# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ В ПЛОСКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

*К. П. Суровихин (Москва)*

В работе [1] был построен функционал

$$J=\iint f(x,\ y,\ \psi,\ \psi_x,\ \psi_y)\,dx\,dy$$

для которого уравнение Эйлера совпадает с уравнением Крокко, описывающим плоские вихревые течения газа. Применим к исследованию этого функционала групповые методы, а именно, найдем группу преобразований, оставляющую этот функционал инвариантным.

Перед тем как приступить к изучению функционала, обратим внимание на следующее обстоятельство. Известно, что по данному уравнению функционал восстанавливается с точностью до членов типа дивергенции. Так как такие члены не влияют на вид уравнения Эйлера, то их, естественно, можно не учитывать. Очевидно, что если функционал допускает некоторую группу $G_i$ преобразований, то эта группа будет автоматически оставлять инвариантным соответствующее уравнение Эйлера. В дальнейшем увидим, что эта группа, вообще говоря, является подгруппой группы $G_a$, допускаемой соответствующим уравнением Эйлера. Исследование групповых свойств интеграла было начато еще Ли, но только в работах Нетер [2] был дан общий метод получения законов сохранения. Простой и подробный вывод теорем Нетер (в частном случае) дан в [3]. Так как теория интегральных инвариантов является частным случаем теории дифференциальных инвариантов, то это позволяет распространить на интеграл всю теорию, развитую в [4]. Приводимые ниже построения относятся, конечно, к интегралу любого вида

$$J=\iint\ldots\int f\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\right)dx_1\ldots dx_n$$

Рассмотрим функционал

$$J=\iint\rho_0(\psi)\,(1-V^2)^{1/\gamma-1}\left(1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}V^2\right)dx\,dy=\iint\rho_0(\psi)\,F(V^2)\,dx\,dy=$$

$$=\iint f(x,\ y,\ \psi,\ \psi_x,\ \psi_y)\,dx\,dy \tag{1}$$

Здесь $\psi$ — функция тока, $V$ — модуль скорости, $\gamma$ — показатель адиабаты, $\rho_0$ — плотность торможения, остальные обозначения очевидны. Обратимся теперь к построению группы, оставляющей инвариантным интеграл (1). Будем рассматривать точечную группу преобразований

$$x^*=f^1(x,y,\psi),\qquad y^*=f^2(x,y,\psi),\qquad \psi^*=f^3(x,y,\psi)$$

Функционал (1) назовем инвариантным относительно преобразований этой точечной группы, если выполняется условие

$$\iint\limits_{D(x)} f(x,y,\psi,\psi_x,\psi_y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D(x^*)} f(x^*,\ y^*,\ \psi^*,\ \psi_{x^*}{}^*,\ \psi_{y^*}{}^*)\,dx^*\,dy^* \tag{2}$$

Пусть группе преобразований, оставляющей инвариантным функционал (1), соответствует оператор однопараметрической подгруппы

$$X=\xi^1\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2\frac{\partial}{\partial y}+\xi^3\frac{\partial}{\partial\psi}$$

Продолженный оператор $X^*$ имеет вид

$$X^*=X+\eta^1\frac{\partial}{\partial p}+\eta^2\frac{\partial}{\partial q}\,,\quad p=\psi_x,\quad q=\psi_y$$

Необходимое условие инвариантности функционала (1) относительно оператора $X$ записывается так:

$$X^*f+f\,(\xi_x{}^1+p\xi_\psi{}^1+\xi_y{}^2+q\xi_\psi{}^2)=0 \tag{3}$$

Выражение (3) получается следующим образом. Оператору $X$ отвечают преобразования переменных, вызванные близким к единичному преобразованием однопараметрической подгруппы ($t$ — параметр)

$$x^*=x+t\xi^1,\qquad y^*=y+t\xi^2,\qquad \psi^*=\psi+t\xi^3,\qquad p^*=p+t\eta^1,\qquad q^*=q+t\eta^2$$

Подставляя эти значения в (1) и учитывая только члены, линейные относительно $t$, нетрудно получить

$$J^* - J = \iint\limits_{D(x)} [X^*f + f(\xi_x^1 + p\xi_\psi^1 + \xi_y^2 + q\xi_\psi^2)]\, dx\, dy$$

Так как это равенство выполняется для любой области, то отсюда и получается условие (3). Достаточность этого условия доказана, например, в работе Нетер [2].

