

## ПРИБЛИЖЕННАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЗВЕШЕННОГО СЛОЯ

Ю. А. Буевич

(Москва)

В условиях развитого псевдооживления во взвешенном слое имеют место интенсивные пульсационные движения как псевдооживляющей среды, так и диспергированной твердой фазы. Эти движения оказывают определяющее влияние на реологические характеристики взвешенного слоя, а также на происходящие в нем химические реакции и процессы переноса [1]. Так, например, в опытах Вике и Феттинга [2], изучавших теплообмен взвешенного слоя со стенками нагревателя, эффективный коэффициент теплоотдачи к развитому взвешенному слою оказался примерно на порядок выше коэффициента теплоотдачи к слою, зажатому сверху проволочной сеткой, в котором хаотические движения твердой фазы отсутствовали. Очевидно, что первоначальный этап в исследовании структуры взвешенного слоя в целом и в последующем построении его моделей как некоторой сплошной среды по необходимости должен состоять в исследовании локальных структурных особенностей слоя и, в частности, указанных пульсационных движений.

Изменение со временем скоростей отдельных частиц вызвано двумя разнородными причинами: во-первых, взаимодействием выделенных частиц с соседними — как путем непосредственных столкновений, так и через посредство жидкой фазы, а во-вторых, их взаимодействием с вязкой жидкостью. Оба эти фактора взаимосвязаны, так что рассматриваемая система взвешенных частиц обладает одновременно чертами, свойственными как плотному газу с потенциальным межмолекулярным взаимодействием, так и системе частиц, совершающих броуновское движение в непрерывной среде.

Подробная статистическая теория системы взвешенных частиц должна исходить из представлений о случайных движениях частиц в среде как о некотором стохастическом процессе с определенными свойствами (см., например, [3-4]). В идеальном случае такая теория должна повести к формулировке некоего кинетического уравнения, которое, как следует из отмеченной выше особенности рассматриваемой системы, будет обладать как свойствами обычного кинетического уравнения Больцмана, так и свойствами уравнения типа Фоккера—Планка. Исследование и решение такого уравнения встретит, естественно, трудности, значительно превосходящие затруднения, возникающие при рассмотрении уравнений Больцмана или Фоккера—Планка в отдельности, и возникнет далеко не простая задача применения этого уравнения к различным конкретным проблемам. Альтернативный путь состоит в построении приближенной, но в то же время достаточно эффективной теории локальных свойств взвешенного слоя, которая совмещала бы в некотором смысле сравнительную простоту использования с достаточной строгостью и общностью. Именно такая теория предложена в данной работе. Полученные на ее основе выводы находятся в хорошем качественном согласии с экспериментом.

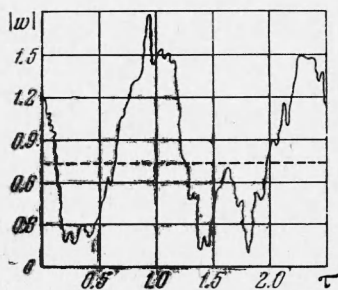
**§ 1. Модель взвешенного слоя.** Рассматриваем объем взвешенного слоя, содержащий весьма большое число частиц, в пределах которого макроскопические характеристики слоя можно считать не зависящими от координат. Кроме того, ограничиваем рассмотрение таким временем  $t$ , что в течение этого времени указанные характеристики практически остаются постоянными. Если оказывается возможным выбрать этот объем так, что его линейные размеры значительно превосходят характерный пространственный масштаб микроструктуры слоя, а время  $t$  значительно выше характерного временного масштаба внутренних движений, то, по аналогии с кинетической теорией, будем говорить, что взвешенный слой находится в «локально равновесном» состоянии или, если макроскопические характеристики вообще не зависят от координат и времени, — в равновесном состоянии. Только такие состояния рассмотрены ниже.

В пренебрежении пульсационными движениями фаз состояние взвешенного слоя может быть описано заданием лишь одной переменной величины, — например, средней объемной концентрации частиц в слое  $\rho_0$ . Прочие макроскопические переменные, как то усредненная скорость жидкой фазы  $u_0$  или скорость фильтрации  $u^\circ = \varepsilon_0 u_0 = (1 - \rho_0) u_0$ , представляют собой некоторые функции от  $\rho_0$  и материальных констант. Если сила взаимодействия между фазами, отнесенная к единице объема взвешенного

слоя,  $f = f(\rho_0, u_0)$ , то в системе координат, где средняя скорость твердой фазы равна нулю,  $u_0$  направлена обратно силе тяжести и равна корню уравнения

$$f(\rho_0, u_0) = \rho_0 (d_2 - d_1) g \quad (1.1)$$

Здесь  $g$  — ускорение силы тяжести,  $d_1$  и  $d_2$  — плотности жидкости и материала частиц. Заметим, что сила  $f$  отражает истинное полное сопротивление взвешенного слоя потоку псевдоожигающей среды и потому должна определяться, например, из наблюдаемого перепада давления во взвешенном слое.



Фиг. 1

В действительности частицы внутри взвешенного слоя находятся в состоянии хаотического движения, характеризуемого некоторым непрерывным набором скоростей, а истинные локальные значения  $\rho$  и  $u$  отличны от средних значений  $\rho_0$  и  $u_0$  и флуктуируют относительно этих средних [1]. Беспорядочное движение отдельных частиц, подобное по структуре движению молекул газа, неоднократно отмечалось в экспериментах (см., например, обзор в [5]). Пространственный масштаб таких движений имеет, очевидно, порядок средней длины  $\lambda$  «свободного пробега» частиц между столкновениями, а временной масштаб  $\tau$  — порядок величины  $\lambda (w^0)^{-1}$ , где  $w^0$  — средняя по модулю скорость такого движения. Как показывают многочисленные эксперименты, в которых прослеживалась судьба отдельных частиц, на эти мелкомасштабные, изотропные в первом приближении движения налагаются дополнительно вертикальные пульсации, пространственный  $\Lambda$  и временной  $T$  масштабы которых намного превосходят  $\lambda$  и  $\tau$ . Характерная кривая изменения модуля вертикальной компоненты полной пульсационной скорости частиц со временем приведена на фиг. 1. Эта кривая получена в опытах Туми и Джонстона [6], которые псевдоожигали воздухом слой стеклянных шариков диаметром  $\sim 0.38$  мм. Из фиг. 1 видно, что, помимо мелких пульсаций, временной масштаб  $\tau$  которых имеет порядок малых долей секунды, существуют пульсации с гораздо большими амплитудами и масштабом  $T \sim 1$  сек (пунктир на фиг. 1 соответствует скорости фильтрации воздуха). Наличие во взвешенном слое сравнительно больших групп частиц, совершающих беспорядочные вертикальные движения и феноменологически аналогичных вихрям в турбулизованной жидкости, отмечается также А. К. Бондаревой и О. М. Тодесом [7], которые ввели, в частности, понятие эффективного «пути смешения», на котором такие группы распадаются; по их оценкам, эта величина составляет несколько см. Близкие и весьма подробные данные, полученные методом радиоактивных изотопов, сообщаются в сравнительно недавних работах [8,9]. Четко выраженное чередование быстрых и медленных движений групп частиц в вертикальном направлении отмечается также в [10] и ряде других работ [1].

