

ТЕПЛОЙ ВЗРЫВ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов Н. М. Пручкина

(Москва)

Тепловой взрыв в стационарной постановке рассмотрен Д.А. Франк-Каменецким [1]. В работах [2, 3] на примере течения в цилиндрической трубе ньютоновской и неньютоновской жидкостей с сильной (нелинейной) зависимостью вязкости от температуры было показано, что явление, аналогичное тепловому взрыву, возможно при течении химически инертной жидкости. В работе [4] для ньютоновской жидкости с такой же зависимостью вязкости от температуры рассматривались куэттовское течение и течение между двумя вращающимися круговыми цилиндрами. Было показано, что, хотя уравнения теплового баланса и сводятся к уравнениям стационарной теории теплового взрыва для соответствующих областей, однако явления гидродинамического теплового «взрыва» в этих случаях не наблюдается. Отмечено, что это явление характерно только для напорных течений.

Ниже исследуется тепловой взрыв при пуазейлевском течении вязкой реакционноспособной жидкости в бесконечной круглой цилиндрической трубе и при движении жидкости между двумя бесконечными вращающимися цилиндрами с учетом совместного действия химических и механических источников тепла.

1. Течение в бесконечной круглой трубе. Рассмотрим осесимметричное ламинарное течение реакционноспособной вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной круглой трубе радиуса r_0 , на поверхности которой поддерживается постоянная температура T_0 . Течение происходит под действием постоянного градиента давления, плотность жидкости постоянная, реакция нулевого порядка. Будем считать, что динамическая вязкость от температуры зависит по экспоненциальному закону

$$\mu(T) = \mu_0 \exp U/RT \tag{1.1}$$

где μ_0 , U — константы, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура.

Нестационарную систему уравнений движения и теплового баланса с учетом диссипации энергии и тепловыделения от химической реакции можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{J} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + Qk_0 \exp \frac{-E}{RT} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь v — скорость, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности жидкости, J — механический эквивалент теплоты, Q — тепловой эффект реакции, k_0 — предэкспонент, E — энергия активации.

Будем считать, что в начальный момент времени температура жидкости равна температуре стенок трубы и профиль скоростей соответствует изотермическому течению, т. е. [5]

$$T(r) = T_0, \quad v(r) = \frac{br_0^2}{4\mu(T_0)} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \quad \text{при } t=0 \quad \left(b = - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \tag{1.3}$$

Систему уравнений (1.2) нужно решить при начальных (1.3) и граничных условиях

$$v = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при } r = r_0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (1.4)$$

Приводя (1.2) — (1.4) к безразмерному виду, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= 1 + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp \frac{-\alpha \theta}{1 + \beta \theta} x \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + 4\kappa_1 \exp \frac{-\alpha \theta}{1 + \beta \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \delta \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta} & \\ \theta(x) = 0, \quad w(x) = 1/4(1 - x^2) \quad \text{при } \tau = 0 & \\ w = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 & \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$w = \frac{\mu(T_0)}{br_0^2} v, \quad \theta = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0), \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{\lambda}{c\rho r_0^2} t$$

— безразмерные переменные,

$$\begin{aligned} \kappa_1 = \frac{b^2 r_0^4 E}{4J\lambda\mu(T_0)RT_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{QEk_0 r_0^2}{\lambda RT_0^2} \exp \frac{-E}{RT_0}, \quad P = \frac{c\mu(T_0)}{\lambda}, \quad \beta = \frac{RT_0}{E}, \\ \alpha = \frac{U}{E} \end{aligned}$$

— безразмерные параметры.

Параметр κ_1 характеризует интенсивность тепловыделения от внутреннего трения и отличается от аналогичного параметра κ из работы [2] постоянным множителем ($\kappa_1 = 4\kappa/\alpha$); δ — известный из теории теплового взрыва параметр Д. А. Франк-Каменецкого [1]; P — критерий Прандтля; β — безразмерный параметр, обычно малая величина; α — отношение энергии активации вязкого течения к энергии активации химической реакции.

При $P \gg 1$ время гидродинамической релаксации намного меньше времени тепловой релаксации и процесс с гидродинамической точки зрения протекает квазистационарно, т. е. время выхода на стационарный режим определяется уравнением теплопроводности, профиль же скоростей быстро подстраивается под изменение температуры. Далее будут приведены кривые выхода температуры на стационарный режим при различных значениях P .