Для рассматриваемого функционала из (1) вытекает $f_x = f_y = 0$, поэтому уравнение (3) примет вид

$$\xi^3 f_\psi + \eta^1 f_p + \eta^2 f_q + f(\xi_x^1 + \xi_\psi^1 p + \xi_y^2 + q\xi_\psi^2) = 0 \tag{4}$$

Из (1) находим

$$f_\psi = \rho_0' F, \quad f_p = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\rho_0 p (1 - V^2)^{1/(1-\gamma)}, \quad f_q = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} q (1 - V^2)^{1/(1-\gamma)} \tag{5}$$

Как известно [4]. коэффициенты $\eta^i$ продолженного оператора определяются по формулам

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \xi_x^3 + p\xi_\psi^3 - p(\xi_x^1 + p\xi_\psi^1) - q(\xi_x^2 + q\xi_\psi^2) \\ \eta^2 &= \xi_y^3 + q\xi_\psi^3 - p(\xi_y^1 + q\xi_\psi^1) - q(\xi_y^2 + q\xi_\psi^2) \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), находим

$$\begin{gathered} \xi^3 \frac{d \ln \rho_0}{d\psi} + \xi_x^1 + \xi_y^2 + p(A\xi_x^3 + \xi_\psi^1) + q(A\xi_y^3 + \xi_\psi^2) - \\ - pqA(\xi_x^2 + \xi_y^1) + p^2 A(\xi_\psi^3 - \xi_x^1) + q^2 A(\xi_\psi^3 - \xi_y^2) - p^2 q A\xi_\psi^2 - pq^2 A\xi_\psi^1 = 0 \\ \left(A = \frac{2\gamma}{(\gamma - 1) F(V^2)} (1 - V^2)^{1/(1-\gamma)}\right) \end{gathered} \tag{7}$$

Так как коэффициенты $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ не зависят от $pq$, то, приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $p$, $q$, получаем следующую систему уравнений, определяющих величины $\xi^i$

$$\xi^3 \frac{d \ln \rho_0}{d\psi} = -(\xi_x^1 + \xi_y^2) \tag{8}$$

$$\xi_x^3 = \xi_\psi^1, \quad \xi_y^3 = \xi_\psi^2, \quad \xi_x^2 + \xi_y^1 = 0, \quad \xi_\psi^3 - \xi_x^1 = 0, \quad \xi_\psi^3 - \xi_y^2 = 0 \tag{9}$$

Таким образом, для определения величин $\xi^i$ оператора $X$ нужно решить систему (8), (9). При применении групповых методов к дифференциальным уравнениям часто исследуется вопрос об особом выборе параметрических функций, который может влиять на широту группы, допускаемой данной системой уравнений [4]. Совершенно аналогичный вопрос может быть поставлен и в нашем случае. В самом деле, в нашем функционале (1) есть, вообще говоря, две произвольные функции: $\rho_0$ и $F(V^2)$. Выбор функции $\rho_0$ связан с определенным выбором закона распределения энтропии по частицам, т. е. с определенным классом вихревых течений, который может допускать более широкую группу преобразований. Функцию $F(V^2)$ тоже можно считать свободной, однако ограничиваемся случаем, когда она считается фиксированной и поэтому не входит в систему определяющих уравнений.

Из первых двух уравнений (9) очевидно, что

$$\xi^1 = \xi^1(x, y), \qquad \xi^2 = \xi^2(x, y), \qquad \xi^3 = \xi^3(\psi) \tag{10}$$

Так как $\xi^3$ не зависит от $x$, $y$, а $\xi^1$, $\xi^2$ — от $\psi$, то из (8) следует, что левая и правая части равны константе; с другой стороны, из последних двух уравнений (9) видно, что $\xi_x^1 + \xi_y^2 = 2\xi_\psi^3$, отсюда окончательно получаем условия

$$\xi^3 \frac{d \ln \rho_0}{d\psi} = k, \qquad \frac{d\xi^3}{d\psi} = -\frac{k}{2} \qquad (k = \mathrm{const}) \quad (\text{в частности } k = 0) \tag{11}$$

Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Это условие может выполняться при

(а) $\rho_0 = \mathrm{const}$, $\xi^3 = \mathrm{const}$, (б) $\xi^3 = 0$, $\rho_0 = \rho_0(\psi)$

Здесь $\rho_0(\psi)$ — функция от $\psi$. Рассмотрим случай (б), отвечающий вихревым течениям. Последние две формулы (9) дают

$$\xi^1 = \xi^1(y), \qquad \xi^2 = \xi^2(x), \qquad \xi^3 = 0$$

Теперь из третьего уравнения (9) получаем

$$\xi^1 = ay + c_1, \qquad \xi^2 = -ax + c_2$$

Конечные преобразования находятся элементарно

$$x^* = x\cos\omega - y\sin\omega + d_1, \qquad y^* = x\sin\omega + y\cos\omega + d_2, \qquad \psi^* = \psi \quad (12)$$

Таким образом, в общем случае вихревых течений функционал (1) инвариантен относительно группы (12). Очевидно, что это справедливо и относительно уравнения Крокко. Смысл группы (12) очевиден.

Случай (а) рассматривается совершенно аналогично. Он соответствует безвихревым течениям. Конечные преобразования группы имеют здесь вид

$$x^* = x\cos\omega - y\sin\omega + d_1, \qquad y^* = x\sin\omega + y\cos\omega + d_2, \qquad \psi^* = \psi + d_3 \quad (13$$

Таким образом, показано, что среди плоских течений наиболее широкой группой обладают потенциальные течения. По-видимому, этот факт находит отражение в том, что такие течения являются наиболее простыми. Обратимся теперь к случаю $k \neq 0$ и покажем, что в этом случае существуют вихревые течения, допускающие более широкую группу, чем (12). Дифференцируем первое уравнение (11) по $\psi$, а затем, используя эти же уравнения, получим

$$\frac{d^2 \ln \rho_0}{d\psi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \ln \rho_0}{d\psi}\right)^2 = 0 \quad (14)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\rho_0 = \frac{d_0}{(\psi + d_{00})^2} \quad (15)$$

Обратимся опять к функционалу (1). Введем замену переменных

$$x^* = a_0 x, \qquad y^* = a_0 y, \qquad \psi^* = a_0\psi + b_0$$

В результате такой замены функционал (1) перейдет в функционал того же вида с функцией $\rho_{10}(\psi^*) = a_0^2 \rho_0(\psi)$.

Два функционала, у которых функции $\rho_0$ связаны условием

$$\rho_{10}(\psi^*) = a_0^2\, \rho_0(\psi)$$

назовем эквивалентными. Заметим теперь, что если интеграл $J$ инвариантен относительно некоторой группы $G$, то и $cJ$ ($c = \mathrm{const}$) тоже инвариантен относительно той же группы. Это говорит о том, что $f$ (а следовательно и $\rho_0$) определяется с точностью до множителя. Используя это замечание и преобразование эквивалентности, приведем (15) к виду

$$\rho_0(\psi) = \frac{1}{\psi^2} \quad (16)$$

Теперь из (11) получаем $\xi_\psi^3 = -{}^1/_2 k$. Обозначим константу $-{}^1/_2 k$ через $\lambda$. Два последних уравнения (9) дают

$$\xi^1 = \lambda x + \varphi^1(y), \quad \xi^2 = \lambda y + \varphi^2(x), \quad \xi^3 = \lambda\psi$$

Из третьего уравнения (9) имеем $\varphi_x^2 = -\varphi_y^1$. Следовательно, функции $\varphi^i$ имеют вид

$$\varphi^1 = -A_0 y + a_1, \quad \varphi^2 = A_0 x + a_2$$

Окончательно находим следующие выражения:

$$\xi^1 = \lambda x - A_0 y + a_1, \quad \xi^2 = \lambda y + A_0 x + a_2, \quad \xi^3 = \lambda\psi$$

