

12. Березин Ю. А., Дудникова Г. И. Влияние теплопроводности на структуру и критические параметры ударных волн в плазме.— ПМТФ, 1972, № 2.
13. Березин Ю. А. К теории волн конечной амплитуды в разреженной плазме. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1966.
14. Дудникова Г. И. Нестационарные ударные волны в разреженной плазме.— ПМТФ, 1973, № 3.
15. Robson A. E. Experiments on oblique shock waves.—«Proc. Study Group ESRIN», Frascati, 1969.
16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.

УДК 533.6.011

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЗАДАЧИ ОБ ОСТЫВАНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ОБЪЕМА НЕРАВНОВЕСНО-ИОНИЗОВАННОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГЕЛИЯ

С. П. Попов

(Москва)

Излагается методика и приводятся результаты численных расчетов системы уравнений нестационарной газовой динамики, переноса излучения в сплошном спектре и кинетики столкновительной ионизации и ионизации излучением, описывающих разлет и охлаждение сферического объема He. Проведено сопоставление с расчетами, выполненными в предположении термодинамического равновесия.

### Условные обозначения

$u$  — скорость газа;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $E$  — полная энергия;  $e$  — внутренняя энергия;  $q$  — потери энергии веществом при излучении;  $T$  — температура электронов и атомов;  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_e$  — соответственно неравновесные концентрации атомов, одно- и двукратно ионизованных атомов, электронов;  $\alpha_{0p}, \alpha_{1p}, \alpha_{2p}, \alpha_{ep}$  — равновесные значения этих концентраций;  $K_1, K_2$  — константы ионизационного равновесия;  $I_1, I_2$  — потенциалы ионизации He;  $g_0, g_1, g_2$  — соответствующие статистические веса;  $I(\nu, \Omega)$  — спектральная интенсивность излучения в единичном частотном интервале на единицу телесного угла;  $I_p(\nu)$  — ее равновесное значение;  $\nu$  — частота излучения;  $d\nu$  — частотный интервал;  $d\Omega$  — элемент телесного угла;  $N_0$  — число Лошмидта;  $M$  — масса атома;  $v$  — средняя тепловая скорость электронов;  $\sigma_0, \sigma_1$  — сечения столкновительной ионизации атомов и однократно заряженных ионов;  $\sigma_{0\nu}$  — сечение фотоионизации атомов ( $\kappa_{0\nu}$  — соответствующий спектральный линейный коэффициент поглощения);  $\sigma_{1\nu}$  — сечение фотоионизации однократно заряженных ионов ( $\kappa_{1\nu}$ );  $\sigma_{0e}, \sigma_{1e}, \sigma_{2e}$  — сечения тормозного поглощения электронами соответственно в поле атома, одно- и двукратно заряженных ионов ( $\kappa_{0e}, \kappa_{1e}, \kappa_{2e}$ ).

При изучении нестационарных газодинамических явлений в реальных газах необходимо учитывать соотношение между скоростями изменения  $\nu$ , макроскопических параметров  $E, \rho, u$  и скоростями  $\nu_p$  процессов, ведущих к установлению термодинамического равновесия (ионизации, возбуждения и т. д.). Во многих задачах в областях непрерывных течений

выполняется неравенство  $v_m \ll v_p$ . При этом каждая частица газа в данный момент времени находится в состоянии равновесия, соответствующего медленно изменяющимся макроскопическим параметрам. Величины, характеризующие реальный газ, являются функциями только  $E$  и  $\rho$ , вычисления их могут быть проведены отдельно от расчетов газодинамического движения. В областях резкого изменения газодинамических величин, например в областях ударных волн, критерий наступления равновесия может нарушаться. В этом случае существует неравновесная зона, в которой состояние газа определяется кинетикой физических процессов, происходящих в нем. Если протяженность этой зоны незначительна по сравнению с характерными размерами всей задачи, где выполняется условие равновесия, то влиянием ее на движение газа в целом можно пренебречь и газовую динамику рассчитывать по равновесной теории.

