связан со второй стадией — разделением материала на части. Этот случай описывается в модели [1], которая приводит к бо́льшим значениям η и λ, чем данная модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов А. Г.** Особенности взрывной деформации и разрушения труб // Пробл. прочности.— 1976.— № 11.
2. **Иванов А. Г., Минеев В. Н.** О масштабных эффектах при разрушении // ФГВ.— 1979.— № 5.
3. **Иванов А. Г., Кочкин Л. И., Новиков В. Ф., Фоломеева Т. М.** Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали // ПМТФ.— 1983.— № 1.
4. **Иванов А. Г.** Феноменология разрушения и откол // ФГВ.— 1985.— № 2.
5. **Майерс М. А., Мурр Л. Е.** Образование дефектов при деформации ударной волной // Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов/Под ред. М. А. Майерса и Л. Е. Мурра: Пер. с англ.— М.: Металлургия, 1984.
6. **Курран Д. Р., Симэн Л., Шоки Д. А.** Микроструктура и динамика разрушения // Там же.
7. **Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др.** Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.
8. **Киселев С. П., Фомин В. М.** О разлете оболочки с учетом разрушения и истечения продуктов детонации между осколками // ПМТФ.— 1989.— № 4.
9. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1967.
10. **Клифтон Р. Дж.** Динамическая пластичность // Успехи прикладной механики.— М.: Мир, 1986.
11. **Годунов С. К., Дерибас А. А., Мали В. И.** О влиянии вязкости материала на процесс образования струй при соударениях металлических пластин // ФГВ.— 1975.— № 1.
12. **Сергеев-Альбов Н. Н.** Остаточные напряжения и вязкость при высокоскоростном деформировании металлов // ПМТФ.— 1983.— № 2.
13. **Жукова Т. В., Макаров П. В., Платова Т. М. и др.** Исследование вязких и релаксационных свойств металлов в ударных волнах методами математического моделирования // ФГВ.— 1987.— № 1.
14. **Борисевич В. К., Сабелькин В. П., Солодянкин С. П. и др.** Динамические характеристики некоторых металлов и сплавов // Импульсная обработка давлением.— Харьков: ХАИ, 1981.— Вып. 9.
15. **Бернштейн М. Л., Займовский В. А.** Структура и механические свойства металлов.— М.: Металлургия, 1970.

г. Новосибирск *Поступила 7/VII 1989 г., в окончательном варианте — 17/X 1989 г.*

УДК 539.384/385.001 : 539.216.1

И. Л. Батаронов, А. М. Рощупкин

ТЕОРИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ НИТЕВИДНЫХ КРИСТАЛЛОВ

1. Введение. Пластическая деформация кристаллов сопровождается сложной эволюцией внутренних полей упругих напряжений, обусловленной самосогласованным движением конгломератов дефектов кристалла на различных структурных уровнях деформации [1]. Определенная роль в формировании указанных упругих полей принадлежит поверхности кристалла [2], которая, таким образом, оказывается включенной в число факторов, влияющих на движение дефектной структуры. В силу этого при микроскопическом характере некоторых линейных размеров кристалла определяющим в кинетике пластической деформации выступает тот структурный уровень деформации, размер которого сопоставим с размером кристалла. В этом отношении нитевидные кристаллы (НК)— уникальные модельные объекты для изучения в «чистом виде» особенностей развития пластической деформации в ансамблях дефектов разных ступеней иерархии структурных уровней. В экспериментальном отношении удобными методами исследования пластичности НК являются кручение и изгиб [3], причем образующаяся дислокационная структура хорошо выявляется прямыми методами [4]. Представляет интерес получение общих соотношений, связывающих макроскопическую реакцию НК (т. е. величину кручения) на присутствующие в нем дислокации с характеристиками дислокационной структуры, что выступает в качестве базиса для теоретического анализа пластического поведения НК при кручении, а также, в общем случае, и при изгибе.

