &= 0, & \frac{d}{dx} Q^k + 2\Delta p^k &= 0. \\ \frac{d}{dx} [u^k]^\nu &= \frac{N^k}{2hE_x^k}, & \frac{d}{dx} [u^k]^\eta &= \frac{3M^k}{2h^2E_x^k}, \\ \frac{d}{dx} [v^k]^0 + \frac{1}{h} ([u^k]^1 + [u^k]^3) &= \frac{Q^k}{2hG_{xy}^k}, \\ [u^k]^2 &= \frac{h}{3G_{xy}^k} \Delta q^k, & [u^k]^3 &= \frac{h}{5G_{xy}^k} \left(q_0^k - \frac{Q^k}{2h} \right) \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

На поверхностях межслойного контакта должны быть выполнены условия непрерывности напряжений

$$q^{1+} = q^{2-}, \quad q^{2+} = q^{3-}, \quad p^{1+} = p^{2-}, \quad p^{2+} = p^{3-} \quad (2.4)$$

и перемещений

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 [u^1]^n &= \sum_{n=0}^3 (-1)^n [u^2]^n, & \sum_{n=0}^3 [u^2]^n &= \sum_{n=0}^3 (-1)^n [u^3]^n, \\ [v^1]^0 &= [v^2]^0, & [v^2]^0 &= [v^3]^0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Формулы (2.5) получены с учетом равенств (1.3), (2.2a) и свойств полиномов Лежандра.

Краевые условия на торцах балки задаются равенствами

$$N^k = 0, \quad M^k = 0, \quad [v^k]^0 = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (2.6)$$

В итоге задача упругого деформирования трехслойной балки сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3)–(2.5) при краевых условиях (2.6), решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} q^{1+} &= -\beta_1 \lambda^3 C(x), & q^{2+} &= -\beta_2 \lambda^3 C(x), \\ p^{1+} &= \alpha_1 \lambda^4 S(x), & p^{2+} &= \alpha_2 \lambda^4 S(x), & \lambda &= \pi/L. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\alpha_\gamma, \beta_\gamma$ — неизвестные постоянные; $C(x) = g_0 \cos(\lambda x)$; $S(x) = g_0 \sin(\lambda x)$. Проинтегрируем систему уравнений (2.3) с учетом (2.4), (2.7) и граничных условий (2.6). В результате получим выражения для напряжений

$$N^k = n_k \lambda^2 S(x), \quad Q^k = q_k \lambda^3 C(x), \quad M^k = m_k \lambda^2 S(x) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.8)$$

где

$$n_1 = \beta_1; \quad n_2 = \beta_2 - \beta_1; \quad n_3 = -\beta_2; \quad q_1 = \alpha_1; \quad q_2 = \alpha_2 - \alpha_1; \quad q_3 = 1/\lambda^4 - \alpha_2;$$

$$m_1 = \alpha_1 + h\beta_1; \quad m_2 = \alpha_2 - \alpha_1 + h(\beta_1 + \beta_2); \quad m_3 = 1/\lambda^4 - \alpha_2 + h\beta_2,$$

и перемещений

$$\begin{aligned} [u^k]^0 &= -A(x)Kh n_k, & [u^k]^1 &= -3A(x)K m_k, & [u^k]^2 &= -A(x)K_{12} h t n_k / 3, \\ [u^k]^3 &= -A(x)K_{12} t m_k / 5, & [v^k]^0 &= B(x)(3K m_k + K_{12} t (q_k + m_k / 5)) \quad (k = 1, 3), \\ [u^2]^0 &= -A(x)h n_2, & [u^2]^1 &= -3A(x)m_2, & [u^2]^2 &= -A(x)K_{23} h t n_2 / 3, \\ [u^2]^3 &= -A(x)K_{23} t m_2 / 5, & [v^2]^0 &= B(x)(3m_2 + K_{23} t (q_2 + m_2 / 5)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$A(x) = \lambda C(x) / (2h^2 E_2); \quad B(x) = S(x) / (2h^3 E_2); \quad t = \lambda^2 h^2; \quad (2.10)$$