Из анализа экспериментальных результатов представляется весьма вероятной следующая картина внутренних движений во взвешенном слое. Отдельные частицы совершают хаотическое изотропное мелкомасштабное движение, которое отличается от движения молекул газа только в том отношении, что скорость каждой частицы может изменяться не только за счет межчастичных взаимодействий, но и вследствие вязкой диссипации энергии этого движения. Такое движение приводит к флуктуациям различных переменных величин, характеризующих состояние, относительно их средних значений, — в частности, к флуктуациям  $\rho$  или счетной концентрации частиц  $n = \rho / v^\circ$ , где  $v^\circ$  — объем одной частицы.

Представляется естественным связать наблюдаемое крупномасштабное движение частиц в вертикальном направлении с флуктуациями  $\rho$  или  $n$ . Действительно, в пределах занятого флуктуацией объема взвешенного слоя сила сопротивления  $f$ , оказываемая частицами потоку псевдоожигающей среды, изменяется, а баланс сил, выражаемый соотношением (1.1), нарушается. В результате входящие в состав флуктуации частицы разгоняются вверх или вниз по вертикали под действием как силы  $f$ , так и силы тяжести. В процессе движения и распада флуктуационных образований энергия, приобретенная частицами, участвующими в крупномасштабном пульсационном движении, перераспределяется между различными степенями свободы мелкомасштабного хаотического движения — как в результате непосредственных столкновений, так и за счет не прямого взаимодействия между частицами в случайном поле давления жидкой фазы. Тем самым компенсируется вязкая диссипация энергии мелкомасштабного пульсационного движения. Иными словами, в системе имеется поток энергии  $E$  от осредненного движения жидкой фазы к крупномасштабным вертикальным пульсациям и далее — к мелкомасштабному движению, причем в «квазистационарном» состоянии этот поток равен по величине мощности  $W$ , диссипируемой в тепло за счет вязкого трения. Условие квазистационарности

$$E = W \quad (1.2)$$

занимает центральное место в последующей теории и означает, что статистические характеристики системы частиц могут изменяться только вследствие изменения макроскопических параметров, происходящего за время, которое, по предположению, намного выше характерных времен  $\tau$  и  $T$ . Ясно, что равновесное или локально равновесное состояние по необходимости квазистационарно. Заметим, что в условиях развитого турбулентного псевдоожигания или при плохом распределении псевдоожигающей среды в слое имеется дополнительный поток энергии  $E'$  к пульсационному движению, обусловленный «захватом» частиц вихрями или пульсациями жидкой фазы. Аналогичную роль могут играть также пузыри, поднимающиеся в слое в режиме неоднородного псевдоожигания. Учет этих явлений требует, в частности, введения априори неизвестного случайного турбулентного поля, рассмотренного движения пузырей и т. п., что крайне усложняет поставленную задачу. Поэтому в данной работе указанные явления вообще не учитываются, что может повести к ошибкам при применении теории к исследованию очень бурного псевдоожигания.

При выполнении условия квазистационарности (1.2) истинный ансамбль взвешенных частиц, изменяющих свою скорость в промежутках между столкновениями и непрерывно диссипирующих свою энергию, статистически эквивалентен фиктивному ансамблю частиц, скорость которых изменяется только в результате столкновений. Эта гипотеза об эквивалентности соответствует хорошо известному в кинетической теории факту, что величины, характеризующие статистику равновесного состояния, не зависят от способа его установления и конкретного вида взаимодействия между частицами.

Будем предполагать дополнительно, что выполняется неравенство

$$\tau \ll \tau^\circ \quad (1.3)$$

где  $\tau^\circ$  — время релаксации частицы, движущейся в вязкой жидкости. При выполнении (1.3) длина свободного пробега фактически не зависит от взаимодействия частиц со средой. Ясно, что условие (1.3) выполняется в практически интересных случаях. Исключение могут составить случаи, когда-либо вязкость жидкой фазы очень велика, либо очень малы размеры

взвешенных частиц. Если (1.3) выполняется, то при рассмотрении процессов переноса в системе взвешенных частиц можно рассуждать точно так же, как и в элементарной кинетической теории газов, т. е. представление об эквивалентном ансамбле можно использовать также при исследовании кинетических процессов. Строго говоря, соображение об эквивалентности можно и не привлекать, тогда на основании (1.2) и (1.3) нужно записать аналоги распределений Гиббса и развивать статистику взвешенных частиц независимым путем.

Если  $P(w_i)$  — функция распределения частиц по скоростям мелко-масштабного движения, нормированная на счетную концентрацию частиц, а  $Q(\delta w)$  — вероятность попадания частицы в состав флуктуации, которой отвечает скорость  $\delta w$  крупномасштабного движения, то среднее число частиц, имеющих скорость в области  $\{dw_i\}$   $d(dw)$  пространства скоростей, равно

$$dn = P(w_i) Q(\delta w) \{dw_i\} d(dw_i), \quad \delta w_i = \delta w \delta_{i1} \quad (1.4)$$

Здесь ось  $x \sim x_1$  выбрана в направлении скорости фильтрации.

Таким образом, локальные пульсационные движения частиц внутри взвешенного слоя имеют весьма сложный характер. Они представляют собой суперпозицию некоррелированных мелко-масштабных изотропных движений, подобных тепловому движению, и крупномасштабных вертикальных пульсаций, вносящих элемент анизотропии в полное распределение (1.4). Изложенные представления совместны с имеющимися в литературе.

**§ 2. Формальная статистика равновесных состояний.** Как следует из изложенного, роль основных гипотез играют утверждение об изотропии равновесного распределения  $P(w_i)$  и представление о независимости числа частиц с данным значением скорости  $w$  от процесса межчастичных взаимодействий. Вместе с условием квазистационарности (1.2), эти гипотезы приводят к функциональному уравнению

$$P(w_1^2) P(w_2^2) = P(w_3^2) P(w_4^2), \quad w_1^2 + w_2^2 = w_3^2 + w_4^2$$

Здесь индексы относятся к скоростям двух различных частиц до и после взаимодействия. Решение этой задачи приводит к распределению Максвелла

$$dP(w_i) = n \left( \frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{mw_i^2}{2\theta} \right) \{dw_i\} \quad (2.1)$$

Здесь  $m$  — масса частиц, а  $\theta$  — скаляр, зависящий от макроскопических параметров состояния взвешенного слоя и играющий роль эффективной статистической «температуры» системы взвешенных частиц.