В настоящей работе в приближении макроскопически усредненного описания дислокационной структуры рассмотрены упругое кручение и как обобщение изгиб нитевидных кристаллов, обусловленные присутствующими в кристалле дислокациями. Из условия минимума упругой энергии найдены соотношения, определяющие макроскопическую реакцию нитевидного кристалла на введенные в него дислокации.

2. Постановка задачи. Нахождение реальных упругих полей дислокаций при наличии близко расположенной поверхности — очень сложная математическая задача [2], удовлетворительного решения которой на сегодняшний день нет. В частности, задача о кручении НК, содержащего дислокации, в настоящее время решена в общем виде лишь для случая прямолинейных винтовых дислокаций, параллельных оси кристалла. Как показано Эшелби [2], величина угла закручивания НК в пренебрежении краевыми эффектами на его торцах выражается через значение функции кручения Прандтля в точках поперечного сечения кристалла, через которые проходят дислокации. Возможность получения аналитического результата в данном случае объясняется двумерным характером упругой задачи, возникающим из-за трансляционной инвариантности рассмотренной дислокационной структуры относительно произвольных смещений вдоль оси НК. В данном вопросе можно продвинуться вперед, если воспользоваться макроскопически усредненным описанием дислокационной структуры [5]. В связи с этим обратим внимание на тот факт, что трансляционная инвариантность присуща сама по себе полям упругих напряжений в НК, подвергнутом кручению. Образующаяся в нем при кручении дислокационная структура при микроскопическом рассмотрении, естественно, не является однородной вдоль оси кристалла. Однако как результат внешнего воздействия, характеризуемого свойством трансляционной инвариантности, она должна быть таковой в среднем. При этом продольный размер Δl физически бесконечно малого элемента объема ΔV [5], по которому должно производиться усреднение микроскопических неоднородностей дислокационной структуры, проявляющихся вдоль оси НК, может по-разному соотноситься с его (кристалла) поперечными размерами R. Очевидно, что двумерный характер рассматриваемой задачи возникает, когда

$$\Delta l \ll R. \tag{2.1}$$

В противном случае задача носит существенно трехмерный характер и ее анализ представляет известные трудности.

Далее заметим, что деформация кручения в макроскопическом смысле — частный случай более общей деформации стержней, при которой происходит разворот соседних поперечных сечений стержня вокруг произвольной оси (в случае кручения совпадающей с осью кристалла). Макроскопической характеристикой указанной деформации служит вектор $\mathbf{\Omega}$, компонента которого, направленная вдоль оси стержня, представляет собой угол кручения, а компонента, перпендикулярная оси, характеризует изгиб стержня, так что в общем случае [6]

$$\mathbf{\Omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dl, \tag{2.2}$$

где $d\boldsymbol{\varphi}$ — угол разворота двух соседних поперечных сечений стержня, отстоящих друг от друга на расстоянии dl вдоль длины стержня. В случае чистого изгиба возникающее в стержне упругонапряженное состояние не зависит от координаты, отсчитываемой вдоль оси стержня [6], что вместе с (2.2) обусловливает физическую аналогию указанных деформаций, предполагающую их совместное рассмотрение.

Считая условие (2.1) выполненным, рассмотрим задачу о кручении и чистом изгибе НК с дислокациями, неподвижно закрепленного на одном конце и подвергнутого на другом действию момента сил $\mathbf{M}$. Как известно из механики [7], реакция тела на внешние силы не зависит от того, есть ли в нем внутренние напряжения или их нет. Данное обстоятельство позволяет различать кручение и изгиб $\mathbf{\Omega}^{(d)}$, обусловленные дислокациями, и кручение $\Omega_z^{(\text{м})} = M_z/C$ и изгиб $\Omega_\alpha^{(\text{м})} = I_{\alpha\beta}^{-1} M_\beta/E$, вызываемые внешним моментом (C — крутильная жесткость НК, $EI_{\alpha\beta}$ — изгибная жесткость, E — модуль Юнга, $I_{\alpha\beta}$ — тензор моментов инерции поперечного сечения НК [6] (здесь и далее греческими буквами обозначаются двумерные индексы, принимающие значения 1 и 2, а ось z системы координат совпадает с осью кристалла)). Вектор $\mathbf{\Omega}^{(d)}$ может быть вычислен исходя из условия минимума свободной энергии упругой деформации кристалла в равновесии при фиксированном положении дислокаций. Для этой цели необходимо только выразить указанную энергию в виде соответствующего функционала угла поворота сечений НК. Отметим, что такая постановка задачи, основанная на введении вектора $\mathbf{\Omega}$, по своему существу восходит к полуобратному методу Сен-Венана [8] и, как будет видно далее, оправдывается сделанным выше предположением.