$$K = E_2 / E_1; \quad K_{12} = E_2 / G_{12}; \quad K_{23} = E_2 / G_{23}.$$

Подставляя (2.9) в условия сопряжения слоев (2.5), имеем систему четырех алгебраических уравнений относительно параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Опуская выкладки, запишем ее решение:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_2, & \alpha_1 + \alpha_2 &= 1/\lambda^4, \\ \beta_1 + \beta_2 &= -(36K + 8,4t(K_{12} + K K_{23}) + 0,96t^2 K_{12} K_{23}) / (\Delta h \lambda^4), \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= (36K + 3K^2 + t(8,4K_{12} + 2,4K K_{12} + 5,2K K_{23}) + \\ &\quad + t^2 K_{12}(0,56K_{23} + 0,6K_{12})) / (\Delta \lambda^4), \quad (2.11) \\ \Delta &= 78K + 3K^2 + t(12,8K_{12} + 12K_{23} + 5,2K K_{12} + 13,2K K_{23}) + \\ &\quad + t^2(0,6K_{12}^2 + 1,92K_{12} K_{23} + 0,84K_{23}^2). \end{aligned}$$

Из (2.9) определим безразмерный прогиб W в точке его максимума ($x = L/2$):

$$\begin{aligned} W &= \frac{100 E_2 H^3}{g_0 L^4} [v^2]^0 = \frac{108 \cdot 10^2}{L^4} ((\alpha_2 - \alpha_1)(3 + 1,2t K_{23}) + \\ &\quad + h(\beta_1 + \beta_2)(3 + 0,2t K_{23})). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (2.11), окончательно находим

$$W = \frac{108 \cdot 10^2}{\pi^4} \frac{9K^2 + tK C_1 + t^2 C_2 + t^3 C_3}{78K + 3K^2 + tD_1 + t^2 D_2}, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= 18K_{23} + 15,6K_{12} + 3,6K K_{23}; \\ C_2 &= 1,8K_{12}^2 + 7,2K_{12}K_{23} + 1,2K K_{23}^2 + 6,24K K_{12}K_{23}; \\ C_3 &= 0,48K_{12}K_{23}(K_{23} + K_{12}); \\ D_1 &= 12K_{23} + 12,8K_{12} + 13,2K K_{23} + 5,2K K_{12}; \\ D_2 &= 0,6K_{12}^2 + 1,92K_{12}K_{23} + 0,84K_{23}^2. \end{aligned}$$

Напряжения, деформации и перемещения вычисляются по формулам (1.2)–(1.4). Например, безразмерные осевые напряжения

$$\bar{\sigma}_x^k \equiv \frac{\sigma_x^k}{g_0} = \frac{N^k}{2hg_0} + \frac{3M^k}{2h^2g_0}P_1(\xi) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.13)$$

а безразмерные касательные напряжения

$$\bar{\sigma}_{xy}^k \equiv \frac{\sigma_{xy}^k}{g_0} = \frac{Q^k}{2hg_0} + \frac{\Delta q^k}{g_0}P_1(\xi) + \left(\frac{q_0^k}{g_0} - \frac{Q^k}{2hg_0}\right)P_2(\xi) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.14)$$

3. Уравнения, основанные на гипотезе ломаной линии. Согласно этой гипотезе, аппроксимации напряжений, деформаций и перемещений можно получить из аппроксимаций (1.2)–(1.4), полагая в них

$$[u]^2 = [u]^3 = [v]^1 = [v]^2 = 0, \quad (3.1)$$

в виде

$$\begin{aligned} 2h\sigma_x &= N + \frac{3M}{h}P_1(\xi), \quad \sigma_y = p_0 + \Delta p P_1(\xi), \\ 2h\sigma_{xy} &= Q + 2h\Delta q P_1(\xi) + (2hg_0 - Q)P_2(\xi), \\ \Delta q &= 0,5(q^+ - q^-), \quad q_0 = 0,5(q^+ + q^-), \\ \Delta p &= 0,5(p^+ - p^-), \quad p_0 = 0,5(p^+ + p^-), \quad (3.2) \\ u &= \sum_{k=0}^1 [u]^k P_k(\xi), \quad v = [v]^0, \quad \varepsilon_x = \frac{d}{dx}[u]^0 + \frac{d}{dx}[u]^1 P_1(\xi), \quad \varepsilon_y = 0, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{d}{dx}[v]^0 + \frac{1}{h}[u]^1. \end{aligned}$$