Строго говоря, в качестве начального условия (1.6) следовало бы брать не развитый профиль скоростей, а состояние покоя. Однако следует отметить, что начальное распределение скоростей может оказать влияние только на период индукции, а на такие характеристики теплового взрыва, как критическое условие и предвзрывной разогрев, оно не влияет. Но при $P \gg 1$ (случай, для которого здесь проведены расчеты) период индукции намного больше времени гидродинамической стабилизации, поэтому начальное распределение скоростей не играет существенной роли, и за начальное условие можно принять развитый профиль скоростей.

При квазистационарном протекании процесса можно положить $\partial w/\partial \tau = 0$. Интегрируя первое уравнение системы (1.5) и используя граничное условие на оси трубы, получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2} x \exp \frac{\alpha \theta}{1 + \beta \theta} \quad (1.7)$$

При помощи (1.7) исключим градиент скорости из второго уравнения системы (1.5)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \kappa_1 x^2 \exp \frac{\alpha \theta}{1 + \beta \theta} + \delta \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta} \quad (1.8)$$

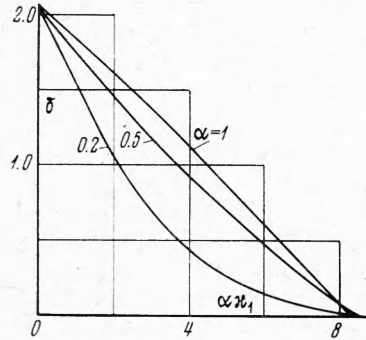
Таким образом, уравнение теплового баланса можно интегрировать независимо от уравнения гидродинамики. Профиль температур определяется из уравнения (1.8) с начальными и граничными условиями (1.6). Определив θ , из (1.7) находим профиль скоростей.

Если в уравнении (1.8) положить $\kappa_1 = 0$ (механические источники тепла отсутствуют), то получим задачу о тепловом взрыве в цилиндрической области. Известно, что критическое значение параметра Д. А. Франк-Каменецкого δ_* , максимальный предвзрывной разогрев θ_* и адиабатический период индукции τ_*' ($\tau' = \delta\tau$) слабо зависят от параметра β . Для этих величин найдены следующие приближенные формулы [6,7]:

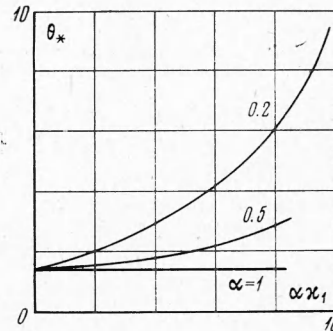
$$\delta_*(\beta) \approx \delta_*(1 + \beta), \quad \theta_*(\beta) \approx \theta_*(1 + 2\beta), \quad \tau_*'(\beta) \approx \tau_*'(1 + 2\beta) \quad (1.9)$$

Множители при скобках означают значения соответствующих величин при $\beta = 0$ ($\delta_* = 2$, $\theta_* = 1.38$, $\tau_*' = 1$; см [1]).

Положив в (1.8) $\delta = 0$ (отсутствуют химические источники тепла), имеем задачу о гидродинамическом тепловом «взрыве» [2]. Учитывая различие безразмерной температуры в данной работе и в работе [2], получаем



Фиг. 1



Фиг. 2

следующие приближенные формулы для критического значения параметра κ_1 и максимального предвзрывного разогрева при гидродинамическом тепловом «взрыве»

$$\kappa_{1*} \approx \frac{8}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad \theta_* \approx \frac{1.38}{\alpha} \left(1 + \frac{2\beta}{\alpha}\right) \quad (1.10)$$

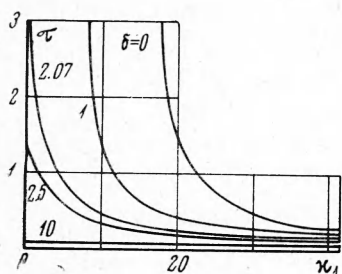
При совместном действии обоих типов источников тепла в критическом режиме существует функциональная зависимость между δ и κ_1 . Из сказанного вытекает, что кривые, построенные в координатах δ и $\alpha\kappa_1$ для различных значений α , будут начинаться в точке $\delta_*(\beta)$ на оси ординат и заканчиваться в точке $\alpha\kappa_{1*}$ на оси абсцисс. Эти кривые отделяют область изменения параметров δ и κ_1 , в которой происходит установление стационарных полей температур и скоростей, от области, в которой происходит тепловой взрыв.