3. Упругая энергия НК с дислокациями как функционал макроскопических параметров его изгиба и кручения. При решении вариационной задачи следует иметь в виду, что реакция НК на присутствующие в нем дислокации сводится не только к кручению и изгибу (представляющим собой лишь регулярную макроскопическую часть этой реакции), но и к микроскопическим искажениям решетки в окружающем дислокации пространстве кристалла. Связанная с искажениями упругая энергия E_0 не зависит от $\mathbf{\Omega}^{(d)}$ и поэтому может быть опущена в рассматриваемой вариационной задаче без всякого ущерба. В таком случае анализу подлежит лишь оставшаяся часть E_{12} энергии упругой деформации НК, которую нетрудно установить, исходя из следующих рассуждений в духе Эшелби [7, 9]. Выделим мысленно в кристалле бесконечно больших размеров рассматриваемый НК с дислокациями и вырежем его, заменив воздействие остальной части кристалла соответствующим образом подобранными усилиями на поверхности НК (концы дислокаций, выходящих на поверхность, необходимо замкнуть по поверхности НК). При снятии этих усилий, что эквивалентно приложению внешних поверхностных сил противоположного знака, НК вследствие релаксации внутренних напряжений приобретет некоторое кручение и изогнется. Рассматривая теперь эти кручение и изгиб как результат указанного внешнего воздействия, запишем связанную с ним энергию E_{12} непосредственно в виде суммы энергий E_2 упругих деформаций кручения и изгиба, равных соответственно $C\left[\Omega_z^{(d)}\right]^2/2$ и $EI_{\alpha\beta}\Omega_\alpha^{(d)}\Omega_\beta^{(d)}/2$ в расчете на единицу длины НК [6], и энергии взаимодействия E_1 соответствующего $\Omega^{(d)}$ поля напряжений p_{ik} с дислокациями в НК.

На первый взгляд может показаться странным, что в выражении для E_{12} учитывается член E_1, отвечающий взаимодействию между внутренними и внешними напряжениями, поскольку вклад упругой энергии в данное взаимодействие, как известно [7], равен нулю. Однако необходимо иметь в виду, что напряжения p_{ik} на самом деле порождаются не внешними по отношению к НК причинами, а представляют собой лишь искусственно выделенную на микроскопическом фоне τ_{ik} регулярную макроскопическую часть внутренних напряжений самих дислокаций. Поэтому в действительности энергия E_1 описывает взаимодействие между двумя подсистемами p_{ik} и τ_{ik} внутренних напряжений в кристалле, вызванных одной и той же причиной, и, следовательно, равенство нулю этой энергии в общем случае ниоткуда не вытекает. В описанном же выше мысленном эксперименте, представляющем собой не более чем удобный методический прием, происхождение второго слагаемого в E_{12} объясняется необходимостью включения в рассмотрение потенциальной энергии «внешнего» воздействия [7], которая здесь ответственна за E_1 [7]. Такая точка зрения удобна в том отношении, что при расчете E_1 она позволяет непосредственно воспользоваться известной формулой для энергии взаимодействия дислокационной петли с внешним полем упругих напряжений [7]. Ввиду аддитивности вкладов, вносимых в полную энергию взаимодействия E_1 всеми имеющимися в НК дислокациями, запишем эту энергию как сумму

$$E_1 = -\left\langle \sum_d b_i^{(d)} \int_{S_d} p_{ik}\, dS_k \right\rangle. \tag{3.1}$$