Соответствующие дифференциальные уравнения для каждого слоя следуют из уравнений (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}N^k + 2\Delta q^k &= 0, \quad \frac{d}{dx}M^k - Q^k + 2hq_0^k &= 0, \quad \frac{d}{dx}Q^k + 2\Delta p^k &= 0, \\ \frac{d}{dx}[u^k]^0 &= \frac{N^k}{2hE_x^k}, \quad \frac{d}{dx}[u^k]^1 &= \frac{3M^k}{2h^2E_x^k}, \quad \frac{d}{dx}[v^k]^0 + \frac{1}{h}[u^k]^1 &= \frac{Q^k}{2hG_{xy}^k}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

На поверхностях межслойного контакта должны быть выполнены условия непрерывности напряжений

$$q^{1+} = q^{2-}, \quad q^{2+} = q^{3-}, \quad p^{1+} = p^{2-}, \quad p^{2+} = p^{3-} \quad (3.4)$$

и перемещений

$$\sum_{n=0}^1 [u^1]^n = \sum_{n=0}^1 (-1)^n [u^2]^n, \quad \sum_{n=0}^1 [u^2]^n = \sum_{n=0}^1 (-1)^n [u^3]^n, \quad (3.5)$$

$$[v^1]^0 = [v^2]^0, \quad [v^2]^0 = [v^3]^0.$$

Краевые условия на торцах балки полностью совпадают с условиями (2.6):

$$N^k = 0, \quad M^k = 0, \quad [v^k]^0 = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad \text{при } x = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, в случае гипотезы ломаной линии задача упругого деформирования трехслойной балки сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3)–(3.5) при краевых условиях (3.6). После интегрирования получаем выражения для усилий, моментов

$$N^k = n_k \lambda^2 S(x), \quad Q^k = q_k \lambda^3 C(x), \quad M^k = m_k \lambda^2 S(x) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.7)$$

где

$$n_1 = \beta_1; \quad n_2 = \beta_2 - \beta_1; \quad n_3 = -\beta_2; \quad q_1 = \alpha_1; \quad q_2 = \alpha_2 - \alpha_1; \quad q_3 = 1/\lambda^4 - \alpha_2;$$

$$m_1 = \alpha_1 + h\beta_1; \quad m_2 = \alpha_2 - \alpha_1 + h(\beta_1 + \beta_2); \quad m_3 = 1/\lambda^4 - \alpha_2 + h\beta_2,$$

и перемещений

$$[u^k]^0 = -A(x)Kh n_k, \quad [u^k]^1 = -3A(x)K m_k,$$

$$[v^k]^0 = B(x)(3K m_k + K_{12} t q_k) \quad (k = 1, 3), \quad (3.8)$$

$$[u^2]^0 = -A(x)h n_2, \quad [u^2]^1 = -3A(x)m_2, \quad [v^2]^0 = B(x)(3m_2 + K_{23} t q_2).$$

Здесь

$$A(x) = \lambda C(x)/(2h^2 E_2); \quad B(x) = S(x)/(2h^3 E_2); \quad t = \lambda^2 h^2;$$

$$K = E_2/E_1; \quad K_{12} = E_2/G_{12}; \quad K_{23} = E_2/G_{23}.$$

Подставляя (3.8) в условия сопряжения слоев (3.6), получим систему четырех алгебраических уравнений относительно параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Опуская выкладки, запишем ее решение в виде

$$\beta_1 = \beta_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1/\lambda^4,$$

$$\beta_1 + \beta_2 = -(36K + 6t(K_{12} + K K_{23})) / (\Delta h \lambda^4),$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (36K + 3K^2 + t(6K_{12} + 4K K_{12})) / (\Delta \lambda^4), \quad (3.9)$$

$$\Delta = 78K + 3K^2 + t(6K_{12} + 12K_{23} + 8K K_{12} + 4K K_{23}).$$

Аналогично (2.12) можно вычислить значение безразмерного прогиба W в точке его максимума ($x = L/2$):

$$W = \frac{100 E_2 H^3}{g_0 L^4} [v^2]^0 = \frac{108 \cdot 10^2}{L^4} ((\alpha_2 - \alpha_1)(3 + t K_{23}) + 3h(\beta_1 + \beta_2)).$$