При сильном уменьшении  $v_p$  или увеличении  $v_m$  условие равновесия  $v_m \ll v_p$  может нарушиться во всей области непрерывных течений. Это реализуется, например, в задачах обтекания тел разреженным газом [1], так как  $v_p$  резко уменьшается с уменьшением плотности, а также в задачах о нагреве газа сфокусированным излучением, когда уменьшение характерных размеров до долей миллиметров ведет к увеличению  $v_m$  и выполнению условия  $v_m > v_p$ . В этих случаях благодаря взаимному влиянию кинетики и газовой динамики необходимо совместное решение соответствующих уравнений. В [1] упрощающим численные расчеты моментом является стационарность процесса. Задачи о нагреве газа мощным источником излучения и его последующем разлете, к которым относятся исследования данной работы, нестационарны.

В данной работе изучается процесс разлета и охлаждения сферического объема (с характерными размерами  $\sim 1$  мм) высокотемпературной плазмы He ( $T \sim 10$  эВ) с учетом кинетики ионизации и переноса энергии излучением в сплошном спектре. При этом не рассматривается стадия образования плазмы под действием излучения. Предполагается, что нагрев ее идет настолько быстро, что газ за время действия импульса излучения не приходит в движение. Система уравнений, описывающих разлет и охлаждение, близка к выведенной в [2], но в отличие от [2,1] здесь предполагается более сложный механизм излучательных и ионизационных процессов.

Система газодинамических уравнений имеет вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial r &= -2\rho u / r; \\ \partial \rho u / \partial t + \partial \rho u^2 / \partial r &= -\partial p / \partial r - 2\rho u^2 / r; \\ \partial E / \partial t + \partial (E + p)u / \partial r &= -(E + p)2u / r - q. \end{aligned}$$

Здесь и ниже приняты следующие единицы измерения величин:  $T, I_1, I_2, \nu$ , эВ;  $\rho_0 = 1,77 \cdot 10^{-4}$  г/см<sup>3</sup>;  $r_0$ , см;  $u_0 = 0,5 \cdot 10^6$  см/с;  $t_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  с. Система (1) дополняется термодинамическими соотношениями, в которых не учитывается энергия электронного возбуждения атомов и ионов,

$$(2) \quad e = 3/2 T \rho + \alpha_1 I_1 \rho + \alpha_2 (I_1 + I_2) \rho, \quad p = T \rho (1 + \alpha_e), \quad \alpha_e = \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Величины неравновесных степеней ионизации  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяются реакциями: столкновительной ионизацией —  $A + e \rightleftharpoons A^+ + 2e$ ,  $A^+ + e \rightleftharpoons A^{++} + 2e$ ; ионизацией излучением —  $A + h\nu \rightleftharpoons A^+ + e$ ,  $A^+ + h\nu \rightleftharpoons A^{++} + e$ . В рассмотрение не включаются процессы, связанные с возбужденными состояниями атомов и ионов, а также излучение

в линиях. Уравнения ионизационной кинетики при этих предположениях принимают вид

$$(3) \quad \frac{\partial \alpha_0 \rho}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_0 \rho u}{\partial r} = -\alpha_0 \alpha_e N_0 t_0 \rho^2 \sigma_0 v (I_1/T + 2) \exp(-I_1/T) \times \\ \times (1 - L_0) - \int_{I_1}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{C_0(v)}{v} d\Omega dv - \frac{2\rho \alpha_0 u}{r}; \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 \rho u}{\partial r} = \alpha_1 \alpha_e N_0 t_0 \rho^2 \sigma_1 v (I_2/T + 2) \exp(-I_2/T) (1 - L_2) + \\ + \int_{I_1}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{C_1(v)}{v} d\Omega dv - \frac{2\rho \alpha_2 u}{r}; \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \quad \alpha_e = \alpha_1 + 2\alpha_2; \quad L_0 = \alpha_1 \alpha_e / K_1 \alpha_0; \quad L_2 = \alpha_2 \alpha_e / K_2 \alpha_1; \\ C_{0,1}(v) = \alpha_{0,1} N_0 \sigma_{0v,1v} (1 - L_{0,2} \exp(-v/T)) \left[ L_{0,2} \frac{(\exp(v/T) - 1) I_p(v)}{\exp(v/T) - L_{0,2}} - I(v, \Omega) \right]; \\ \sigma_0 = 0,13 \cdot 10^{-17} \cdot T, \text{ см}^2; \quad \sigma_1 = 0,41 \cdot 10^{-18} \cdot T, \text{ см}^2; \quad v = 6,7 \cdot 10^7 \cdot T^{1/2}; \\ K_{1,2} = (6,06 \cdot 10^{21} g_{1,2} / N_0 \rho g_{0,1}) T^{3/2} \exp(-I_{1,2}/T); \\ g_0 = 1; \quad g_1 = 2; \quad g_2 = 1; \quad I_p(v) = C v^3 / [\exp(v/T) - 1].$$

