теплопроводности и, следовательно, не приводит к изменению времени зажигания, а лишь к увеличению масштаба длины l_0. Для промежуточных значений $l_{кв}/l_0$ зависимость τ^* от параметров, определяющих энергетику лучистого теплообмена, имеет сложный характер и может быть проанализирована лишь численно в каждом конкретном случае. Основную трудность при этом представляет разработка подходящей модели радиационного теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буркина А. Г., Вилюнов В. Н.** ПМТФ, 1976, 6, 96.
2. **Мержанов А. Г., Абрамов В. Г., Гонтковская В. Т.** Докл. АН СССР, 1963, **148**, 1, 156.
3. **Шкадинский К. Г., Барзыкин В. В.** ФГВ, 1968, 4, 2, 176.
4. **Берман В. С., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М.** ПММ, 1979, **43**, 1.
5. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
6. **Yuan E. L., Slaughter J. I., Koerner W. E., Daniels F.** J. Phys. Chem., 1959, **63**, 6, 952.
7. **Аверсон А. Э.** // Тепломассообмен в процессах горения.— Черноголовка, 1980.
8. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1987.
9. **Добрего К. В., Жданок С. А.** Весцi АН БССР. Сер. физико-энерг., 1988, 4, 72—74.
10. **Cook G. B.** // Proc. Roy. Soc. Lon., 1959, **A246**, 1245, 154.
11. **Гришин А. М.** ПМТФ, 1966, 5, 25.
12. **Зельдович Я. Б.** Докл. АН СССР, 1963, **150**, 283.
13. **Вилюнов В. Н.** ФГВ, 1966, **3**, 2, 77.
14. **Freidman M. N.** Comb. Flames, 1967, **11**, 3, 239.

г. Минск *Поступила в редакцию 17/VI 1988, после доработки — 9/I 1988*

УДК 534.46

А. Д. Марголин, Г. Н. Мохин, В. Г. Крупкин

ЗАЖИГАНИЕ КЛИНА И КОНУСА ПОТОКОМ ТЕПЛА ПРИ ГОМОГЕННОЙ РЕАКЦИИ

Горение порохов, взрывчатых веществ, а также твердых горючих в окислительной атмосфере часто начинается с зажигания острых кромок, углов, выступов. Это происходит из-за того, что при некоторых режимах нагрева выступы и углы нагреваются быстрее и до более высокой температуры, чем плоская поверхность. Условия воспламенения острых и тонких тел (клина и конуса) в окислительной атмосфере исследовались в [1]. Зажигание прямого угла пороха накаленной поверхностью исследовано в [2], а постоянным тепловым потоком — в [3].

Цель настоящей работы — теоретическое исследование воспламенения тел заостренной формы (типа клина и конуса) из конденсированного вещества, в котором может протекать гомогенная экзотермическая химическая реакция, потоком тепла (как постоянным, так и являющимся функцией координаты). Определяется зависимость от угла при вершине тела таких характеристик, как критерий и температура воспламенения, время задержки. Делаются количественные оценки влияния неоднородностей (заострений) на поверхности зажигаемого тела на процесс воспламенения.

Воспламенение клина и конуса постоянным потоком тепла

Пусть на поверхность клина или конуса из конденсированного вещества, в котором может протекать гомогенная экзотермическая химическая реакция, в момент времени $t = 0$ начинает падать постоянный тепловой поток интенсивности q. Угол при вершине тела положим равным $2\varphi_0$ $(0 < \varphi_0 \leqslant \pi/2)$. Распределение температуры описывается двумерным нестационарным уравнением теплопроводности с объемным источником тепла — гомогенной реакцией. Будем считать, что скорость реакции подчиняется закону Аррениуса и что выгоранием можно пренебречь. Используя цилиндрическую систему координат (r, φ, z), запишем уравнение теплопроводности для плоского клина (угла) в виде (ось клина совпадает с лучом $\varphi = 0$)

$$\frac{c\rho}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{Qk_0}{\lambda}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right).$$

Уравнение для конуса запишем в сферической системе координат (r, φ, ψ), причем зависимость от ψ так же, как и от z для клина, пропадает в силу симметрии краевых условий:

$$\frac{c\rho}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \frac{Qk_0}{\lambda}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right).$$

Начальные и граничные условия:

$$T(0, r, \varphi) = T_0,$$

$$\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}(t, r, \varphi_0) = q, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}(t, r, 0) = \frac{\partial T}{\partial r}(t, \infty, \varphi) = 0.$$

Кроме того, решение в начале координат должно быть ограничено.

