

А. Н. Бестужева, А. А. Дорфман

**ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ,
ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ СИСТЕМОЙ ДАВЛЕНИЙ**

В работе получены решения задач о волнах, генерируемых системой перемещающихся давлений, приложенных к свободной поверхности. Выполнен асимптотический анализ, исследованы структуры волновых полей.

Задача о неустановившихся волновых движениях жидкости под действием перемещающейся системы поверхностных периодических давлений решалась для области постоянной глубины в [1, 2]. Рассмотрим эту задачу для области переменной глубины, используя метод, изложенный в [3] применительно к задаче Коши — Пуассона, где был установлен смешанный спектр собственных значений (непрерывная и дискретная части) и доказана теорема разложения.

Запишем уравнения, граничные и начальные условия задачи [1, 2]:

$$(1) \quad \Delta \varphi = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad -\beta < \theta < 0, \quad |z| < \infty, \quad \beta = \pi/2n, \quad n = 2m + 1, \\ m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\varphi_{tt} + \frac{g}{r} \varphi_{\theta} = -\frac{1}{\rho} P_t, \quad \theta = 0; \quad \varphi_{\theta} = 0, \quad \theta = -\beta; \quad \varphi = 0, \quad \varphi_t = -\frac{1}{\rho} P_0, \\ \theta = 0, \quad t = 0; \quad \varphi < \infty, \quad r \rightarrow 0; \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \\ \eta = -\frac{1}{g} \varphi_t|_{\theta=0} - \frac{P}{\rho g}, \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь φ — потенциал скорости; r, θ, z — цилиндрические координаты; t — время; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; P, P_0 — давление в произвольный и начальный момент времени; η — форма свободной поверхности (рис. 1).

Изучим волновое движение, генерируемое периодической перемещающейся системой поверхностных давлений, бегущих по направлению нормали к линии берега и приложенных в полубесконечной полосе шириной $2a$, т. е.

$$P(x, z, t) = P^0 f(z) \exp\{i(kx - \omega t)\}, \quad f(z) = f^0 \begin{cases} 1, & |z| \leq a, \\ 0, & |z| > a. \end{cases}$$

Построим решение задачи (1) с помощью метода интегральных преобразований [3], однако, так как теорема разложения справедлива для абсолютно интегрируемых функций, введем регуляризирующий множитель $\exp(-\alpha x)$ ($\alpha > 0$) для функции $P(x, z, t)$. После преобразований, переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получим для волн на свободной поверхности выражение $\eta = -P/\rho g + \eta^c + \eta^d$, где η^c, η^d обусловлены собственными функциями непрерывного и дискретного спектров соответственно:

$$(2) \quad \eta^c = \frac{P^0}{\pi \rho g} \int_0^{\pi/2} D \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\cos \lambda} \sin(s_c a \cos \lambda) \cos(s_c z \cos \lambda) \times \right. \\ \left. \times \exp(A_0 r) D \left(\frac{r}{A_0 + ik} \right) \left[\frac{2\omega^2}{\omega^2 - g s_c} \exp(-i\omega t) + \frac{\sqrt{g s_c}}{\omega + \sqrt{g s_c}} \exp i \sqrt{g s_c} t - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{g s_c}}{\omega - \sqrt{g s_c}} \exp(-i \sqrt{g s_c} t) \right] ds_c \right\} d\lambda;$$

$$(3) \quad \eta^d = \frac{P^0}{\pi \rho g} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l D_l \left\{ \int_0^{\infty} \sin pa \cos pz \exp(Ar) \times \right.$$

$$\times D \left(\frac{1}{A_l + ik} \right) \left[\frac{2\omega^2}{\omega^2 - gp \cos l\beta} \exp(-i\omega t) + \frac{\sqrt{gp \cos l\beta}}{\omega + \sqrt{gp \cos l\beta}} \times \right. \\ \left. \times \exp i \sqrt{gp \cos l\beta} t - \frac{\sqrt{gp \cos l\beta}}{\omega - \sqrt{gp \cos l\beta}} \exp(-i \sqrt{gp \cos l\beta} t) \right] dp \Big\}.$$

Здесь D , D_l — операторы

$$D = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j,\chi=0}^1 \sum_{k=1}^n B_k^{(j)}, \quad D_l = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{n-1} B_{kl}.$$

Явные формулы для коэффициентов в решении задачи (2), (3) приведены в приложении.