Отсюда, используя (3.9), окончательно получим

$$W = \frac{108 \cdot 10^2}{\pi^4} \frac{9K^2 + tK\tilde{C}_1 + t^2\tilde{C}_2}{78K + 3K^2 + t\tilde{D}_1}, \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{C}_1 = 18K_{23} + 12K_{12} + 3KK_{23}; \quad \tilde{C}_2 = 6K_{12}K_{23} + 4KK_{12}K_{23};$$

$$\tilde{D}_1 = 12K_{23} + 6K_{12} + 8KK_{23} + 4KK_{12}.$$

4. Сравнение с известными решениями. В качестве примера рассмотрим решение задачи об изгибе трехслойной балки, которая составлена из углепластиковых однонаправленных армированных монослоев с характеристиками [8]: $E_{11} = 1,724 \cdot 10^5$ МПа, $E_{22} = 6895$ МПа, $G_{12} = 3448$ МПа, $G_{23} = 1379$ МПа, $\nu_{12} = 0,25$. Геометрия и нагрузка на балку следующие: $H/L = 1/4$ и $1/10$, $g_0 = 0,6895$ МПа.

Для заданных значений упругих постоянных запишем

$$K = E_2/E_1 \cong 4 \cdot 10^{-2}, \quad K_{12} = E_2/G_{12} \cong 2, \quad K_{23} = E_2/G_{23} \cong 5. \quad (4.1)$$

Отметим, что в осевом направлении имеет место существенное различие упругих свойств монослоев, составляющих балку. Из (4.1) следует, что с точностью до 10^{-2} можно положить $1 \cong 1 + K$. Далее вычислим значения параметра $t = \lambda^2 h^2 = (\pi H/6L)^2$: при $H/L = 1/4$ $t = 1,71347 \cdot 10^{-2}$, а при $H/L = 1/10$ $t = 0,27416 \cdot 10^{-2}$. Как и в случае параметра K , с тем же порядком точности можно положить, что $1 \cong 1 + t$. В результате формула (2.12) упрощается и приводится к виду

$$W = \frac{108 \cdot 10^2}{\pi^4} \frac{45K^2 + tKC_1^* + t^2C_2^*}{390K + tD^*}, \quad (4.2)$$

$$C_1^* = 90K_{23} + 78K_{12}, \quad C_2^* = 9K_{12}^2 + 36K_{12}K_{23}, \quad D^* = 15K_{23} + 16K_{12}.$$

Аналогично для случая гипотезы ломаной линии из (3.10) находим

$$W = \frac{108 \cdot 10^2}{\pi^4} \frac{45K^2 + tK\tilde{C}_1^* + t^2\tilde{C}_2^*}{390K + t\tilde{D}^*}, \quad (4.3)$$

$$\tilde{C}_1^* = 90K_{23} + 60K_{12}, \quad \tilde{C}_2^* = 30K_{12}K_{23}, \quad \tilde{D}^* = 60K_{23} + 30K_{12}.$$

$\frac{L}{H}$	Прогиб W	Теория упругости	Классическая теория	Теория Тимошенко	Метод конечных элементов		Формула	
	Ошибка ϵ , %				[9]	[8]	[8]	[10]
4	W	2,8872	0,5096	2,0943	3,5000	2,9102	2,9182	2,8020
	ϵ	—	82,35	27,46	-21,22	-0,80	-1,07	8,52
10	W	0,9316	0,5096	0,7631	0,9886	0,9317	0,9348	0,9135
	ϵ	—	42,29	18,09	-6,11	-0,003	-0,34	1,95

В таблице приведены значения W и ϵ по различным теориям: решения по теории упругости [9], аналитические решения [8] по теории слоистых балок на основе гипотезы прямых нормалей (классическая теория),

на основе гипотезы Тимошенко, на основе гипотезы ломаной линии (формула (4.3)), а также решения методом конечных элементов [8, 10] для различных видов элементов.

Ошибка ε вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{W_T - W_*}{W_T} \cdot 100 \%$$

(W_T — точное значение безразмерного прогиба по теории упругости, W_* — приближенное решение).

Из анализа результатов таблицы вытекает, что как для средних балок ($L/H = 10$), так и для коротких ($L/H = 4$) значения прогиба, вычисленные по формуле (4.2), хорошо согласуются с точным решением.

В случае очень тонких балок, т. е. при $t \rightarrow 0$, для безразмерного прогиба W из (4.2) имеем

$$W \rightarrow W_0 = \frac{972 \cdot 10^2}{78 \cdot \pi^4} K \cong 0,51172.$$

Значение W_0 практически совпадает со значением прогиба, полученным по классической теории.