Обозначения: $T = T_k$ (t, r, φ) — температура ($k = 1$ — клин, $k = 2$ — конус); t — время; c — теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности; Q — тепловой эффект химической реакции; k_0 — предэкспонент; E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная; T_0 — начальная температура.

После введения безразмерных переменных

$$\Theta = E(T - T^*)/RT^{*2}, \quad \eta = r/r_0, \quad u = \lambda t/(c\rho r_0^2), \quad r_0 = \lambda R T^{*2}/(qE),$$

где T^* — масштабная температура зажигания, уточненная ниже, получим

$$L_1(\Theta) = -\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2} + \Omega\exp(\Theta/(1+\beta\Theta)) = 0, \qquad (1)$$

$$L_2(\Theta) = -\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta^2\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\eta^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right) + \Omega\exp(\Theta/(1+\beta\Theta)).$$

Краевые условия запишутся следующим образом:

$$\Theta(0, \eta, \varphi) = \Theta_0 = E(T_0 - T^*)/RT^{*2}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}(u, \eta, \varphi_0) = 1, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}(u, \eta, 0) = \frac{\partial\Theta}{\partial\eta}(u, \infty, \varphi) = 0, \qquad (3)$$

$$\eta^k\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}(u, 0, \varphi) = 0.$$

В систему (1)—(3) входят: φ_0, Θ_0 — безразмерная начальная температура, $\Omega = r_0 Q k_0 \exp(-E/RT^*)/q$ — параметр, характеризующий относительную роль химической реакции и внешнего потока тепла, и малый параметр $\beta = RT^*/E$. Решение поставленной задачи имеет вид $\Theta = \Theta_k(u, \eta, \varphi, \Omega, \varphi_0, \Theta_0, \beta)$, критерий воспламенения $\Omega^* = \Omega_k^*(\varphi_0, \Theta_0, \beta)$, а время задержки воспламенения $u^* = u_k^*(\Omega^*, \varphi_0, \Theta_0, \beta)$.

Оказывается, что инертный (в отсутствие химической реакции) нагрев и клина, и конуса происходит автомодельным образом, так что система (1)—(3) при $\Omega = 0$ имеет аналитическое решение

$$\Theta_k(u, \eta, \varphi) = \Theta_0 + u^{1/2}g_k(\eta/u^{1/2}, \varphi). \qquad (4)$$

Вид функций $g_1(\xi, \varphi)$ и $g_r(\xi, \varphi)$ приведен в приложении.

Согласно (4), температура вершины клина и конуса (индексы 1, 2) растет пропорционально $u^{1/2}$:

$$\Theta_1(0)=\Theta_0+(\pi u)^{1/2}/\varphi_0,\quad \Theta_2(0)=\Theta_0+2\operatorname{ctg}(\varphi_0/2)\,(u/\pi)^{1/2}.$$

Так как скорость химической реакции сильно зависит от температуры, химический нагрев скажется только непосредственно перед моментом воспламенения, поэтому в первом приближении время воспламенения можно рассчитывать как время нагрева инертного тела до температуры воспламенения T^*, т. е.

$$u_1^*=\Theta_0^2\varphi_0^2/\pi,\quad u_2^*=0{,}25\pi\Theta_0^2\operatorname{tg}^2(\varphi_0/2). \tag{5}$$

При $\varphi_0=\pi/2$ эти формулы, как и должно быть, дают известное выражение для полупространства: $u^*=\pi\Theta_0^2/4$.