В [3] показано, что волновое движение жидкости над наклонным дном характеризуется наличием волн непрерывного и дискретного спектров, при этом волны непрерывного спектра преобладают на акватории вдали от береговой линии, а дискретного локализованы в прибрежной зоне.

При исследовании волн непрерывного спектра применим метод стационарной фазы (большой параметр определяется формулой $W = \omega^2 R_\alpha / g$ ($R_\alpha = \sqrt{r^2 + (z + (-1)^\alpha a)^2}$, $\alpha = 0; 1$) и теорему Коши о вычетах для тех интегралов, которые содержат полюс [2, 4]. В результате на некотором удалении от области давлений для формы свободной поверхности имеем

$$(4) \quad \eta^c \simeq P^0 f^0 \frac{\omega}{\rho g} \sqrt{\frac{2\pi}{g}} i \exp(-i\omega t) \sum_{\alpha=0}^1 \frac{(-1)^\alpha}{z + (-1)^\alpha a} \times \\ \times D^0 \left[R_{kj}^{1/2} D \left(\frac{I}{A_0^* + ik} \right) \exp \left(-\frac{\omega^2}{g} r \sin a_{kj} + i \left(\frac{\omega^2}{g} R_{kj} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

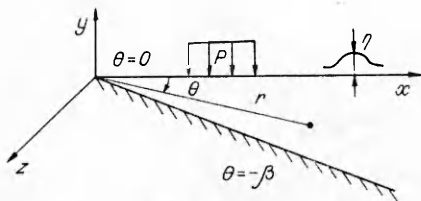
при $R_{kj} < u_0 t$ (оператор D^0 определен в п. 2 приложения),

$$\eta^c = O(R_\alpha^{-2}) \text{ при } R_{kj} > u_0 t,$$

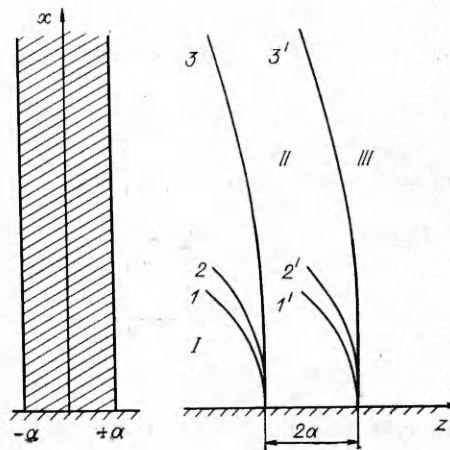
где $R_{kj} = \sqrt{r^2 \cos^2 a_{kj} + (z + (-1)^\alpha a)^2}$; $u_0 = \frac{g}{2\omega}$;

$$A_0^* = -\frac{\omega^2}{ig} \left(\sin a_{k'j'} + (-1)^{k'} \frac{r}{R_{kj}} \cos a_{kj} \cos a_{k'j'} \right).$$

Таким образом, движение жидкости, обусловленное волнами непрерывного спектра, разбивается на две группы, состоящие из $m+1$ семейств каждая и расположенные друг от друга на расстоянии $2a$. Семейство в группе характеризуется определенным значением выражения $|\cos a_{kj}|$. Волновое поле, описываемое семейством, разбивается на две области. Граница между ними представляет собой часть эллипса с уравнением $R_{kj} = u_0 t$, опирающуюся малой осью на линию берега в точках $z = \pm a + u_0 t$. Эта эллиптическая кривая движется со скоростью u_0