Заметим, что, помимо поступательных, каждая частица обладает также вращательными степенями свободы; вращение отдельных частиц наблюдалось также экспериментально [10]. При достаточно малом радиусе частиц можно ожидать, что диссипация энергии вращательного движения происходит значительно быстрее возбуждения вращательных степеней свободы, так что средняя энергия последних намного ниже энергии поступательных степеней свободы (иначе говоря, эффективная «вращательная температура» значительно меньше  $\theta$ ). Хотя в принципе вращение частиц можно учесть, вводя поправки типа множителя Эйкена [11], для простоты ниже оно не рассматривается.

Пользуясь представлением об эквивалентном ансамбле и применяя стандартную процедуру, нетрудно получить для равновесного состояния взвешенных частиц те же результаты, что и для газов. Так, легко вычислить статистическую сумму

$$Z = \frac{1}{N!} V_0^N (2\pi m \theta)^{3/2 N}$$



Здесь  $V_0$  — свободный (в смысле Ван-дер-Ваальса) объем, соответствующий  $N$  частицам. Эффективная «свободная энергия Гельмгольца» запишется в виде

$$\Psi = -\theta \ln Z = -\theta N [\ln (V_0 / N) + 3/2 (\ln \theta + \ln (2\pi m))]$$

Эффективные «энтропия»  $S$  и изотропное «давление» твердой фазы соответственно равны

$$S = -\partial \Psi / \partial \theta, \quad p = -\partial \Psi / \partial V$$

Связь между полным объемом  $V$ , занятым  $N$  частицами, и  $V_0$  проще всего установить, воспользовавшись независимо определенным уравнением состояния ансамбля. Для плотного газа сферических частиц радиуса  $a$  последнее можно записать в виде [11]

$$pv(1 - \sigma) = \theta,$$

$$\sigma = (v_*/v)^{1/3} = (n/n_*)^{1/3} = (\rho/\rho_*)^{1/3} \quad (2.2)$$

Здесь  $v = V/N$  — удельный объем одной частицы, а  $v_*$ ,  $n_*$  и  $\rho_*$  — значения соответствующих величин в состоянии плотнейшей упаковки. Уравнение (2.2) применимо при не слишком малых  $\rho$ , когда выход отдельной частицы за пределы занимаемой ею ячейки затруднен. Согласно [11], это уравнение пригодно при  $\sim 0.125 \rho_* \leq \rho \leq \rho_*$ .

Определяя  $p$  из уравнения (2.2), а также пользуясь представлением  $p$  через свободную энергию, получим

$$\frac{V}{V_0} \frac{dV_0}{dV} = \frac{1}{1 - \sigma}, \quad \text{или} \quad V_0 = (V^{1/3} - V_*^{1/3})^3$$

Снова используя  $\Psi$ , для энтропии  $S$  получим

$$S = N [3 \ln (v^{1/3} - v_*^{1/3}) + 3/2 (\ln \theta + \ln (2\pi m) + 1)] \quad (2.3)$$

Используя результаты Энского [11], относящиеся к явлениям переноса в плотных газах упругих сфер с дельтаобразным взаимодействием, запишем выражения для коэффициентов сдвиговой ( $\eta$ ) и объемной ( $\zeta$ ) вязкости, а также для коэффициентов самодиффузии ( $D$ ) частиц и переноса их мелко-масштабной пульсационной энергии ( $\gamma$ ) — аналога коэффициента теплопроводности

$$\eta = 4\rho\eta^\circ (Y^{-1} + 0.8 + 0.76 Y), \quad \zeta = 4\rho\eta^\circ Y$$

$$D = 4\rho D^\circ Y^{-1}, \quad \gamma = 4\rho\gamma^\circ (Y^{-1} + 1.2 + 0.75 Y) \quad (2.4)$$

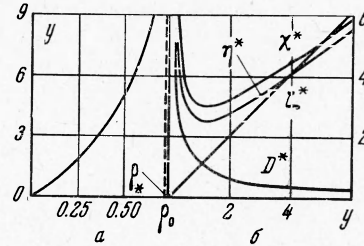
$$\eta^\circ = \frac{5}{64a^2} \left(\frac{m\theta}{\pi}\right)^{1/2}, \quad D^\circ = \frac{3}{32a^2} \frac{v^\circ}{\rho} \left(\frac{\theta}{\pi m}\right)^{1/2}, \quad \gamma^\circ = \frac{5}{2} \frac{c_v \eta^\circ}{m} = \frac{15}{4} \frac{\eta^\circ}{m}$$

$$Y(\rho) = \frac{pv}{\theta} - 1 \approx \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

Здесь  $\eta^\circ$ ,  $D^\circ$ ,  $\gamma^\circ$  — значения соответствующих коэффициентов при нулевом давлении  $p$  (в разреженном газе тех же частиц):

В выражениях (2.4)  $c_v$  — эффективная «теплоемкость» одной частицы, определенная относительно температуры  $\theta$ .

Величина  $Y$  как функция  $\rho$  представлена на фиг. 2, а (при  $\rho_* = 0.74$ , что соответствует гексагональной плотной упаковке), а приведенные коэффициенты  $\eta^*$  и др. ( $\eta^* = (4\rho\eta^\circ)^{-1} \eta$ ) — на фиг. 2, б [11].



Фиг. 2

В области  $\rho$ , где применимо уравнение (2.2), функция  $Y$  может быть рассчитана также из этого уравнения.

Заметим, что величины  $\eta^\circ$ ,  $D^\circ$ ,  $\gamma^\circ$  не зависят от плотности газа — факт, хорошо известный в кинетической теории и объясняемый тем обстоятельством, что убывание числа частиц, пересекающих элемент некоторой поверхности за единицу времени, при уменьшении давления в точности компенсируется возрастанием длины свободного пробега  $\lambda$ . Аналогичное обстоятельство имеет место также в системе взвешенных частиц, если выполняется неравенство (1.3).

Для вероятности малой флуктуации  $\delta\rho$ , сопровождающейся изменением энтропии  $\delta S$ , имеем

$$dQ(\delta\rho) \sim \exp(\delta S(\delta\rho)) d(\delta\rho) \quad (2.5)$$

В частности, используя первую лемму Гиббса, для относительной квадратичной флуктуации числа частиц в объеме  $V$  взвешенного слоя, получим обычным образом

$$\left\langle \left( \frac{\delta N}{N} \right)^2 \right\rangle = \frac{\theta}{V} \left| \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_\theta \right| \approx \frac{1}{N} \frac{(1-\sigma)^2}{1-2/3\sigma} \quad (2.6)$$

При выводе (2.6) было существенно использовано уравнение состояния в форме (2.2). Выражение для флуктуации (2.6), полученное в [12] на основании известной формулы Смолуховского, ошибочно, ибо эта формула не применима к очень плотным системам, к числу которых относится и взвешенный слой.