Коэффициент $\lambda$ можно считать равным единице, так как оператор $\chi$ определяется с точностью до множителя. Конечные преобразования таковы:

$$x^* = cx\cos\omega - cy\sin\omega + d_1, \qquad y^* = cx\sin\omega + cy\cos\omega + d_2, \qquad \psi^* = c\psi \quad (17)$$

Тождественному преобразованию отвечают значения $\omega = d_1 = d_2 = 0$, $c = 1$. Таким образом, для особых значений $\rho_0$, даваемых (16), получаем четырехчленную группу преобразований. Группа (17), кроме сдвигов и вращений в плоскости $x, y$, содержит также преобразование растяжения. Для особых значений $\rho_0$ из (16) легко находим соответствующий закон распределения энтропии $S = \mathrm{const}\cdot\ln\psi$. Группа (16), как и группа(13), содержит четыре параметра.

Как известно [2,3], наличие у интеграла $r$-параметрической группы дает нам автоматически $r$ соотношений типа дивергенции. В случае, если в интеграл входит только одна независимая переменная, эти соотношения дивергенции дают нам $r$ первых интегралов. Наличие у интеграла (1) трехпараметрической группы (12) позволяет легко написать эти соотношения типа дивергенции. Два из этих соотношений, как нетрудно проверить, дают закон непрерывности потока количества движения, а третье есть их следствие. Инвариантность функционала (1) относительно оператора $X$ позволяет выписать и обыкновенные дифференциальные уравнения, которые при этом могут быть получены из уравнения Крокко. Рассмотрим, например, оператор

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \psi\frac{\partial}{\partial \psi}$$

соответствующий $\omega = d_1 = d_2 = 0$ (см. (17)). Его инварианты таковы:

$$J^1 = x / y = \vartheta, \qquad J^2 = \psi / x$$

Следовательно, решение можно искать в виде $\psi = x\varphi(\vartheta)$. Подстановка этого выражения в уравнение Крокко приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\vartheta\varphi'' \left[\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) + \frac{2uv}{a^2}\vartheta + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\vartheta^2\right] = \frac{(1 - M^2)}{2\gamma g R \vartheta\varphi(\vartheta)} (1 - V^2)^{\gamma+1/\gamma-1}$$

Решение этого уравнения дает вихревое течение, для которого скорость постоянна вдоль луча. Положим формально правую часть равной нулю (что соответствует потенциальным течениям), тогда слева останется произведение двух множителей. Первый из них, приравненный нулю, дает равномерный поток, второй дает течение Прандтля — Майера. В самом деле, направляя ось $x$ по скорости, получим $u = V$, $v = 0$, тогда из второго множителя сразу получаем $\vartheta = \sqrt{M^2 - 1}$, и проекция скорости на направление луча равна

$$\frac{V}{1 + \vartheta^2} = a$$

Остановимся теперь на связи между группами $G_i$ и $G_a$. Взаимоотношения между $G_i$ и $G_a$ многообразны, поэтому рассмотрим только наиболее характерные случаи. Включение $G_i \subseteq G_a$ очевидно. Рассмотрим множество $G_a - G_i$ и выясним, какие преобразования оно содержит.

1) Наиболее часто встречающиися случай, это когда множество $G_a - G_i$ состоит из преобразований, которые дают некоторый множитель перед интегралом при преобразовании функционала. В самом деле, если функционал

$$J = \int f(x, y, y')\, dx$$

при преобразовании $x^* = \varphi^1(x, y)$, $y^* = \varphi^2(x, y)$ переходит в функционал

$$J^* = \lambda \int f(x^*, y^*, y^{*\prime})\, dx^*$$

где $\lambda$ — групповой множитель, то очевидно, что это преобразование не принадлежит $G_i$, но принадлежит $G_a$.

Как пример можно привести уравнение Крокко при $S = \text{const}$. В этом случае оно, как легко проверить, допускает преобразование $x^* = \lambda x$, $y^* = \lambda y$, $\psi^* = \lambda\psi$, если же будем рассматривать соответствующий функционал

$$J = \iint F(V^2)\, dx\, dy,$$

то при этом же преобразовании он переходит в

$$J^* = \frac{1}{\lambda^2}\iint F(V^{*2})\, dx^*\, dy^* = \frac{1}{\lambda^2} J$$

и условие $J^* = J$ не соблюдается. Таким образом, эти преобразования теряются при переходе от уравнения к функционалу.