Р и с . 1



Р и с . 2

подобно самой себе, удаляясь от области приложения системы давлений. Все эллиптические кривые выходят из двух движущихся точек на берегу $z = \pm a + u_0 t$ и наклонены в сторону оси $z = 0$. Для семейства, характеризующего $|\cos a_{kj}| = 1$, эллиптическая кривая превращается в часть окружности. Семейство с $|\cos a_{kj}| = 1$ присутствует при любом угле наклона дна β ; при $\beta = \pi/2$, что соответствует бесконечно глубокой жидкости, это семейство полностью определяет волновую картину движения. С уменьшением β число эллиптических кривых растет и они стремятся увеличить свой эксцентриситет. При $\beta \rightarrow 0$ число кривых неограниченно возрастает и внешняя кривая стремится к полупрямой, параллельной оси x . Внутри области, ограниченной эллиптической кривой, распространяются прогрессивные волны, затухающие по закону $R_\alpha^{-1/2}$ при малых r и по экспоненциальному закону при больших r . Вне этой области распространяются быстро затухающие волны по закону R_α^{-2} при малых r и по экспоненциальному закону при больших r . Для семейства с $|\cos a_{kj}| = 1$ экспоненциальные множители в показателе затухания равны 1 и внутри области, ограниченной дугой окружности $\sqrt{r^2 + (z + (-1)^\alpha a)^2} = u_0 t$, распространяются прогрессивные волны, затухающие по закону $R_\alpha^{-1/2}$, а вне — по закону R_α^{-2} .

Волновую картину в результате наложения $2(m+1)$ семейств можно охарактеризовать следующим образом: на достаточном удалении от области давлений и линии берега в области *I*, ограниченной дугой окружности $r^2 + (z - a)^2 = u_0^2 t^2$ и линией берега, распространяются прогрессивные волны, затухающие по закону $R_\alpha^{-1/2}$, в области *III*, являющейся внешностью эллиптической кривой $r^2 \sin^2 \beta + (z + a)^2 = u_0^2 t^2$, распространяются быстро затухающие (по закону R_α^{-2}) прогрессивные волны, область *II* представляет собой переходный режим от волн одного типа к волнам другого.

На рис. 2 показаны границы областей для $\beta = \pi/10$. В этом случае $m = 2$ и волновая картина состоит из наложения двух групп, содержащих по три семейства волн каждая. Семейству соответствует своя движущаяся граница: либо часть эллиптической кривой (линии 2, 2', 3, 3'), либо дуга окружности (линии 1, 1'). Область *I* ограничена сверху дугой окружности, а *III* — слева частью эллиптической кривой.

Перейдем к исследованию волнового движения, обусловленного волнами дискретного спектра. Рассмотрим прибрежную зону, характеризующую малыми r . Исследуя η^d аналогично волнам непрерывного спектра, находим

$$(5) \quad \eta^d = \frac{P^0 f^0}{4\pi \rho g} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \eta_l^d.$$

Здесь η_l^d вычисляется по формулам

$$\eta_l^d = \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^\alpha I_\alpha \quad \text{при } z < -a + u_l t,$$

$$\eta_l^d = -I_1 \quad \text{при } -a + u_l t < z < a + u_l t, \quad \eta_l^d = O(z^{-5/2}) \quad \text{при } z > a + u_l t,$$

$$I_\alpha \approx 4\pi i \frac{\omega^2}{g \cos l\beta} D_l \left(\frac{1}{A_l^* + ik} \right) D_l(1) \exp \left\{ i \left(\frac{\omega^2}{g \cos l\beta} (z + (-1)^\alpha a) - \omega t \right) \right\},$$

$$A_l^* = -\frac{\omega^2}{g \cos l\beta} \sin(a_{kl} + l\beta), \quad u_l = \frac{g \cos l\beta}{2\omega}.$$

В результате наложения всех составляющих получим следующую волновую картину: η^d вычисляется по формуле (5), где $\eta_l^d = \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^\alpha I_\alpha$ при $z < -a + u_{n-1} t$, при $-a + u_{n-1} t < z < a + u_2 t$ переходный

режим, а именно: постепенное исчезновение составляющих из общей суммы и $\eta^d = O(z^{-5/2})$ при $z > a + u_2 t$ ($u_2 = g \cos 2\beta/2\omega$, $u_{n-1} = g \sin \beta/2\omega$).