**§ 3. Малые флуктуации в системе взвешенных частиц.** При достаточно большом объеме  $V$  можно считать, что, согласно (2.6),  $N \approx \text{const}$ . Предположим, что в результате флуктуаций среднее распределение частиц в этом объеме  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  изменилось на  $\rho = \rho_0 + \varphi(x, y, z, t)$ . На возможные виды функций  $\varphi$  наложены очевидные ограничения

$$-\rho_0 \leq \varphi \leq \rho_* - \rho_0, \quad \int_V \varphi dV = 0 \quad (3.1)$$

Введем интенсивность флуктуаций  $\psi$  и величины  $\psi^\pm$ , определяемые посредством соотношений

$$V\psi = \int_V \varphi^2 dV, \quad V\psi^\pm = \int_{V^\pm} \varphi^2 dV^\pm$$

Здесь  $V^+$  и  $V^-$  — области  $V$ , в которых  $\varphi$  — соответственно положительна и отрицательна.

Рассмотрение произвольных флуктуаций в системе сопряжено со значительными осложнениями (например  $\delta S(\varphi)$  в (2.5) представляет в общем случае функционал от  $\varphi$  довольно сложного вида). Имея в виду получение приближенных результатов, используем в дальнейшем приближение малых флуктуаций. Состояниям, отвечающим различным распределениям  $\rho(x, y, z, t)$  с данной интенсивностью  $\psi$ , соответствует изменение энтропии (по сравнению с невозмущенным состоянием  $\rho = \rho_0$ ), которое с учетом (2.3) можно записать в виде

$$\delta S = 3 \int_V \delta [n \ln(v^{1/3} - v_*^{1/3})] dV = \frac{3}{\rho_0} \int_V \delta \left[ \rho \ln \left( v^{1/3} \frac{\rho_*^{1/3} - \rho_0^{1/3}}{\rho_0^{1/3} \rho_*^{1/3}} \right) \right] dV$$

Учитывая (3.1), для малых флуктуаций получим

$$\delta S \approx - \frac{1-2/3\sigma}{2\rho_0^2(1-\sigma)^2} N\psi = - Q(\rho_0, \rho_*) N\psi \quad (3.2)$$

Чтобы согласно (2.5) записать вероятность возмущенного состояния, отвечающего некоторому значению  $\psi$ , необходимо найти также его статистический вес, т. е. ввести меру множества функций  $\varphi(x, y, z, t)$ , для которых величина  $\psi$  лежит в определенном интервале. Представим  $\varphi$  в виде тригонометрического многочлена

$$\varphi = \sum_{i, j, l} a_{ijl}(t) \cos \frac{2\pi i x}{L_x} \cos \frac{2\pi j y}{L_y} \cos \frac{2\pi l z}{L_z} = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}(t) \prod_k \cos \frac{2\pi m_k x_k}{L_k}$$

$$M = M_x M_y M_z, \quad x_k = x, y, z \quad (3.3)$$

Имеем равенство Парсевалю

$$V\psi = \frac{L_x L_y L_z}{8} \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}^2(t) = V \frac{r^2}{8} \quad (3.4)$$

В этих выражениях  $L_x, L_y, L_z$  — линейные размеры объема  $V$ ,  $1 \leq i \leq M_x$ ,  $1 \leq j \leq M_y$ ,  $1 \leq l \leq M_z$ , вектор  $\mathbf{m}$  обозначает различные комбинации индексов  $i, j, l$ . Легко видеть, что функции вида (3.3) автоматически удовлетворяют второму условию (3.1). Переходя от  $V$  к  $V^+$ , запишем  $\varphi^+ \geq 0$  на  $V^+$  в виде

$$\varphi^+ = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}^+(t) \prod_k \cos \frac{2\pi m_k x_k^+}{L_k^+}, \quad \psi^+ = \frac{(r^+)^2}{8}$$

Из условия положительности  $\varphi^+$  на  $V^+$  имеем  $a_{\mathbf{m}}^+ \geq 0$ . Нетрудно показать также, что условие ограниченности  $\varphi^+$  приводит к условию

$$\sum a_{\mathbf{m}}^+(t) \leq \rho_* - \rho_0$$

Величины  $a_{\mathbf{m}}^+(t)$  можно рассматривать как координаты точки в  $M$ -мерном пространстве. Допустимые значения  $a_{\mathbf{m}}^+$  определяют область этого пространства, ограниченную гиперповерхностями

$$\sum (a_{\mathbf{m}}^+)^2 = (R^+)^2, \quad \sum a_{\mathbf{m}}^+ = \rho_* - \rho_0, \quad a_{\mathbf{m}}^+ = 0 \quad (3.5)$$

Здесь  $R^+$  — максимальное значение  $r^+$  (отнесенное ко всему объему  $V$ ), которое определяется ниже. В качестве искомой меры разумно выбрать объем шарового слоя  $(r, r + dr)$ , ограниченного гиперплоскостями (3.5). Такой выбор продиктован соотношениями статистической однородности введенного пространства, т. е. равноправием различных коэффициентов  $a_{\mathbf{m}}^+$ , а также следует из (3.4). Легко видеть, что вместо объема шарового слоя в одном квадранте  $a_{\mathbf{m}}^+ \geq 0$  можно взять в качестве меры также объем слоя, ограниченного  $2^M$  гиперплоскостями

$$\sum a_{\mathbf{m}}^+ (-1)^{s_{\mathbf{m}}} = \rho_* - \rho_0 \quad (3.6)$$

Здесь индексы  $s_{\mathbf{m}}$  могут принимать значения 0 и 1 независимо друг от друга.

Рассмотрим сначала объем  $d\Omega_M$ , ограниченный  $M$ -мерными сферами  $r$  и  $r + dr$  и только двумя симметричными относительно начала координат гиперплоскостями вида (3.6). Имеем

$$d\Omega_M = S_{M'}(r) dr = \omega_M S_M(r) dr$$

Здесь  $S_{M'}$  — площадь поверхности соответствующей сферической зоны,  $S_M$  — площадь всей гиперсферы радиуса  $r$ , а  $\omega_M$  по определению равна  $S_{M'}/S_M$ . Изложение поясняется фиг. 3, на которой изображена указанная область для случая, когда  $M = 2$ . Линии  $l$  и  $l'$  отвечают симметричным гиперплоскостям, а окружность  $R^+$  — гиперсфере. Эквивалентом  $S_{M'}$  служит суммарная длина выделенных жирным дуг, а объема шарового слоя — площадь заштрихованной области.