Константа  $C$  включает в себя множитель  $2h/c^2$  и величины, обезразмеривающие энергию, время и частоту.  $I(v, \Omega)$  находится из уравнения переноса излучения, которое в неравновесной среде вдоль выбранного направления и в единичном интервале частот имеет вид

$$(4) \quad dI(v, \Omega)/ds = -\kappa(1 - \exp(-v/T))(I_p(v) - I(v, \Omega)) - \kappa_{0v} C_0(v) - \\ - \kappa_{1v} C_1(v); \\ \kappa_{0v} = \sigma_{0v} N_0 \alpha_0 \rho; \quad \kappa_{1v} = \sigma_{1v} N_0 \alpha_1 \rho; \quad \kappa = \kappa_{0e} + \kappa_{1e} + \kappa_{2e}; \\ \kappa_{1e} = \sigma_{1e} N_0^2 \alpha_1 \alpha_e \rho^2; \quad \kappa_{2e} = \sigma_{2e} N_0^2 \alpha_2 \alpha_e \rho^2; \quad \kappa_{0e} = \sigma_0 N_0^2 \alpha_0 \alpha_e \rho^2.$$

Первый член в (4) учитывает процессы поглощения и испускания при свободно-свободных переходах в поле атома, одно- и двукратно ионизованных атомов. Сечения этих процессов, как и для фотоионизации, брались из [3]. Значение  $\sigma_{0e}$  использовалось такое же, как в [4]. При сделанных предположениях становится определенным выражение для  $q$  в системе газодинамических уравнений (1)

$$(5) \quad q = \int_0^{\infty} \kappa(1 - \exp(-v/T)) \int_{\Omega} (I_p(v) - I(v, \Omega)) d\Omega dv + \\ + \int_{I_1}^{\infty} \int_{\Omega} \kappa_{0v} C_0(v) d\Omega dv + \int_{I_2}^{\infty} \int_{\Omega} \kappa_{1v} C_1(v) d\Omega dv.$$

В случае термодинамического равновесия вместо (3) рассматривается система алгебраических уравнений

$$(6) \quad \alpha_1 \alpha_e / \alpha_0 = K_1; \quad \alpha_2 \alpha_e / \alpha_1 = K_2; \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \quad \alpha_e = \alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Эта система совместно с (2) при заданных значениях  $E$ ,  $\rho$ ,  $u$  определяет  $T$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Уравнение переноса излучения (4) в равновесной среде

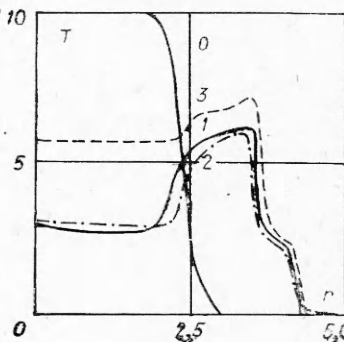
$$(7) \quad dI(\nu, \Omega)/ds = -(\kappa + \kappa_{cv} + \kappa_{iv})(1 - \exp(-\nu/T))(I_p(\nu) - I(\nu, \Omega)).$$

Для системы уравнений (1) — (5) задавались граничные условия при  $r = 0$   $\rho u = 0$ ,  $u = 0$ ; при  $r = \infty$   $u = 0$ ,  $\rho = 1$ ,  $T = 0,03$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и принималось отсутствие потоков излучения, направленных к центру сферы. Для выяснения влияния ионизационного неравновесия на течение газа задача при одних и тех же начальных данных и граничных условиях считалась в двух различных предположениях: полное равновесие (система уравнений (1), (2), (5) — (7) и отсутствие ионизационного равновесия (система уравнений (1) — (5)), с учетом излучения и без него.

Перейдем к краткому описанию методики расчетов. Идентичность вида уравнений (1), (3) позволила применить для их решения один и тот же алгоритм. Основа этого алгоритма подробно описана в работе [5]. Была выбрана наиболее простая его реализация: неявная схема с явным антидиффузионным шагом, не зависящим от скорости  $u$ . Решение (1), (3) проводилось в одной и той же пространственной и временной сетках. Система (2) при известных из решения (1), (3)  $E$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  в каждой точке пространства и в каждый момент времени определяла  $T$  и  $p$ .