В береговой зоне ($r \rightarrow 0$) среди m составляющих волн дискретного спектра определяющей является волна Стокса ($l = n - 1$). Соответствующее ей волновое движение имеет вид

$$(6) \quad \eta^d = \frac{P^0 f^0}{4\pi\rho g} \varepsilon_{n-1} \eta_{n-1}^d.$$

Здесь η_{n-1}^d — слагаемое, обусловленное $n - 1$ значением дискретного спектра, определяемого по формулам

$$\eta_{n-1}^d \approx \frac{f^0}{\sin \beta} B_{1,n-1}^2 \frac{\omega^2 \operatorname{ctg} \beta + ikg}{\omega^4 \operatorname{ctg}^2 \beta + k^2 g^2} \sin \frac{\omega^2}{g \sin \beta} a \exp \left\{ i \left(\frac{\omega^2}{g \sin \beta} z - \omega t \right) \right\}$$

при $z < -a + u_{n-1} t$,

$$\eta_{n-1}^d \approx 2\pi i \frac{\omega^3}{\sin \beta} B_{1,n-1}^2 \frac{\omega^2 \operatorname{ctg} \beta + ikg}{\omega^4 \operatorname{ctg}^2 \beta + k^2 g^2} \exp \left\{ i \left(\frac{\omega^2}{g \sin \beta} (z - a) - \omega t \right) \right\}$$

при $-a + u_{n-1} t < z < a + u_{n-1} t$, $\eta_{n-1}^d = O(z^{-5/2})$ при $z > a + u_{n-1} t$.

Аналогично волнам непрерывного спектра движение жидкости, обусловленное волнами дискретного спектра, представляет собой наложение m волновых структур в прибрежной зоне. Каждая волновая структура состоит из прогрессивных по оси z волн, распространяющихся по разным законам вне и внутри полос шириной $2a$. Каждая полоса движется со скоростью $g \cos l\beta/2\omega$ в сторону возрастания z . Отметим, что волновой структуре соотнесена своя скорость движения полосы и все эти скорости меньше скорости движения соответствующих зон для волн непрерывного спектра. В области, ограниченной справа движущейся прямой $z = a + u_2 t$, присутствуют волны всех составляющих, в зоне, ограниченной слева прямой $z = -a + u_{n-1} t$, волновое движение, обусловленное приложенным давлением, отсутствует.

В береговой зоне распространяется прогрессивная незатухающая волна вплоть до движущейся точки $z = a + u_{n-1} t$, после которой волны, обусловленные приложенным давлением, отсутствуют. В случае $t \rightarrow \infty$ на свободной поверхности жидкости формируется установившийся режим, характеризуемый следующими особенностями: по лучам, выходящим из точек $z = +a$, распространяются прогрессивные расходящиеся волны, затухающие по закону $R_a^{-1/2}$, описываемые формулой (4), в прибрежной зоне распространяются прогрессивные незатухающие краевые волны — формула (5), в береговой зоне распространяется прогрессивная незатухающая волна Стокса — зависимость (6).

Направим линию приложения давления параллельно линии берега и будем считать, что давление приложено в полосе, т. е. $P(x, z, t) = f(x) \exp \{i(kz - \omega t)\}$, где

$$f(x) = f^0 \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & 0 < x < a, \quad x > b. \end{cases}$$

Решение задачи (1) ищем в виде $\varphi(r, \theta, z, t) = \psi(r, \theta, k, t) \exp ikz$.

Используя метод, изложенный в [3], при $p = k$ для формы свободной поверхности $\eta = -\frac{P}{\rho g} + \eta^c + \eta^d$ получим

$$(7) \quad \eta^c = \frac{f^0}{2\rho g} \exp i(kz - \omega t) \int_0^\infty D \left\{ (\exp A_0 r) D \left(\frac{I}{A_0} (\exp A_0 b - \exp A_0 a) \right) \left[\frac{\sqrt{g s_c}}{\sqrt{g s_c} - \omega} \exp i(\omega - \sqrt{g s_c}) t + \frac{\sqrt{g s_c}}{\sqrt{g s_c} + \omega} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp i(\sqrt{g s_c} + \omega) t - \frac{2\omega^2}{g s_c - \omega^2} \right] dq \right\};$$