Определим в пространстве фурье-коэффициентов унитарное преобразование  $\{a_{\mathbf{m}}^+\} \rightarrow \{b_{\mathbf{m}}^+\}$  такое, что координаты точек пересечения перпендикуляра, опущенного на гиперплоскости из начала координат,  $b_{\mathbf{m}_0}^+ = \pm b \delta_{\mathbf{m}_0}$  (пунктир на фиг. 3). Для определения  $b$  используем симметрию  $a_{\mathbf{m}}^+$  в уравнениях (3.6). Тогда для координат указанной точки в базисе  $\{a_{\mathbf{m}}^+\}$  имеем

$$a_{\mathbf{m}_0}^+ = \pm M^{-1}(\rho_* - \rho_0)$$

Отсюда получим

$$b = \pm \left( \sum (a_{m0}^+)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{M}} (\rho_* - \rho_0)$$

Видно, что с увеличением  $M$  гиперплоскости неограниченно сближаются. Отношение площади сферической зоны к площади всей сферы после вычислений [13] представится в виде

$$\omega_M(r) \approx \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_* - \rho_0}{\sqrt{2}r} \right), \quad M \gg 1$$

Вводим далее две новые симметричные гиперплоскости (см. 2 и 2' на фиг. 3) и рассматриваем сечение ими фигуры, ограниченной гиперсферой  $r$  и первыми гиперплоскостями. Поскольку при  $M \gg 1$  эти гиперплоскости как угодно близки друг к другу, можно считать, что площадь  $M$ -мерной кольцевой зоны пропорциональна площади  $(M-1)$ -мерной сферы радиуса  $r$ , и повторить предыдущие рассуждения, относя их уже к  $(M-1)$ -мерной сфере. Рассуждая по индукции, получим

$$\omega_{M-n} \approx \omega_{M-n+1} \approx \dots \approx \omega_M, \quad M-n \gg 1$$

Отсюда для искомой меры в  $V^+$  с точностью до несущественных постоянных множителей получим (учитываем, что  $S_M \sim r^{M-1}$ )

$$\chi^+(r) \left[ r \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_* - \rho_0}{\sqrt{2}r} \right) \right]^M \quad (3.7)$$

Здесь  $\chi^+(r)$  — некоторая функция от  $r$ , не зависящая от  $M$ .

Совершенно аналогичные рассуждения применимы и для  $\chi^-$  в области  $V^-$ . Соответствующая мера выразится в том же виде (3.7), но с заменой  $\rho_* - \rho_0$  на  $\rho_0$ .

Из предыдущего для вероятностей  $dQ^\pm(r)$  нахождения величин  $r^\pm$  в интервале  $(r, r + dr)$  получим

$$dQ^+(r) \sim \chi^+(r) \left[ r \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_* - \rho_0}{\sqrt{2}r} \right) \right]^M \exp \left( -\frac{Q}{8} N r^2 \right) dr \quad (3.8)$$

$$dQ^-(r) \sim \chi^-(r) \left[ r \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_0}{\sqrt{2}r} \right) \right]^M \exp \left( -\frac{Q}{8} N r^2 \right) dr$$

Найдем теперь  $M$  и  $R^\pm$ . Коэффициенты Фурье  $a_m(t)$  соответствуют различным степеням свободы множества функций  $\varphi$  из (3.3). Пусть частицы движутся группами по  $N_0$  частиц в каждой. Тогда задание определенной функции  $\varphi$  вполне эквивалентно заданию  $N/N_0$  векторных функций времени, определяющих положение этих групп в объеме  $V$ . Вместо таких функций можно ввести систему независимых скалярных коэффициентов  $a_m(t)$ , причем ввиду их независимости  $M = 3N/N_0$ .

В предельно разреженной системе частиц число  $N_0 = 1$ , т. е. каждая частица ведет себя независимо от других. В плотной системе это не так, ибо виртуальное смещение некоторой частицы вызывает перегруппировку и коррелированное смещение соседних частиц. Предельный случай, когда задание движения одной частицы всецело определяет движение других частиц некоторой группы, осуществляется при плотной упаковке частиц этой группы. Предположим, что такая упаковка достигается в объеме  $V' \ll V$  взвешенного слоя, в котором среднее число частиц  $N' = V'/v = (\rho_0/v^0)V'$ . В состоянии плотной упаковки в этом объеме будет находиться  $N_0 = (\rho_*/\rho_0)N'$  частиц, откуда следует, что

$$\delta N' = \rho_0^{-1} (\rho_* - \rho_0) N_0$$

После вычислений получим для распределения плотноупакованных групп частиц по числу  $N_0$

$$dq(N_0) \sim \exp(-\alpha N_0) dN_0, \quad \alpha = \frac{(\rho_* - \rho_0)^2}{2} \frac{\rho_*}{\rho_0^3} \frac{1 - 3/\sigma^2}{(1 - \sigma)^2}$$



Используя это распределение, для средних  $\langle N_0 \rangle$  и  $\langle M \rangle$  имеем

$$\langle N_0 \rangle = \frac{1 + \alpha}{\alpha} = \frac{1}{G}, \quad \langle M \rangle = 3N\alpha e^\alpha (-\text{Ei}(-\alpha)) \approx \frac{3N}{\langle N_0 \rangle} = 3GN \quad (3.9)$$

Именно это выражение для  $\langle M \rangle$  должно использоваться во всех расчетах, связанных с представлением  $\phi$  в виде (3.3). Зависимости величин  $Q$  из (3.2) и  $G$  из (3.9) от  $\rho_0$  при  $\rho_* = 0.6$  приведены на фиг. 4, из которой видно, что  $G$  заметно отлична от единицы лишь в малой окрестности  $\rho_*$ .

Максимальные значения  $R^+$  и  $R^-$  достигаются в состоянии, когда часть  $V^-$  объема  $V$  вообще свободна от частиц, а  $V^+$  заполнена плотноупакованными частицами. Учитывая (3.1) и (3.4), после тривиального подсчета получим

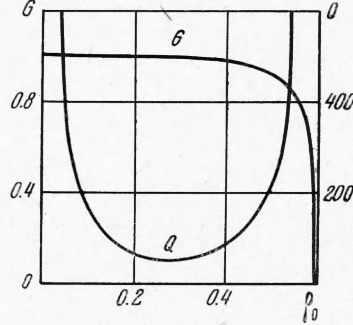
$$R^+ = \max \{r^+\} = \left(8 \frac{\rho_0}{\rho_*} (\rho_* - \rho_0)^2\right)^{1/2}$$

$$R^- = \max \{r^-\} = \left(8 \frac{\rho_* - \rho_0}{\rho_*} \rho_0^2\right)^{1/2} \quad (3.10)$$

Рассмотрим интеграл  $J_k^+$  от  $(r^+)^k$  по  $dQ^+(r)$  в интервале  $r$  от нуля до  $r_m^+$  из (3.10). Имеем с учетом (3.9)

$$J_k^+ \sim \int_0^{R^+} \chi^+(r) r^k \left[ r \operatorname{erf} \left( \frac{\rho_* - \rho_0}{\sqrt{2}r} \right) \right]^{\langle M \rangle} \times$$

$$\times \exp \left( -\frac{Q}{8} Nr^2 \right) dr$$



Фиг. 4

Максимум подынтегральной функции достигается в точке  $r = r_m^+$ , определяемой уравнением

$$(r_m^+)^2 = 12 \frac{G}{Q} \left[ 1 - \frac{\rho_* - \rho_0}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{(\rho_* - \rho_0)^2}{2(r_m^+)^2} \right) \operatorname{erf}^{-1} \left( \frac{\rho_* - \rho_0}{\sqrt{2}r_m^+} \right) \right] \quad (3.11)$$

Аналогичное уравнение с заменой  $\rho_* - \rho_0$  на  $\rho_0$  имеет место также для  $r_m^-$ . Применяя метод Лапласа, получим асимптотические представления интегралов  $J_k^\pm$  при больших  $N$ , откуда имеем

$$\langle (r^\pm)^2 \rangle = (\min \{r_m^\pm, R^\pm\})^2, \quad \langle r^2 \rangle = \langle (r_m^+)^2 \rangle + \langle (r_m^-)^2 \rangle$$

Почти во всей области изменения  $\rho_0$  величины  $r_m^\pm < R^\pm$ . Это обстоятельство свидетельствует в пользу применимости теории малых флуктуаций, использованной выше.