2) Другой, часто встречающийся случай,— когда уравнение Эйлера допускает бесконечную группу. Рассмотрим здесь три примера.

а) Функционал

$$J = \iint (\psi_x{}^2 + \psi_y{}^2)\, dx\, dy$$

Ясно, что этот пример относится к случаю (1).

б) Уравнение Чаплыгина с соответствующим функционалом. Известно [4], что если отбросить тривиальные преобразования, состоящие в умножении решения на множитель и в прибавлении к решению любого решения уравнения Чаплыгина, то группа $G_a$ будто либо одно-, либо трехпараметрической. Соответствующий функционал, как можно показать, также дает либо одно-, либо трехпараметрическую группу. Таким образом, по исключении тривиальных преобразований для уравнений Чаплыгина получим $G_a = G_i$.

в) Функционал

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

с очевидным линейным уравнением Эйлера $y'' = 0$. Экстремалями этого функционала являются прямые. Проективные преобразования

$$x^* = \frac{ax + by + c}{a_0x + b_0y + c_0}, \qquad y^* = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}$$

переводят прямые в прямые, и, следовательно, уравнение $y'' = 0$ переходит в $y^{*''} = 0$. Эти проективные преобразования принадлежат группе $G_a$, между тем как группа $G_i$ для функционала состоит из группы движений в плоскости $x$, $y$.

3) Наконец, возможен третий случай, когда в результате преобразования от $x, y, \psi$ к $x^*$, $y^*$, $\psi^*$ квадратичная форма $\omega = f(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y)\, dxdy$ переходит в форму

$$\omega^* = \lambda f(x^*, y^*, \psi^*, \psi_{x^*}{}^*, \psi_{y^*}{}^*)\, dx^*dy^* + \mu \operatorname{div} B(x^*, y^*, \psi^*)\, dx^*dy^*$$

где $\lambda$, $\mu$ — групповые множители, $B(\ldots)$ — некоторая функция. Очевидно, что такие преобразования входят в множество $G_a$, ибо уравнение Эйлера не меняется при добавлении членов типа дивергенции, но не входит в множество $G_i$.

Поступила 28 II 1965

ЛИТЕРАТУРА


1. Суровихин К. П. Применение вариационных методов в плоских вихревых течениях газа. Вестн. Моск. ун-та, 1963, № 4.
2. Noether E. Invariante Variationsprobleme «Nachrichten von der Kön. Ges. des Wiss. zu Gottingen», 1918, B. 2 (русск. перев.: Сб. Вариационные принципы механики под ред. Л. С. Полака). Физматгиз, 1959.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, 1962.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, 1962.


---

# ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

*Э. П. Волчков, В. Я. Левченко*

*(Новосибирск)*

Одним из эффективных гидродинамических методов защиты элементов машин (стенки камер сгорания, сопла двигателей и т. п.) от воздействия высокотемпературных потоков газа является газовая завеса. Газовая завеса может быть организована, например, подачей охлаждающего газа через пористый участок, через одну или ряд щелей на начальном участке охлаждаемого объекта. Исследованию эффективности газовой завесы посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ [1-11]. Ниже приводится решение, позволяющее вести расчет различных случаев завесы одним способом. В основу рассуждений заложена физическая модель, предложенная в работе [4]: в случае вдува охладителя через пористую вставку (фиг. 1, *а*) или щель (фиг. 1, *б*) в сечении $\Delta x = 0$ (начиная с которого падает эффективность $\theta$) существует развившийся пограничный слой с соответствующими значениями толщины потери энергии $\delta_{e0}^{**}$ и толщины потери импульса $\delta_0^{**}$. На основе полученного решения удовлетворительно обобщаются экспериментальные данные различных авторов. Из анализа теоретических формул и экспериментальных данных видно, что способ подачи охладителя не оказывает существенного влияния на эффективность завесы.

Эффективность газовой завесы определяется адиабатической температурой стенки. Ниже дается вывод формулы для ее расчета.