$$(8) \quad \eta^d = \frac{f^0}{2\rho g} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l D_l (\exp A_l r) D_l \left(\frac{\exp A_l a - \exp A_l b}{\sin(a_{kj} + l\beta)} \right) \times \\ \times \left[\frac{\sqrt{gk \cos l\beta}}{\sqrt{gk \cos l\beta} - \omega} \exp i(kz - \sqrt{gk \cos l\beta})t + \frac{\sqrt{gk \cos l\beta}}{\sqrt{gk \cos l\beta} + \omega} \times \right. \\ \left. \times \exp i(kz + \sqrt{gk \cos l\beta})t - \frac{2\omega^2}{gk \cos l\beta - \omega^2} \exp i(kz - \omega t) \right].$$

Исследование волн непрерывного спектра (7) проведем по аналогии с задачами, рассмотренными в [2, 5] для бесконечно глубокой жидкости. Представим

$$(9) \quad \eta^c = \eta^c(b) - \eta^c(a).$$

Здесь $\eta^c(x)$ в области, удаленной на достаточное расстояние от полосы приложения давления и линии берега ($r \gg b$), определяется по следующим формулам:

$$(10) \quad 1) \text{ если } k < k_1, \quad k_1 = \frac{\omega^2}{g\sqrt{3}} \quad \left(k_1 < \frac{\omega^2}{g} \right), \text{ то} \\ \eta^c(x) = \frac{f^0}{2\rho g} I_1^c \quad \text{при } |M| < u^*t, \\ I_1^c \simeq 4\pi i \frac{\omega^4}{\sqrt{\omega^4 - k^2 g^2}} \exp i(kz - \omega t) D^0 \left(D \left(I(\omega^2 \sin a_{k'j'} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{x'} i \sqrt{\omega^4 - k^2 g^2} \cos a_{k'j'} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{\omega^2}{g} (r \sin a_{kj} + x \sin a_{k'j'}) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \frac{M}{g} \sqrt{\omega^4 - k^2 g^2} \right) \right); \\ (11) \quad \eta^c(x) = \frac{f^0}{2\rho g} I_2^c \quad \text{при } u^*t < |M| < u_0 t, \\ I_2^c \simeq -2 \sum_{\alpha, \alpha'=0}^1 D^{\alpha'} \left(D \left(I \sqrt{\frac{\pi g}{|M|}} \frac{\sqrt{q_\alpha} (k^2 + q_\alpha^2)^{3/4}}{|2k^2 - q_\alpha^2|^{1/2}} \left(\sqrt{g} \sqrt{k^2 + q_\alpha^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (-1)^{\alpha'} \omega \right)^{-1} \left(\sqrt{k^2 + q_\alpha^2} \sin a_{k'j'} + (-1)^{x'} i q_\alpha \cos a_{k'j'} \right)^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left\{ -\sqrt{k^2 + q_\alpha^2} (r \sin a_{kj} + x \sin a_{k'j'}) + i \left(\sqrt{g} t (k^2 + q_\alpha^2)^{1/4} - q_\alpha M + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + kz + (-1)^{\alpha+\alpha'} \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right), \quad q_\alpha - \text{корни уравнения } q \sqrt{\frac{g}{M}} t = 2(k^2 + q^2)^{3/4}, \\ \eta^c(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |M| > u_0 t,$$

$$\text{где } M = (-1)^x r \cos a_{kj} + (-1)^{x'} x \cos a_{k'j'}, \quad u^* = \frac{g}{2\omega^3} \sqrt{\omega^4 - k^2 g^2}, \quad u_0 = \\ = \sqrt[4]{\frac{g^2}{108k^2}} \quad (u^* < u_0);$$

на движущихся прямых, параллельных линии берега ($|M| = u_0 t$),

$$(12) \quad \eta^c(x) = \frac{f^0}{2\rho g} I_3^c, \\ I_3^c \simeq -\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) (kR_x)^{-1/3} \sum_{\alpha=0}^1 \frac{\sqrt{gk} \sqrt[3]{3}}{\sqrt{gk} \sqrt[3]{3} - (-1)^\alpha \omega} D^\alpha \left(D \left(I \left(\sqrt[3]{3} \sin a_{k'j'} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (-1)^{x'} i \sqrt[3]{2} \cos a_{k'j'} \right)^{-1} \exp \left(-\sqrt[3]{3} k (r \sin a_{kj} + x \sin a_{k'j'}) \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left\{ i \left(2\sqrt[3]{2} kM + kz + (-1)^\alpha \frac{\pi}{6} \right) \right\} \right) \right)$$