Пренебрегая отличием  $G$  от 1, а  $r_m^\pm$  — от  $12G/Q$ , получим окончательно для интенсивности флуктуаций

$$\langle \psi \rangle = 1/8 \langle r^2 \rangle \approx 3Q^{-1} \quad (3.12)$$

Именно это выражение использовано в последующих расчетах.

**§ 4. Эффективная температура, интенсивность пульсаций и коэффициенты переноса.** Ниже используем только два первых члена разложения различных функций по  $\phi$  в окрестности  $\rho_0$ . В действительности, ряд важных функций весьма зависит от  $\rho_0$ ; поэтому предлагаемые расчеты носят главным образом порядковый характер.

Для определенности полагаем, что силы, действующие на частицы, совершающие пульсационные движения, могут быть удовлетворительно описаны при помощи полуэмпирической формулы работы [14]

$$R = \frac{Ae^{3.75}}{18 + 0.6(Ae^{4.75})^{1/2}}, \quad R = \frac{2u_0a}{v_0}, \quad A = \frac{8ga^3}{v_0^2} \frac{d_2 - d_1}{d_1} \quad (4.1)$$

Здесь  $R$  и  $A$  — критерии Рейнольдса и Архимеда,  $v_0$  — кинематическая вязкость жидкой фазы. В предельном случае малых чисел Архимеда эта формула подтверждается также независимым теоретическим расчетом [15]. Из (4.1) следует выражение для добавочной силы  $F(\phi)$ , действующей

на частицу в ее крупномасштабном движении

$$F(\varphi) \approx 6\pi\mu_0 a [K_0(\delta u - \delta w) + K_0' u_0 \varphi], \quad K_0 = K(\rho_0, X)$$

$$K(\rho, X) = \varepsilon^{-3.75}(1 + \varepsilon^{2.375} X), \quad K_0' = \left. \frac{d}{d\rho} K(\rho, X) \right|_{\rho=\rho_0} \quad (4.2)$$

Здесь введен новый безразмерный параметр

$$X \approx 0.033A^{1/2} \quad (4.3)$$

Величины  $\delta u$  и  $\delta w$  представляют изменение скоростей жидкой и твердой фаз внутри флуктуации и, вообще говоря, зависят от времени. Для приближенной оценки величины  $\delta u$  нужно рассмотреть задачу о фильтрации жидкости в пористой среде с пористостью  $1 - \rho_0$ , содержащей перемещающуюся неоднородность с пористостью  $1 - \rho_0 - \varphi$ , что можно сделать, используя, например, уравнения работы [16]. Для простоты положим, что характерное время существенной перестройки течения жидкости вблизи неоднородности значительно выше среднего времени жизни неоднородности  $T$ . Тогда, исходя из условия постоянства расхода жидкой фазы, получим

$$\delta u \approx u_0 (1 - \rho_0)^{-1} \varphi \quad (4.4)$$

В противоположном предельном случае достаточно рассмотреть задачу о стационарной фильтрации. Относя индекс 0 к области вне, а индекс 1 — к области внутри неоднородности, запишем уравнения для давления жидкости и соотношения типа Дарси, связывающие скорости фильтрации с градиентами давления

$$\Delta p_i = 0, \quad \mathbf{u}^{(i)} = -\frac{\varepsilon_i}{\beta_i} \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{r}}, \quad \beta(\rho) = \frac{9}{2} \frac{\mu_0}{a^2} \rho K(\rho, X)$$

Ищем решения уравнений Лапласа в виде

$$p_0 = (-\beta_0 + Br^{-3})((u_0 - \delta w) \mathbf{r}), \quad p_1 = -C((u_0 - \delta w) \mathbf{r})$$

Вычисляя постоянные  $B$  и  $C$  из условий непрерывности давления и нормальной компоненты скорости фильтрации на границе неоднородности, получим

$$u_1 - \delta w = \frac{3\varepsilon_0 / \beta_0}{2\varepsilon_0 / \beta_0 + \varepsilon_1 / \beta_1} \frac{\beta_0}{\beta_1} (u_0 - \delta w)$$

Отсюда нетрудно найти также  $\delta u = u_1 - u_0$ . Ниже используем только  $\delta u$  в форме (4.4), так как получаемые результаты по порядку величины будут верными также и для других случаев.

Непосредственное решение (4.2) с целью определения  $\delta w(t)$  затруднено. Однако рассматривая среднюю скорость  $w_0$  вертикального крупномасштабного движения в объеме, содержащем много флуктуационных образований, на основании (4.2), (4.4) и (3.12) получим

$$w_0 \approx w_\infty (1 - e^{-T/\tau^\circ}) \quad w_\infty \approx W_*(\rho_0, X) u_0 \quad (4.5)$$

$$W_*(\rho_0, X) = \left( \frac{3}{Q} \right)^{1/2} \left( \left. \frac{\partial \ln K}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} + \frac{1}{1 - \rho_0} \right), \quad \tau^\circ = \frac{2\kappa a^2}{9\nu_0 K_0}, \quad \kappa = \frac{d_2}{d_1}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае положительная флуктуация  $\varphi > 0$  всегда ведет, согласно (4.5), к перемещению частиц вверх. Это обстоятельство подтверждает представления Лева [5, 17], что агрегирование частиц вызывает тенденцию к дополнительному расширению взвешенного слоя. В случае, когда устанавливается стационарный режим фильтрации вблизи неоднородности, можно показать, что существует  $\rho_0 = \rho'$  такое, что при  $\rho_0 < \rho'$  флуктуация  $\varphi > 0$  приводит к падению агрегированных частиц в слое. Значению  $\rho_0 = \rho'$  отвечает резкий минимум  $w_0$ , а также других статистических характеристик взвешенного слоя. С переходом к случаю (4.4) величина  $\rho'$  убывает и затем обращается в нуль.