Интенсивность излучения  $I(\nu, \Omega)$  находилась путем прямого численного решения (4) в каждой точке пространства. При этом сетка частот выбиралась не равномерной, а имела сгущения в областях малых  $\nu$  (область свободно-свободных переходов), частот  $\nu \sim I_1$  (область фотоионизации атома) и частот  $\nu \sim I_2$  (область фотоионизации иона). Всего по спектру бралось 30 точек. Сетка углов считалась равномерной и не зависящей от координаты  $d\theta = \pi/12$ . Вследствие большой затраты машинного времени для решения уравнения переноса излучения (4) оно решалось в 5 раз реже, чем (1) или (3). В промежуточных временных слоях в (1), (3) подставлялось значение  $I(\nu, \Omega)$ , полученное при предыдущем по времени решении (4). В случае полного термодинамического равновесия методом итераций решались системы (2), (6).

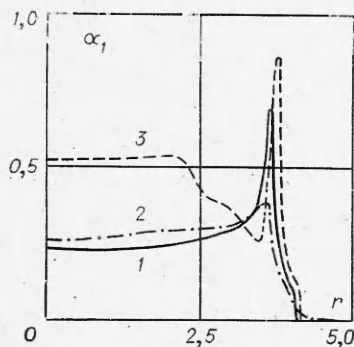
В качестве начальных данных в варианте расчета, приводимом ниже, задавались следующие значения величин: профиль температуры (кривая 0 на фиг. 1),  $\rho = 1$ ,  $u = 0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — равновесные значения, соответствующие этим параметрам, начальный радиус нагретой области 0,375 мм. Прежде чем перейти к описанию результатов расчетов, оценим характерные времена установления температурного равновесия. Основным механизмом выравнивания температур в ионизованном газе являются электронно-ионные столкновения, характерное время этой реакции в начальный момент  $\sim 0,5 \times 10^{-10}$  с, что значительно меньше характерного газодинамического времени  $\sim 10^{-8}$  с. Поэтому начальную стадию разлета можно считать в однотемпературном приближении. Время установления ионизационного равновесия в начальный момент  $10^{-9} - 10^{-10}$  с, т. е. задание  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в равновесном приближении оправдано. Определенные распределений  $T$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  в начальный момент, как было сказано выше,



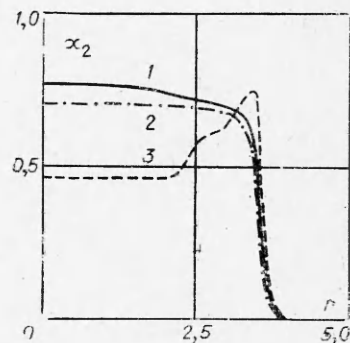
Фиг. 1

выходит за рамки данной работы, составленный же алгоритм позволяет произвольное их задание, в частности, соответствующее точным расчетам пробоя в He.

Рассмотрим непосредственное описание результатов счета. На фиг. 1—5 приняты обозначения: кривая 1 — расчет по теории неравновесной ионизации без учета излучения; 2 — то же с учетом излучения; 3 — расчет по равновесной теории без учета излучения. Координатам  $r = 1, 2, 3$  и т. д. соответствуют физические размеры 0,125; 0,250; 0,375 мм и т. д., расчетный шаг по координате равен 0,0125 мм. На фиг. 1 проведено сопоставление температурных профилей в момент времени 13,6 нс после начала разлета. Ударная волна имеет координату 4,2, контактный разрыв — 3,5. Наибольшее отличие кривой 1 от кривой 2 в области  $r < 2,5$ . Скорость распространения ударной волны, контактного разрыва, а также распределение  $\rho, u$  для всех вариантов расчетов (кривые 1—3) примерно одинаковы. Для этого же момента времени на фиг. 2 представлено распределение  $\alpha_1$ . Видно, что в равновесном случае  $\alpha_{1p}$  больше значения  $\alpha_1$  в центральной области течения примерно в 2 раза, что объясняется уменьшением скорости рекомбинации при столкновениях с падением температуры и плотности (к этому моменту времени  $\rho$  в области  $r < 3$  порядка 0,1). В области  $r > 3$   $\rho \sim 3$  и скорости ионизации и рекомбинации вполне достаточны, чтобы поддерживать  $\alpha_1 \approx \alpha_{1p}$ . Однако детальное сравнение профилей  $\alpha_1$  и  $\alpha_{1p}$  затруднено, так как эти концентрации сами зависят от  $\alpha_2'$  и  $\alpha_{2p}$ , соотношение между которыми в этот же момент времени показано на фиг. 3. Для этой компоненты газа тенденция к «закалке» при уменьшении температуры и плотности проявляется более наглядно. На фиг. 1—5 видно, что учет излучения не сильно изменяет профили полученных величин. Это объясняется тем, что температура уменьшается довольно быстро и, кроме того, область оптически прозрачна для большого участка спектра  $\nu < I_1$ , на который приходится максимум равновесного излучения при температурах меньше 7 эВ, поэтому излучение, выходящее из нее, много меньше соответствующего черного излучения.