($R_x = \sqrt{(r-x)^2 + z^2}$, Γ — гамма-функция);

2) если $k_1 < k < \omega^2/g$, то картина волнового движения упрощается:

$$\eta^c(x) = \frac{f^0}{2\rho g} I_1^c \quad \text{при } |M| < u^*t, \quad \eta^c(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |M| > u^*t;$$

3) если $\omega^2 \leq gk$, что соответствует отсутствию полюсов у подынтегральной функции (7), то

$$\begin{aligned} \eta^c(x) &= \frac{f^0}{2\rho g} I_2^c \quad \text{при } |M| < u_0t, \quad \eta^c(x) = \frac{f^0}{2\rho g} I_2^c \quad \text{при } |M| = \\ &= u_0t, \quad \eta^c(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |M| > u_0t \end{aligned}$$

($\eta^c(x)$) представляет собой совокупность $m + 1$ семейств, каждое из них состоит из $m + 1$ прямых и $m + 1$ отраженных от берега квазиплоских волн, распространяющихся в сторону возрастания r). В отличие от случая бесконечно глубокой жидкости, в которой присутствует одна прямая и одна отраженная от вертикальной стенки волны, при наличии наклонного дна развивается сложная волновая картина: прямая и отраженная волны преобразуются в семейства волн, которые сдвигаются относительно друг друга и накладываются друг на друга. К тому же волновая картина движения зависит от соотношения параметров k и ω , определяющих систему давлений.

При $k < k_1$ в области $r > b$ распространяются незатухающие прогрессивные волны (описываемые формулами (9), (10)) вплоть до движущейся границы $r = b + u^*t$, за которой в полосе $u^*t < r - b < u_0t$ ($u_0 > u^*$) распространяются волны (формулы (9), (11)), затухающие по закону $r^{-1/2}$, на их фоне можно выделить прямые $|M| = u_0t$, на которых порядок амплитуды волн $\sim r^{-1/3}$ (формулы (9), (12)). Назовем волны, обладающие таким прямолинейным фронтом, расходящимися.

Рассмотрим случай $k_1 < k < \omega^2/g$. Здесь вплоть до движущейся границы $r = b + u^*t$ распространяются прогрессивные незатухающие волны, за движущейся границей волновое движение отсутствует. Будем считать, что $k \geq \omega^2/g$. Тогда вплоть до границы, движущейся со скоростью u_0 ($r = b + u_0t$), распространяются прогрессивные волны, затухающие как $r^{-1/2}$, на этом фоне движутся расходящиеся волны ($|M| = u_0t$), на которых порядок амплитуды $\sim r^{-1/3}$. Волновую картину замыкает расходящаяся волна $r = b + u_0t$, за которой волновое движение отсутствует.

Рассмотрим волны дискретного спектра, локализованные в прибрежной зоне, которые получены в явном виде и определяются по формуле (8). При $k = \omega^2/(g \cos l\beta)$ особенности в (8) $1/(\sqrt{gk \cos l\beta} - \omega)$ и $1/(gk \cos l\beta - \omega^2)$ взаимно уничтожаются. Для прибрежной зоны $D_l(\exp A_l r) \simeq D_l(1)$. В береговой зоне среди всех волн дискретного спектра определяющей является волна Стокса, соответствующее ей волновое движение описывается формулой

$$\begin{aligned} \eta_{n-1}^d &\simeq \frac{f^0}{\Delta\rho g} \frac{\varepsilon_{n-1} B_{1,n-1}^2}{\cos \beta} (\exp(-kb \cos \beta) - \exp(-ka \cos \beta)) \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{gk \sin \beta}}{\sqrt{gk \sin \beta} - \omega} \exp i(kz - \sqrt{gk \sin \beta} t) + \frac{\sqrt{gk \sin \beta}}{\sqrt{gk \sin \beta} + \omega} \times \right. \\ &\left. \times \exp i(kz + \sqrt{gk \sin \beta} t) - \frac{2\omega^2}{gk \sin \beta - \omega^2} \exp i(kz - \omega t) \right]. \end{aligned}$$