Рассмотрим энергетические соотношения в системе взвешенных частиц. Работу  $\Delta A$  сил (4.2), отнесенную к единице объема и единице времени, можно представить в виде  $\Delta A \approx 6\pi\mu_0 a n K_0 (w_\infty - w_0) w_0$ . Эта работа компенсирует убыль энергии крупномасштабных пульсаций

$$E \approx n m w_0^2 / 2T$$

Энергия  $E$ , в свою очередь, в силу (1.2), равна диссипации  $W$  энергии мелкомасштабных пульсационных движений. Последнюю можно предста-

вить в виде (усредняем по распределению (2.1))

$$W \approx 18\mu_0 a n K_0 [1 + \frac{1}{2} s a (\pi v_0 \tau)^{-1/2}] (\theta / m)$$

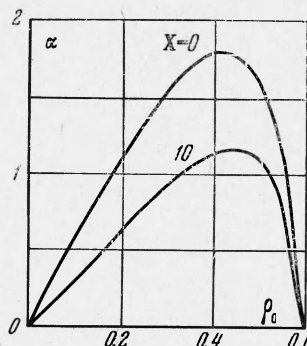
Последний член в прямых скобках появляется из-за того, что вязкая сила, действующая на внезапно приведенную в движение частицу, отлична от силы, действующей при равномерном движении [18]. Коэффициент  $s \sim 1$  характеризует относительную величину дельтаобразного изменения скорости при столкновениях и может быть подсчитан точно; здесь примем  $s \approx 1/2$ . Для  $\tau$  имеем очевидную оценку

$$\tau \approx \lambda \left(\frac{\theta}{m}\right)^{-1/2} \approx a \frac{\rho_*^{1/3} - \rho_0^{1/3}}{(\rho_0 \rho_*)^{1/3}} \left(\frac{\theta}{m}\right)^{-1/2}$$

Приравнявая  $\Delta A$  и  $E$  и учитывая (4.5), получим уравнение, из которого определим  $T \approx 1.25 \tau^\circ$ . Имеем поэтому

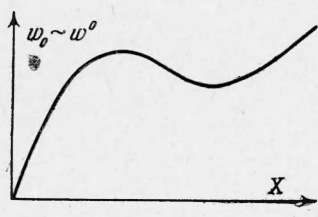
$$w_0 \approx 0.715 w_\infty = 0.715 W_* (\rho_0, X) u_0 \quad (4.6)$$

Отношение  $\alpha$  скорости  $w_0$  к скорости фильтрации  $u^\circ$  как функция от  $\rho_0$  представлено на фиг. 5 для случаев  $X = 0$  и  $X = 10$ . Видно, что уже крупномасштабная составляющая полной вертикальной скорости может приближаться по величине к скорости фильтрации — в соответствии с кривой фиг. 1. Величина  $\rho_*$  была принята равной 0.6.



Фиг. 5

Наличие максимумов на кривых  $\alpha$  хорошо согласуется с экспериментом. Действительно, считается твердо установленным [1,7,19], что первоначальное увеличение пульсационной скорости с ростом  $u^\circ$  при достижении  $u^\circ$  определенного критического значения сменяется убыванием.



Фиг. 6

Приравнявая  $E$  и  $W$ , получим уравнение для определения эффективной температуры системы взвешенных частиц

$$\frac{\theta}{m} \left[ 1 + \gamma \left(\frac{\theta}{m}\right)^{1/4} \right] = \frac{\tau^\circ}{6T} w_0^2$$

$$\gamma \approx \frac{1}{4} \left(\frac{a}{\pi v_0}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_0^{1/3} \rho_*^{1/3}}{\rho_*^{1/3} - \rho_0^{1/3}}\right)^{1/2} \quad (4.7)$$

Легко видеть, что среднеквадратичная скорость мелкомасштабных движений всегда в несколько раз ниже  $w_0$ , причем  $w^\circ / w_0 = (\theta / m)^{1/2} / w_0 < \sim 0.4$ . Это согласуется с экспериментами всех цитированных авторов; например, согласно [8], «поперечная» скорость  $w^\circ$  оказывается в три-четыре раза ниже «продольной» скорости  $w_0 + w^\circ$ . Из (1.1) и (4.1) имеем

$$u_0 = \frac{v^\circ (d_2 - d_1) g}{6\pi\mu_0 a K (\rho_0, X)}$$

Подставляя это в (4.6) и вводя критерии  $X$  из (4.3) и  $\kappa = d_2 / d_1$ , получим после ряда вычислений

$$w_0 \approx 3.8 (\kappa - 1)^{1/3} W_0 (\rho_0, X) X^{1/3} w_*, W_0 = W_* K^{-1}, w_* = (g v_0)^{1/3} \quad (4.8)$$

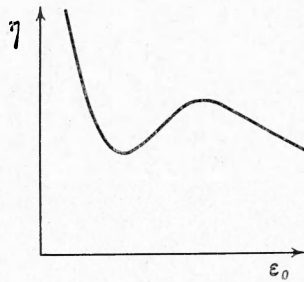
Скорость  $w^\circ$  легко определяется из (4.7) и (4.8). Характерная скорость  $w_*$  пропорциональна кубическому корню из кинематической вязкости жидкости и вообще не зависит от типа взвешенных частиц. Характери-

стики последних оказывают влияние на интенсивность локальных движений только посредством безразмерных параметров  $X$  и  $\kappa$ . При этом  $w^0 \sim w_0 \sim \kappa^{1/3}$ ,  $\kappa \gg 1$ , и, кроме того,

$$w^0 \sim w_0 \sim X^{1/3} \sim A^{2/3}, \quad [X \ll X_0 \approx \varepsilon_0^{-2.375} \quad (A \ll A_0)]$$

$$w^0 \sim X^{2/15} \sim A^{1/15}, \quad w_0 \sim X^{1/3} \sim A^{1/6}, \quad (X \gg X_0)$$

Эти зависимости неплохо подтверждаются экспериментами. Например, исследуя эффективную температуропроводность взвешенного слоя в горизонтальном ( $a_1 \sim w^0$ ) и вертикальном ( $a_2 \sim w_0$ ) направлениях, В. А. Бородуля и А. И. Тамарин [20, 21] предположили эмпирические зависимости вида  $a_i \sim A^{\delta_i}$  и установили, что с увеличением  $A$  показатели  $\delta_i$  убывают. По их оценкам в широком диапазоне чисел Архимеда (до  $5 \cdot 10^4$ )  $\delta_1 \leq 0.27$ ,  $0 < \delta_2 < 0.43$  и при  $A > 5 \cdot 10^4$  величины  $0 < \delta_1 < 0.12$ ,  $0 < \delta_2 < 0.144$ , что согласуется с приведенными асимптотическими оценками. В рассмотренном случае, когда верна формула (4.4), величины  $w_0$  и  $w^0$  монотонно возрастают с  $A$  также в области  $A \sim A_0$ . Однако негрудно показать, что во втором предельном случае — режиме стационарной фильтрации — обе эти величины как функции  $A$  имеют максимум и минимум (зависимость их от  $X$  имеет вид кривой фиг. 6). Эта особенность функций  $w_0(A)$  и  $w^0(A)$  также согласуется с экспериментальными фактами. Действительно, максимум пульсационных скоростей в области малых  $A$  ( $A \sim A_0$ ) экспериментально наблюдался А. К. Бондаревой<sup>1</sup>, которая правильно объяснила его изменением гидродинамического режима обтекания частиц во взвешенном слое с ростом  $A$ .