Получить зависимость δ от κ_1 в явном виде не представляется возможным, так как аналитическое решение уравнения (1.8) неизвестно даже при $\beta = 0$.

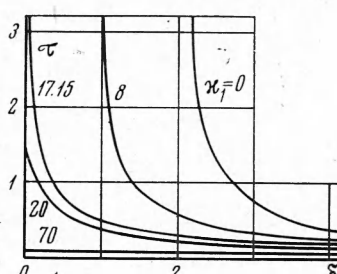
Уравнение (1.8) интегрировалось численно на электронно-вычислительной машине. Вычисления проводились при одном и том же значении $\beta = 0.03$. На фиг. 1 изображены зависимости $\delta_* = f(\alpha\kappa_1)$ для значений $\alpha = 1, 0.5, 0.2$. Область, ограниченная осями координат и кривой, является областью спокойного протекания процес-

са, установления стационарных полей температур и скоростей. Если же точка с координатами δ и $\alpha \kappa_1$ находится вне этой области, то стационарный режим невозможен, происходит тепловой взрыв.

На фиг. 2 для тех же трех значений α представлены кривые зависимости максимального предвзрывного разогрева от $\alpha \kappa_1$. Так как при $\kappa_1 = 0$ имеет место тепловой взрыв без механических источников тепла и уравнение (1.8) при этом не содержит α , то все кривые начинаются из одной точки, приблизительно определяемой формулой (1.9).



Фиг. 3



Фиг. 4

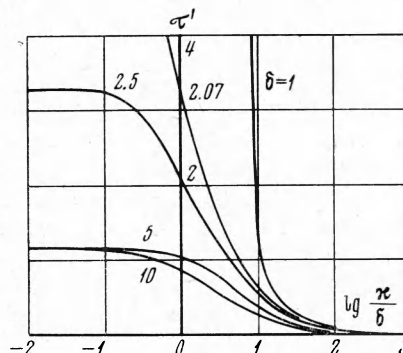
Концы кривых соответствуют случаю гидродинамического теплового «взрыва», значения максимального «предвзрывного» разогрева при этом приблизительно определяются формулой (1.10). Предвзрывной разогрев при $\alpha = 1$ почти не меняется, при $\alpha < 1$ растет, достигая наибольшей величины при $\delta = 0$.

На фиг. 3—5 представлены кривые зависимости периода индукции от параметров κ_1 , δ и κ_1 / δ , вычисленные при $\alpha = 0.5$. На фиг. 3 изображены зависимости периода индукции от параметра κ_1 , полученные при различных значениях параметра D . А. Франк-Каменецкого. Первая кривая получена для случая гидродинамического теплового взрыва, третья кривая — для случая теплового взрыва без механических источников тепла. Для значений $0 < \delta < 2.07$ при приближении κ_1 к критическому значению период индукции неограниченно возрастает. При $\delta > 2.07$ период индукции ограничен для всех значений κ_1 и при больших значениях δ очень слабо зависит от κ_1 (имеет место адиабатический тепловой взрыв).

На фиг. 4 изображены аналогичные зависимости периода индукции от параметра δ , полученные для пяти значений параметра κ_1 . Первая кривая выражает зависимость τ от δ при химическом тепловом взрыве, третья кривая — при гидродинамическом тепловом «взрыве».

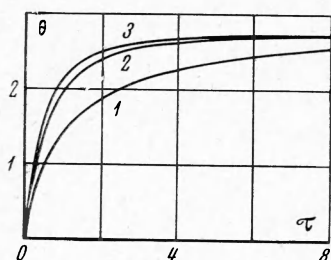
На фиг. 5 в полулогарифмических координатах представлены кривые зависимости периода индукции $\tau' = \delta \tau$ от логарифма отношения κ_1 / δ для пяти значений δ . Безразмерное время τ' отличается от τ масштабным коэффициентом δ . Для значений $0 < \delta < 2.07$ при приближении κ_1 к критическому значению τ' неограниченно растет. При $\delta > 2.07$ τ' ограничено при всех значениях κ_1 , с ростом δ убывает и при малых значениях κ_1 стремится к адиабатическому периоду индукции, определяемому приблизительно формулой (1.9). Из фиг. 5 видно, что кривые при $\delta = 5$ и $\delta = 10$ характеризуют адиабатический тепловой взрыв. При малых значениях отношения κ_1 / δ , когда влияние механических источников тепла незначительное, периоды индукции стремятся к постоянной величине. С ростом κ_1 вклад механических источников тепла возрастает и период индукции уменьшается.