Волны дискретного спектра состоят из трех групп, одна из которых повторяет форму бегущего давления, а две остальные обусловлены собственными функциями дискретного спектра и направлены противоположно друг другу. В прибрежной зоне каждая из этих групп состоит из m слагаемых, а в береговой зоне определяющей в группе является волна Стокса.

При $t \rightarrow \infty$ формируется установившийся режим волнового движения. Если $k < \omega^2/g$, при $r > b$ в сторону возрастания r распространяют-

ся незатухающие прогрессивные волны; когда $k \geq \omega^2/g$, волновая картина меняется: на фоне затухающих как $r^{-1/2}$ волн распространяются расходящиеся волны (порядок амплитуды $r^{-1/3}$).

Приложение.

1. Обозначения к формулам (2), (3):

$$B_k^{(x)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(p+s_c)^{n-1}} \prod_{\sigma=1}^{n-1} (p^2 \sin \sigma\beta + q^2)^{-1/2} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} (p^2 \sin \sigma^2\beta + q^2) \times \\ \times \prod_{\sigma=1}^{n-k} \operatorname{ctg} \sigma\beta \left[\frac{1}{2} p^2 \sin 2\sigma\beta + (-1)^x i q s_c \right],$$

$$B_{kl} = (-1)^{n-k} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} \sin(\sigma-l)\beta \sin(\sigma+l)\beta \times \\ \times \prod_{\sigma=1}^{n-k} \operatorname{ctg} \sigma\beta \sin(\sigma+l)\beta \cos(\sigma-l)\beta,$$

$$\varepsilon_l = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left\{ 2(1 + \cos l\beta)^{2(n-1)} \sin l\beta \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq l}}^{n-1} \sin(\sigma+l)\beta \sin(\sigma-l)\beta \right\}^{-1},$$

$$A_0 = -(s_c \sin a_{kj} + (-1)^x i q \cos a_{kj}), \quad A_l = -p \sin(a_{kj} + l\beta),$$

$$a_{kj} = 2(k-j)\beta, \quad s_c = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad p = s_c \cos \lambda, \quad q = s_c \sin \lambda,$$

$$I = \exp \left\{ i \frac{\pi}{4} (n-1) [(-1)^x + (-1)^{x'}] \right\}.$$

2. Операторы D^0, D^1 — операторы по условию: D^0 — суммирование производится по тем индексам, для которых $-(-1)^x \cos a_{kj} > 0$, D^1 — условие $(-1)^x \cos a_{kj} > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977.
2. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. — Киев: Наук. думка, 1976.
3. Дорфман А. А. Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1986. — № 2.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
5. Черкесов Л. В. Развитие волн под действием двух систем перемещающихся давлений // Тр. МГИ. — 1961. — № 24.

г. Ленинград

Поступила 16/VII 1990 г.

УДК 536.25 : 517.958

В. И. Юдович

**О ГРАНИЦЕ МОНОТОННОЙ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ
КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ**

Рассматривается задача о малых колебаниях теплопроводной жидкости, заполняющей горизонтальный слой, вблизи механического равновесия. Предполагается, что слой нагревается сверху, так что жидкость стратифицирована устойчиво. Как известно [1, 2], при достаточно большой вязкости все моды затухают монотонно (декременты положительны), а если вязкость мала, то имеются и колебательные моды, которым соответствуют комплексные декременты с положительной действительной и ненулевой мнимой частью.

В данной работе изучается предельный случай бесконечно больших чисел Прандтля σ и Рэлея R , причем число Грасгофа $G = R/\sigma$ конечно и фиксировано. Дело сводится к анализу спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, нелинейной относительно спектрального параметра — декремента λ . Она содержит в качестве дополнительных параметров волновое число α и G . При фиксированных α и G , как нетрудно установить, существует счетное