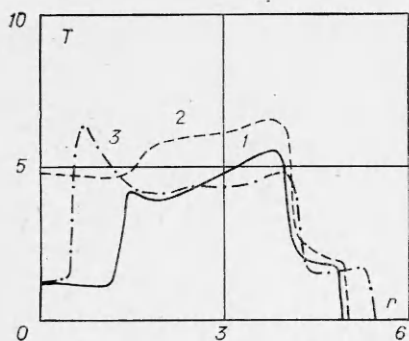


Фиг. 2

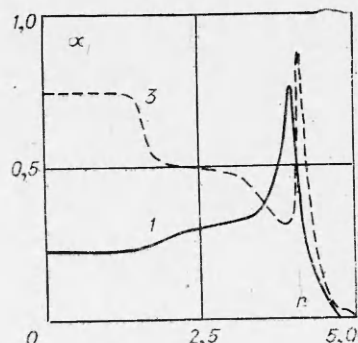


Фиг. 3

На фиг. 4 представлено распределение  $T$  в момент времени 20 нс. Ударная волна прошла до  $r = 5$ , контактный разрыв переместился в  $r = 4$ . К данному моменту сделано примерно 450 счетных шагов по времени. Отличие температуры, рассчитанной по равновесной теории, от неравновесной порядка 30%. В области  $r < 1,4$  на кривой 1 наблюдается возникновение волны сжатия, движущейся к центру. Кривая 3 показывает распределение  $T$  в неравновесном случае в последующий момент —



Фиг. 4



Фиг. 5

23 нс (без излучения). Волна сжатия доходит практически до центра и нагревает газ до 6 эВ ( $\rho$  в центре при этом  $\sim 0,3$ ). В равновесном варианте такой сильной волны не наблюдается.

На фиг. 5 сопоставлены значения  $\alpha_{1p}$  и  $\alpha_1$  в момент 20 нс. Из приведенных расчетов следует сделать вывод, что учет неравновесности ионизации в задаче об охлаждении сферического объема He с  $T \sim 10$  эВ,  $r \sim 0,37$  мм и нормальной начальной плотности приводит, во-первых, к более низким средним по объему температурам (на 30—40%), более высоким значениям (примерно в 2 раза) степеней второй ионизации и соответственно более низким степеням первой ионизации для времен, соответствующих разлету до размеров, в 2 раза превышающих первоначальные; во-вторых, к возникновению движущейся к центру волны сжатия, отсутствующей к этому моменту времени в равновесных расчетах. На скорость расширения горячей области и распространение ударной волны ионизационное неравновесие и перенос энергии излучением в данном расчетном варианте существенного влияния не оказывают.

Поступила 4 III 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кременецкий М. Д., Леонтьева И. В., Лунькин Ю. П. Обтекание затупленного тела гиперзвуковым потоком неравновесно-ионизованного одноатомного излучающего невязкого газа.— ПМТФ, 1971, № 4.
2. Clarke J. H., Ferrari C. Gas dynamics with nonequilibrium radiative and collisional ionization.—«Phys. Fluids», 1965, vol. 8, N 12.  
Рус. пер. Газовая динамика с неравновесной ионизацией излучением и столкновениями.— Сб. пер. Механика, 1967, № 1.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
4. Фирсов О. Г., Чибисов М. И. Тормозное излучение медленных электронов на нейтральных атомах.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып.6.
5. Boris J. P., Book D. L. Flux-corrected transport. 1. SHASTA, a fluid transport algorithm that works.—«J. of Comput. Phys.», 1973, vol. 11, N 1.