В каждом из представленных слагаемых интегрирование производится по произвольно выбранной поверхности S_d, опирающейся на соответствующую дислокационную петлю d с вектором Бюргерса $\mathbf{b}^{(d)}$*, а угловые скобки обозначают усреднение стоящей в них величины по обобщенным координатам дислокаций. Следуя общей схеме [10], рассмотрим конфигурационное пространство, образуемое совокупностью Q обобщенных координат всех дислокаций, и введем в нем плотность вероятности $f(Q)$ конфигурационных точек, удовлетворяющую условию нормировки $\int f(Q)dQ = 1$. Тогда указанная операция статистического усреднения формально осуществляется путем вычисления следующего интеграла по конфигурационному пространству дислокаций:

$$\langle \ldots \rangle = \int \ldots f(Q)dQ. \tag{3.2}$$

С помощью дельта-функции Дирака на поверхности S_d [9]

$$\delta_i(S_d) = \int_{S_d} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dS'_i$$

поверхностные интегралы, фигурирующие в формуле (3.1), могут быть сведены к интегралам, взятым по объему V_0 НК. Меняя затем в этой формуле порядок суммирования и интегрирования, перепишем ее в виде

$$E_1 = -\left\langle \int_{V_0} p_{ik} u_{ik}^{(s)}\, dV \right\rangle, \tag{3.3}$$

где используется введенное в [6] обозначение

$$u_{ik}^{(s)} - \sum_d \frac{1}{2}\left[\delta_i(S_d)\, b_k^{(d)} + \delta_k(S_d)\, b_i^{(d)}\right]$$

где δ-образной особенности тензора деформации, формально отвечающей разрывному на поверхности S_d полю смещений вокруг дислокации. Так как плотность вероятности $f(Q)$ не зависит от пространственных координат, то имеет место перестановочность операции статистического усреднения (3.2) с пространственным дифференцированием и интегрированием [10]. Учитывая это в (3.3), напишем

$$E_1 = -\int_{V_0} p_{ik} \langle u_{ik}^{(s)} \rangle\, dV. \tag{3.4}$$

Рассмотрим вначале слабый изгиб НК (когда радиус кривизны оси изогнутого НК значительно больше его длины [6]), оговорив затем особо случай сильного изгиба. При выполнении условия малости относительного поворота сечений НК, отстоящих друг от друга на расстоянии порядка его поперечных размеров, зависимость упругих напряжений p_{ik} от вектора $\mathbf{\Omega}$ носит линейный характер:

$$p_{ik} = \chi_{ikm}\Omega_m. \tag{3.5}$$

Согласно выводам классической теории кручения и слабого изгиба тонких стержней [6, 8], единственными отличными от нуля компонентами симметричного по индексам i и k тензора χ_{ikm} являются компоненты

$$\chi_{\alpha zz} = \chi_{z\alpha z} = 2\mu e_{z\alpha\beta}\partial\chi/\partial x_\beta, \quad \chi_{zz\alpha} = E e_{z\alpha\beta} x_\beta. \tag{3.6}$$

Здесь μ — модуль сдвига кристалла; e_{ikl} — тензор Леви-Чивита; χ — функция напряжений Прандтля, удовлетворяющая уравнению $\partial^2\chi/\partial x^2 +$

* Во избежание недоразумений, связанных с записью формулы (3.1), отметим, что используемое в данной работе определение вектора Бюргерса дислокаций [6] отличается знаком от определения, принятого в [7].