Несколько слов о применимости квазистационарного уравнения (1.8). Для определения таких характеристик теплового взрыва, как критическое условие и предвзрывной разогрев, уравнение (1.8) применимо для всех значений критерия Прандтля, как больших, так и малых. В самом деле, критические значения параметров определяются из условия отсутствия стационарного решения системы (1.5), а стационарные решения этой системы и квазистационарного уравнения (1.8) совпадают. Величина критерия Прандтля оказывает влияние на временную характеристику теплового взрыва — на период индукции, а также на время выхода на стационарный режим. На



Фиг. 5

(1.5) и (1.8) видно, что разница между профилями температур, определяемыми из нестационарной системы уравнений и квазистационарного уравнения, уменьшается с уменьшением κ_1 и исчезает при $\kappa_1 = 0$. Наибольшее расхождение между решениями системы (1.5) и уравнения (1.8) при заданном P имеет место при $\delta = 0$ и κ_1 наибольшим, т. е. при гидродинамическом тепловом взрыве.



Фиг. 6

Для оценки влияния критерия Прандтля на критические условия и на время выхода на стационарный режим были проделаны специальные расчеты по нестационарной системе (1.5) и квазистационарному уравнению (1.8) при $\delta = 0$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.03$ и четырех значениях критерия Прандтля: $P = 1, 10, 100, 1000$. Как и следовало ожидать, критическое значение $\kappa_{1*} = 17.15$ и максимальный предвзрывной разогрев $\theta_* = 3.16$ не зависят от P и совпадают с соответствующими величинами, определенными по квазистационарному уравнению. Вблизи критических условий под взрывным пределом при $\kappa = 17$ были построены кривые зависимости температуры на оси цилиндра от времени (фиг. 6). Кривая 1 построена при $P = 1$, кривая 2 — при $P = 10$. Кривые при $P = 100, 1000$ и полученная по квазистационарному уравнению практически совпадают (кривая 3). Из фигуры видно, что уже при $P = 10$ квазистационарное уравнение дает решение, мало отличающееся от решения нестационарной системы.

2. Течение между двумя вращающимися цилиндрами. Пусть вязкая реакционноспособная жидкость находится между двумя соосными бесконечными цилиндрами, внутренний из которых неподвижен, а внешний вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Радиусы и температуры этих цилиндров соответственно r_1, r_0 и T_1, T_0 . Зависимость вязкости от температуры описывается формулой (1.1).

Система уравнений движения и теплового баланса с учетом диссипации энергии и химической реакции записывается в форме

$$\rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{J} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + Q k_0 \exp \frac{-E}{RT} \quad (2.1)$$

Здесь ω — угловая скорость вращения частицы жидкости, остальные обозначения прежние.

Будем считать, что в начальный момент времени температура жидкости равна температуре внешнего цилиндра и профиль угловых скоростей соответствует изотермическому течению, т. е. [5]

$$T(r) = T_0, \quad \omega(r) = \frac{\omega_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) \quad \text{при } t = 0 \quad (2.2)$$

Систему уравнений (2.1) нужно решить при начальных условиях (2.2) и граничных условиях

$$\omega = 0, \quad T = T_1 \quad \text{при } r = r_1, \quad \omega = \omega_0, \quad T = T_0 \quad \text{при } r = r_0 \quad (2.3)$$

Приводя (2.1) — (2.3) к безразмерному виду, получаем

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{1}{x^3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp \frac{-\alpha \theta}{1 + \beta \theta} x^3 \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \kappa \exp \frac{-\alpha \theta}{1 + \beta \theta} \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \delta \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}$$

$$\theta(x) = 0, \quad \Omega(x) = \frac{1}{1 - d^2} \left(1 - \frac{d^2}{x^2} \right) \quad \text{при } \tau = 0 \quad (2.5)$$

$$\theta = \theta_1, \quad \Omega = 0 \quad \text{при } x = d, \quad \theta = 0, \quad \Omega = 1 \quad \text{при } x = 1$$