Распределения нормальных $\bar{\sigma}_x^k$ и касательных $\bar{\sigma}_{xy}^k$ напряжений, вычисленных по формулам (2.13), (2.14), также хорошо согласуются с результатами решения по теории упругости. Для примера рассмотрим сечения балки при $x = L/2$ и 0. В первом случае максимальных значений достигают осевые напряжения σ_x , во втором — касательные σ_{xy} . Из (2.13), (2.14) следует

$$\bar{\sigma}_x^1(L/2, y) = \lambda^2(h\beta_1 + 3(\alpha_1 + h\beta_1)P_1(\xi))/2h^2,$$

$$\bar{\sigma}_x^2(L/2, y) = \lambda^2(h(\beta_2 - \beta_1) + 3(\alpha_2 - \alpha_1 + h(\beta_2 + \beta_1))P_1(\xi))/2h^2,$$

$$\bar{\sigma}_x^3(L/2, y) = \lambda^2(-h\beta_1 + 3(\alpha_1 + h\beta_1)P_1(\xi))/2h^2,$$

$$\bar{\sigma}_{xy}^1(0, y) = \alpha_1 \lambda^3(P_0(\xi) - P_2(\xi))/2h - \beta_1 \lambda^3(P_1(\xi) + P_2(\xi))/2,$$

$$\bar{\sigma}_{xy}^2(0, y) = (\alpha_2 - \alpha_1) \lambda^3 P_0(\xi)/2h - (\alpha_2 - \alpha_1 + h(\beta_2 + \beta_1)) \lambda^3 P_2(\xi)/2h,$$

$$\bar{\sigma}_{xy}^3(0, y) = \alpha_1 \lambda^3(P_0(\xi) - P_2(\xi))/2h + \beta_1 \lambda^3(P_1(\xi) - P_2(\xi))/2,$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ находятся из (2.11).

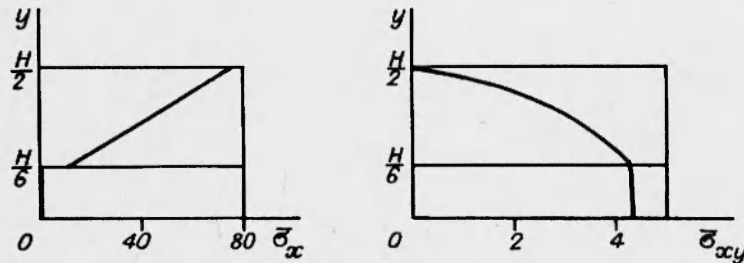


Рис. 2. Распределение нормальных $\sigma_x(L/2, y)$ и касательных напряжений $\sigma_{xy}(0, y)$ по высоте балки при $L/H = 10$

Соответствующие эпюры распределения напряжений для различных отношений длины к толщине, показанные на рис. 2, 3, практически совпадают с эпюрами, полученными по теории упругости [9].

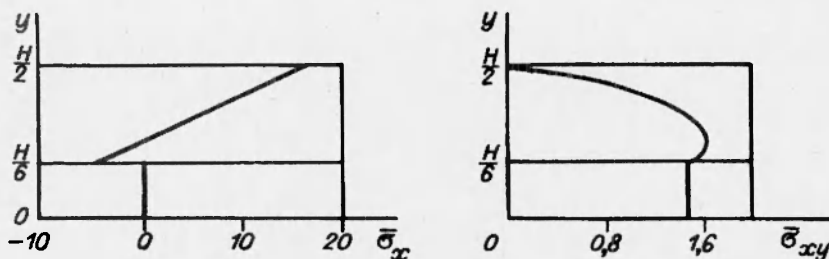


Рис. 3. Распределение нормальных $\sigma_x(L/2, y)$ и касательных напряжений $\sigma_{xy}(0, y)$ по высоте балки при $L/H = 4$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. № 6.
2. Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники / ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М., 1983. Т. 15. С. 3-68.
3. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебание трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973.
4. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.
5. Иванов Г. В. Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1980.
6. Алексеев А. Е. Уравнения деформирования упругого слоя переменной толщины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 81.
7. Алексеев А. Е. Уравнения плоского изгиба упругого слоя переменной толщины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75.
8. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988.
9. Pagano H. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Composite Materials. 1969. V. 3. P. 341-398.
10. Spilker R. L. A hybrid-stress finite-elements formulation for thick multilayer laminates // Computers and Structures. 1980. V. 11. P. 507-514.

Поступила в редакцию 10/1 1994 г.,
в окончательном варианте — 11/VII 1994 г.