$+ \partial^2\chi/\partial y^2 = -1$ и граничному условию $\chi = 0$ на контуре поперечного сечения НК, а начало системы координат выбрано в центре инерции поперечного сечения НК:

$$\int\limits_{S_0} x_\alpha \, dx \, dy = 0. \tag{3.7}$$

Подставив теперь (3.5) в (3.4), выделим в ней интегрирование по площади S_0 поперечного сечения НК и введем обозначение

$$M_k^{(d)} = \int\limits_{S_0} \chi_{ijk} \langle u_{ij}^{(s)} \rangle \, dx \, dy. \tag{3.8}$$

Рассматриваемая энергия взаимодействия представится в виде интеграла

$$E_1 = -\int\limits_0^{L_0} M_k^{(d)} \Omega_k^{(d)} \, dz,$$

взятого по длине L_0 НК. Складывая эту энергию с E_2, имеем следующее выражение для искомой части энергии упругой деформации НК, связанной с его макроскопической реакцией на присутствующие дислокации:

$$E_{12} = \int\limits_0^{L_0} \left\{ \frac{1}{2} C \left[\Omega_z^{(d)}\right]^2 + \frac{1}{2} E I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha^{(d)} \Omega_\beta^{(d)} - M_k^{(d)} \Omega_k^{(d)} \right\} dz. \tag{3.9}$$

4. Решение вариационной задачи о макроскопическом изгибе и кручении НК с дислокациями. Из условия минимума энергии (3.9) в равновесии путем варьирования по компонентам вектора угла поворота $\varphi^{(d)}$ поперечных сечений НК с учетом (2.2) имеем [6]

$$\left(E I_{\alpha\beta} \Omega_\beta^{(d)} - M_\alpha^{(d)}\right) \delta\varphi_\alpha^{(d)} - \int\limits_0^{L_0} \frac{d}{dz} \left(E I_{\alpha\beta} \Omega_\beta^{(d)} - M_\alpha^{(d)}\right) \delta\varphi_\alpha^{(d)} \, dz +$$

$$+ \left(C \Omega_z^{(d)} - M_z^{(d)}\right) \delta\varphi_z^{(d)} - \int\limits_0^{L_0} \frac{d}{dz} \left(C \Omega_z^{(d)} - M_z^{(d)}\right) \delta\varphi_z^{(d)} \, dz = 0,$$

где в первом и третьем членах берется их значение на незакрепленном конце НК. Ввиду произвольности вариаций $\delta\varphi_k^{(d)}$ как по длине НК, так и на незакрепленном конце из написанного равенства следует, что минимум энергии E_{12} достигается при

$$\Omega_z^{(d)} = M_z^{(d)}/C, \quad \Omega_\alpha^{(d)} = I_{\alpha\beta}^{-1} M_\beta^{(d)}/E. \tag{4.1}$$

Введем далее (вообще говоря, несимметричный) тензор J_{ik} согласно определению

$$J_{zz} = \frac{4\mu}{E} \chi, \quad e_{z\delta\beta} \frac{\partial J_{\beta\alpha}}{\partial x_\delta} = e_{z\alpha\beta} x_\beta, \quad J_{\alpha z} = J_{z\alpha} = 0, \tag{4.2}$$

с помощью которого запишем (3.6) как

$$\chi_{ijk} = E \delta_{z(i} e_{j)\alpha n} \partial J_{nk} / \partial x_\alpha. \tag{4.3}$$

Подставив теперь (4.3) в (3.8), находим формулу для $\mathbf{M}^{(d)}$ в виде

$$M_i^{(d)} = E \int\limits_{S_0} e_{k\alpha n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(J_{ni} \langle u_{kz}^{(s)} \rangle\right) dx \, dy - E \int\limits_{S_0} J_{ni} e_{k\alpha n} \frac{\partial \langle u_{kz}^{(s)} \rangle}{\partial x_\alpha} dx \, dy.$$

Здесь первый интеграл, будучи преобразованным по теореме Стокса [6] в интеграл по линии контура поперечного сечения НК, исчезает в силу граничного условия $\chi = 0$ на этом контуре и при выполнении соотношений

$$e_{z\alpha\beta} J_{\alpha\delta} n_\beta = 0, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к линии контура поперечного сечения. Учет же второго интеграла приводит к формуле

$$M_i^{(d)} = E \int\limits_{S_0} J_{ni} e_{n\alpha k} \frac{\partial \langle u_{kz}^{(s)} \rangle}{\partial x_\alpha} \, dx \, dy. \tag{4.5}$$