Фиг. 7

Выражения (4.7) и (4.8) полностью определяют введенные выше коэффициенты (2.4), а также изотропное давление твердой фазы. Имеем после вычислений (для простоты полагаем  $\gamma = 0$  в (4.7))

$$\eta \approx 15\kappa H (\rho_0, X) X^2 \mu_0$$

$$H = \rho_0 W_0 (Y^{-1} + 0.8 + 0.76Y)$$

$$\zeta \approx 15\kappa Z (\rho_0, X) X^2 \mu_0, \quad Z = \rho_0 W_0 Y$$

$$D \approx 6 \Delta (\rho_0, X) X^2 \nu_0, \quad \Delta = W_0 Y^{-1} \quad (4.9)$$

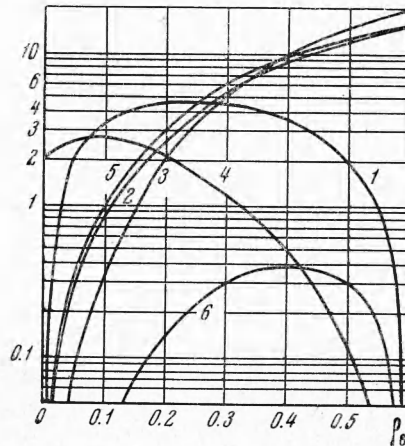
$$\gamma \approx 3.9 \cdot 10^{-2} (\kappa - 1) \Gamma (\rho_0, X) (g/\nu_0)$$

$$\Gamma = \rho_0 W_0 (Y^{-1} + 1.2 + 0.75Y)$$

$$p \approx 1.9 (\kappa - 1)^{2/3} \Pi (\rho_0, X) X^{2/3} (d_2 w_*^2)$$

$$\Pi = \rho_0 (1 + Y) W_0^2$$

Заметим, что коэффициенты (4.9) описывают лишь изотропные составляющие в полном переносе различных признаков, связанные только с мелко-масштабным движением частиц. Учет соответствующих анизотропных составляющих, возникающих в результате крупномасштабного пульсационного движения, в принципе можно провести по аналогии с теорией турбулентного перемешивания, вводя, например, некие аналоги напряжений Рейнольдса, эффективный «путь смешения»  $l$  типа прандтлевского или введенного в [7] и равного  $\sim w_0 T$ , что представляет собой вполне самостоятельную задачу. Очевидно, анизотропный член появляется и в выражении для полного давления твердой фазы.



Фиг. 8

<sup>1</sup> Бондарева А. К. Движение частиц и теплообмен во взвешенном слое. Канд. дисс., Ленинград, 1958. Некоторые сведения об этой работе, в частности, касающиеся пульсационных движений частиц в слое, можно найти в монографии [1].



Кроме того, в коэффициенте кинетической вязкости  $\eta$  не учтено трение одних частиц о другие при их относительном движении. Коэффициент вязкости  $\eta'$ , связанный с этим механизмом диссипации энергии, обращается в крайне большую величину при  $\rho_0 \rightarrow \rho_*$ , но быстро убывает с уменьшением  $\rho_0$ , становясь весьма малым уже при мало отличающихся от  $\rho_*$  величинах  $\rho_0$ . Очевидно, что в области, где  $\eta'$  мала, зависимость полного переноса импульса по вертикали, а следовательно и «продольного» коэффициента вязкости, от  $\varepsilon_0$  имеет вид кривой фиг. 7. Именно такие кривые зависимости локальной вязкости от скорости фильтрации были найдены в работе [22].

Зависимости величин  $W_0$ ,  $H$ ,  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ,  $\Pi$ , умноженных на  $10^2$ , от  $\rho_0$  при  $\rho_* = 0.6$  и  $X = 10$  приведены на фиг. 8 (кривые 1—6 соответственно). Эти зависимости не противоречат бытующим в литературе представлениям.

В заключение автор благодарит Г. И. Баренблатта и участников его семинара за полезное обсуждение работы.

Поступила 16 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Забродский С. С. Гидродинамика и теплообмен в псевдооживленном (кипящем) слое. Госэнергоиздат, 1963.
2. Wicke E., Fetting F. Wärmeübertragung in Gaswirbelschichten. Chem. Ingr.-Techn., 1954, В. 26, No 6.
3. Peskin R. L. Some Effects of Particle-Particle and Particle-Fluid Interaction in Two Phase Flow Systems. Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Stanford Univ. Press, Calif., 1960.
4. Левич В. Г., Мясников В. П. Кинетическая теория псевдооживленного состояния. Хим. пром-сть, 1966, № 6.
5. Лева М. Псевдооживление. Гостехиздат, 1961.
6. Тоомейу R., Джонстоне Н. Heat Transfer between Beds of Fluidized Solids and the Walls of Container. Chem. Engng. Progr. Symp. Ser. 1953, vol. 49, No 5.
7. Бондарева А. К., Тодес О. М. Теплопроводность и теплоотдача в кипящем слое. Инж.-физ. ж., 1960, т. 3, № 2.
8. Кондукон Н. Б., Корнилаев А. Н., Скачко И. М., Ахроменков А. А., Круглов А. С. Исследование параметров движения частиц в псевдооживленном слое методом радиоактивных изотопов. 1. Методы эксперимента и траектория движения частиц. 2. Кинематика частиц. Инж.-физ. ж., 1963, т. 6, № 7; 1964, т. 7, № 7.
9. Ахроменков А. А., Круглов А. С. Определение скорости твердых частиц в кипящем слое методом меченых атомов. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 5.
10. Massimilla L., Westwater I. W. Photographic Study of Solid — Gas Fluidization. Amer. Inst. Chem. Engng. J., 1960, vol. 6, No 1.
11. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Кислых В. И. Флуктуации числа частиц твердой фазы в слое, псевдооживленном жидкостью. Инж.-физ. ж., 1966, т. 10, № 5.
13. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. Изд. «Мир», 1965.
14. Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Приближенные закономерности гидравлики взвешенного слоя и стесненного падения. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, 1958, т. 1, № 1.
15. Бувич Ю. А. Взаимодействие фаз в концентрированных дисперсных системах. ПМТФ, 1966, № 3.
16. Бувич Ю. А. Двухжидкостная гидродинамика взвешенного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
17. Лева М., Груммер М. A Correlation of Solids Turnover in Fluidized Systems, its Relation to Heat Transfer. Chem. Engng. Progr., 1952, vol. 48, No 6.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
19. Cairns E. I., Prausnitz I. M. Macroscopic Mixing in Fluidization. Amer. Inst. Chem. Engng. J., 1960, vol. 6, No 4.
20. Тамарин А. И., Бородуля В. А. Исследование температуропроводности (перемешивания частиц) псевдооживленного слоя, заторможенного сетками. Инж.-физ. ж., 1963, т. 6, № 11.
21. Бородуля В. А., Тамарин А. И. Исследование эффективной температуропроводности псевдооживленного слоя. Инж.-физ. ж., 1964, т. 7, № 12.
22. Shuster W. W., Haas F. C. Point Viscosity Measurements in a Fluidized Bed. J. Chem. and Engng. Data, 1960, vol. 5, No 4.