Преобразуем ее, воспользовавшись определением тензора плотности дислокаций:

$$\rho_{ik} = e_{ilm} \partial w_{mk}^{(s)} / \partial x_l, \tag{4.6}$$

которое соответствует определению этой величины, принятому в [6]. Здесь

$$w_{mk}^{(s)} = u_{mk}^{(s)} + e_{mkj} \omega_j^{(s)} \tag{4.7}$$

представляет собой базисное поле пластической дисторсии, включающей в себя пластический поворот

$$\omega_j^{(s)} = \sum_d \frac{1}{2} e_{jmk} \delta_m (S_d) \, b_k^{(d)}.$$

Подставляя (4.7) в (4.6), находим

$$e_{ilm} \partial u_{mk}^{(s)} / \partial x_l = \partial \omega_i^{(s)} / \partial x_k + K_{ki}, \tag{4.8}$$

где второе слагаемое в правой части является тензором кривизны Ная [9]:

$$K_{ki} = \rho_{ik} - (1/2) \delta_{ik} \rho_{ll}. \tag{4.9}$$

Полагая в (4.8) $k = 3$ и производя усреднение с учетом отмеченной выше перестановочности этой операции с пространственным дифференцированием, получим

$$e_{ilm} \partial \langle u_{mz}^{(s)} \rangle / \partial x_l = \partial \langle \omega_i^{(s)} \rangle / \partial z + \langle K_{zi} \rangle. \tag{4.10}$$

В силу предполагаемой трансляционной инвариантности усредненной дислокационной структуры величины $\langle \omega_i^{(s)} \rangle$ и $\langle u_{ik}^{(s)} \rangle$ не зависят от координаты z, и, следовательно, соответствующие частные производные в (4.10) равны нулю. Окончательно формулу (4.5) с учетом (4.2) можно записать в виде

$$\Omega_z^{(d)} = \frac{4\mu}{C} \int\limits_{S_0} \chi \langle K_{zz} \rangle \, dx \, dy, \tag{4.11}$$

$$\Omega_\alpha^{(d)} = I_{\alpha\beta}^{-1} \int\limits_{S_0} J_{\delta\beta} \langle K_{z\delta} \rangle \, dx \, dy.$$

Используемый в (4.11) тензор $J_{\alpha\beta}$ определен уравнениями (4.2) и граничными условиями (4.4) неоднозначно, поскольку число независимых компонент тензора $J_{\alpha\beta}$ превышает число уравнений (4.2). Однако указанный произвол в определении $J_{\alpha\beta}$ в силу соотношения

$$\partial \langle K_{z\alpha} \rangle / \partial x_\alpha = 0, \tag{4.12}$$

вытекающего из (4.6) и (4.9) и являющегося следствием обобщенного закона сохранения вектора Бюргерса [5, 6], не влияет на результат применения (4.11). Это нетрудно показать, используя тождество

$$J_{\delta\beta} \langle K_{z\delta} \rangle = e_{z\alpha\delta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(J_{\delta\beta} \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} e_{z\varepsilon\gamma} \langle K_{z\gamma} \rangle \, dx'_\varepsilon \right) - e_{z\alpha\delta} \frac{\partial J_{\delta\beta}}{\partial x_\alpha} \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} e_{z\varepsilon\gamma} \langle K_{z\gamma} \rangle \, dx'_\varepsilon, \tag{4.13}$$

где интегрируемость формы $e_{z\varepsilon\gamma}\langle K_{z\gamma}\rangle\, dx'_\varepsilon$ обеспечивается выполнением условия (4.12); $\mathbf{r}_0$ — произвольный вектор в плоскости поперечного сечения. Подставляя (4.13) в (4.11) и преобразуя первый интеграл с помощью теоремы Стокса в интеграл по линии контура поперечного сечения, исчезающий в силу (4.4), с учетом (4.2) имеем

$$\Omega_\alpha^{(d)} = I_{\alpha\delta}^{-1} \int\limits_{S_0} e_{z\delta\beta} x_\beta \left(\int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} e_{z\gamma\varepsilon} \langle K_{z\gamma}\rangle\, dx'_\varepsilon \right) dx\, dy.$$

Согласно (4.12), полученный функционал не зависит от пути интегрирования во внутреннем интеграле, а в силу (3.7)— от выбора $\mathbf{r}_0$, тем самым $\Omega_\alpha^{(d)}$ определяется по $\langle K_{z\beta}\rangle$ однозначно в данном выражении, а следовательно, и в формуле (4.11). Таким образом, соотношения (4.11) устанавливают искомую связь между усредненной характеристикой дислокационной структуры (тензором кривизны Ная) и макроскопической реакцией кристалла на введенные в него дислокации, причем эта реакция не зависит от пластической предыстории кристалла, а определяется только конкретным распределением дислокаций.

5. Иллюстративные примеры. В качестве важных примеров рассмотрим несколько конкретных решений.

Дислокация, параллельная оси НК, характеризуется обобщенной координатой $\boldsymbol{\rho}_0$, представляющей собой радиус-вектор точки в плоскости поперечного сечения НК, через которую проходит дислокация. Поскольку обобщенная координата в данном случае инвариантна относительно переноса системы координат вдоль оси НК, то в качестве функции $f(Q)$ можно принять $\delta(\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}'_0)$. Тогда, учитывая (3.2), (4.9) и считая, что вектор касательной к линии дислокации антипараллелен ее вектору Бюргерса, для винтовой дислокации получим $K_{zz} = -(b/2)\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)$. Теперь из (4.11) следует $\Omega_z^{(d)} = -(2\mu b/C)\,\chi(\boldsymbol{\rho}_0)$ — известный результат Эшелби [2] для аксиальной винтовой дислокации. Аксиальная краевая дислокация имеет отличные от нуля только компоненты $K_{\alpha z}$ и, согласно (4.11), не создает изгиба и кручения, что также отмечалось в [2].

В случае постоянной плотности дислокаций с учетом условия нормировки для функции $f(Q)$ вытекает $\langle K_{zz}\rangle = (1/2)(\rho_{zz} - \rho_{xx} - \rho_{yy}) = \mathrm{const}$, $\langle K_{z\alpha}\rangle = \rho_{\alpha z} = \mathrm{const}$. Поскольку $C = 4\mu \int \chi dx\, dy$, то первая из формул (4.11) примет вид $\Omega_z^{(d)} = (1/2)(\rho_{zz} - \rho_{xx} - \rho_{yy})$. Отсюда кручение для винтовых дислокаций, параллельных оси НК и имеющих плотность ρ, равно $\Omega_z^{(d)} = -\rho b/2$, для перпендикулярных оси НК $\Omega_z^{(d)} = \rho b/2$ и равно нулю при условии $\rho_{zz} = \rho_{xx} + \rho_{yy}$ (для винтовых дислокаций под углом 45° к оси кристалла). Для преобразования второго из соотношений (4.11) далее следует умножить (4.2) на x_ε и проинтегрировать выражение слева по частям:

$$\int\limits_{S_0} e_{z\delta\beta} \frac{\partial (J_{\beta\alpha} x_\varepsilon)}{\partial x_\delta}\, dx\, dy - \int\limits_{S_0} e_{z\varepsilon\beta} J_{\beta\alpha}\, dx\, dy = \int\limits_{S_0} e_{z\alpha\beta} x_\beta x_\varepsilon\, dx\, dy.$$

Первый интеграл преобразуется в интеграл по линии контура поперечного сечения и исчезает в силу (4.4), так что

$$\int\limits_{S_0} J_{\alpha\beta}\, dx\, dy = \int\limits_{S_0} e_{z\alpha\delta} e_{z\beta\gamma} x_\delta x_\gamma\, dx\, dy = I_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, для макроскопически однородной плотности дислокаций имеет место соотношение $\Omega_k^{(d)} = \langle K_{zk}\rangle$, что совпадает с известным результатом Ная [7, 9].

В заключение отметим, что переход к случаю сильного изгиба может быть осуществлен аналогично изложенному в [6] введением (локальных) в каждом сечении НК систем координат, параллельных друг другу и исходной системе в недеформированном кристалле и поворачивающихся вместе с поперечными сечениями при изгибе и закручивании НК. Соотношения (4.1), (4.5), а следовательно, и (4.11), рассматриваемые в локальной системе координат в окрестности данного поперечного сечения НК, остаются справедливыми и при сильном изгибе кристалла. Дислокационный изгиб НК в отличие от изгиба под действием внешнего момента [6] не сопровождается дополнительным закручиванием НК. Данное обстоятельство обусловлено тем, что вектор $\mathbf{M}^{(d)}$ поворачивается вместе с поворотом поперечного сечения, тогда как момент **M** сохраняет свою ориентацию в пространстве неизменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Панин В. Е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В.** Структурные уровни деформации твердых тел.— Новосибирск: Наука, 1985.
2. **Eshelby J. D.** Boundary problems // Dislocations in solids.— Amsterdam: North-Holland Publ., 1979.— V. 1.
3. **Антипов С. А., Дрожжин А. И., Рощупкин А. М.** Релаксационные явления в нитевидных кристаллах полупроводников.— Воронеж: ВГУ, 1987.
4. **Старовиков М. И., Дрожжин А. И., Антипов С. А., Беликов А. М.** Исследование прямыми методами дислокационных структур в НК кремния на начальной стадии пластичности.— Воронеж, 1983.— Деп. в ВИНИТИ 16.06.83, № 3318—83.
5. **Косевич А. М.** Дислокации в теории упругости.— Киев: Наук. думка, 1978.
6. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости.— М.: Наука, 1987.
7. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
8. **Амензаде Ю. А.** Теория упругости.— Баку: Маариф, 1968.
9. **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций.— М.: Мир, 1977.
10. **Де Гроот С. Р., Сатторп Л. Г.** Электродинамика.— М.: Наука, 1982.

г. Воронеж *Поступила 21/IV 1988 г., в окончательном варианте — 10/X 1989 г.*

УДК 532.529+539.4

В. А. Петушков

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОСТИ И ДЕФОРМИРУЕМОМ ТЕЛЕ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Проблемы гидроударного нагружения деформируемых тел связаны прежде всего с изучением и защитой от эрозионного разрушения конструкций, взаимодействующих с жидкостью. Высокоскоростному ударному нагружению частицами жидкости подвергаются лопатки турбин, работающих на влажном паре, элементы авиационно-космической техники при полетах в дождевой зоне и приводнениях. Волновому ударному нагружению в объеме кавитирующейся жидкости подвергаются погруженные в нее тела и др. Уровни локальных давлений на поверхности тел при таких взаимодействиях могут превышать тысячи атмосфер [1]. Есть и другой аспект этих проблем, заключающийся в необходимости усиления эффектов разрушения при гидродинамическом способе добычи полезных ископаемых и разрушении горных пород, разработке новых прогрессивных технологий раскроя материалов.

Для защиты конструкций от разрушения, выбора материалов и покрытий необходим подробный анализ процессов их деформирования и разрушения при различных скоростях взаимодействия с жидкостью. Поскольку это взаимодействие принимает капельный или струйный (в виде кумулятивных струй) характер и весьма локализовано с продолжительностью, измеряемой микросекундами, возможности экспериментальных методов исследования крайне ограничены. Известные результаты, полученные в этом направлении, носят, скорее, качественный характер. Количественной оценкой указанных процессов служит лишь скорость потери массы материалов при таких взаимодействиях [1, 2]. Еще более ограничены возможности теоретических подходов. В математическом моделировании процессов высокоскоростного ударного взаимодействия тел с жидкостью необходимо учитывать сжимаемость сред, распространение в них ударных волн (УВ), нелинейное, зависящее от скорости нагружения поведение материалов, сопротивление их пластическим сдвигам. Наличие свободной