В предельном случае малых углов φ_0 задача существенно упрощается. Проведем усреднение уравнений (1) по углу φ

$$\overline{L_1(\Theta)}=\frac{\int\limits_0^{\varphi_0}L_1(\Theta)\,d\varphi}{\varphi_0},\quad \overline{L_2(\Theta)}=\frac{\int\limits_0^{\varphi_0}L_2(\Theta)\sin\varphi\,d\varphi}{1-\cos\varphi_0}$$

и, вводя новые безразмерные переменные, получим уравнение, описывающее распределение температуры в клине или конусе в пределе малых φ_0 (знак усреднения для краткости опускаем):

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)+\frac{K}{x}+\omega\exp\left(\frac{\Theta}{1+\beta\Theta}\right) \tag{6}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\Theta(0,\,x)=\Theta_0, \tag{7}$$

$$x^k\frac{\partial\Theta}{\partial x}(\tau,\,0)=0,\quad \Theta(\tau,\,\infty)=\Theta_0, \tag{8}$$

где $x=r/r_1$; $\tau=\lambda t/(c\rho r_1^2)$, причем для клина $r_1=r_0\varphi_0$ и $\omega=\Omega\varphi_0^2$, а для конуса $r_1=2r_0\operatorname{tg}(\varphi_0/2)$, $\omega=4\Omega\operatorname{tg}^2(\varphi_0/2)$.

Анализ уравнения (6) показывает, что при малых x решение (6)—(8) ведет себя как $\Theta=a(\tau)-x$, где a — некоторая функция. Очевидно, что $\overline{e^\Theta}\neq e^{\overline{\Theta}}$, однако можно показать, что $\overline{e^\Theta}=e^{\overline{\Theta}}+Cx_0^2\varphi_0^4$, где $C\ll 1$ — константа; x_0 — радиус, при котором проводится усреднение уравнения. Поскольку x_0 ограничен, так как при больших x_0 температура мала и реакция вообще не идет, то при достаточно малых φ_0 членом $\sim x_0^2\varphi_0^4$ можно пренебречь.

Решение уравнения (6) с условиями (7), (8) имеет вид $\Theta=\Theta_k(\tau,\,x,\,\omega,\,\Theta_0,\,\beta)$. Видно, что усреднение привело к уменьшению числа независимых переменных на единицу (Θ не зависит явно от φ) и уменьшению числа параметров, определяющих решение (в систему не входит явно φ_0), т. е. существенно упростило задачу. Теперь для критерия и времени зажигания находим: $\omega^*=\omega_k^*(\Theta_0,\,\beta)$ и $\tau^*=\tau_k^*(\omega^*,\,\Theta_0,\,\beta)$ и (при $\beta=0$) $\omega^*=\omega_k^*(\Theta_0)$, $\tau^*=\tau_k^*(\omega^*,\,\Theta_0)$.

Аналитическое решение инертной ($\omega=0$) задачи (6)—(8) приведено в приложении. Температура вершины растет по закону:

$$\Theta_1(0)=\Theta_0+(\pi\tau)^{1/2},\quad \Theta_2(0)=\Theta_0+4(\tau/\pi)^{1/2}. \tag{9}$$

Возвращаясь к переменным u, η, получим, что выражения для времени нагрева инертного тела до температуры воспламенения, получающиеся методом усреднения для малых φ_0, на самом деле являются точными для любых углов $0<\varphi_0\leqslant\pi/2$. Таким образом, можно считать, что функциональные связи, устанавливаемые с помощью метода усреднения, есть хорошее приближение для искомых зависимостей во всем диапазоне углов.

Из-за сильной зависимости скорости химической реакции от температуры время и температура воспламенения довольно четко определены даже без пояснений. Тем не менее уточним эти понятия в соответствии с процедурой, которой мы следовали при численных расчетах. За время воспламенения τ^* было принято, аналогично [4], время, через которое температура при реакции нулевого порядка асимптотически устремляется в бесконечность; температура воспламенения T^* — температура вершины инертного тела, достигаемая за время воспламенения (по терминологии, принятой в [5], экстраполированная температура зажигания). Как показали расчеты, T^* практически совпадает с температурой вершины тела из химически активного вещества в момент, когда скорость разогрева вершины вдвое выше скорости разогрева вершины инертного тела в тот же момент времени τ_i. Время τ_i несколько меньше, чем τ^* (численно найдено, что $\tau_i^{1/2} = \tau^{*1/2} = 0{,}33$ для клина и $\tau_i^{1/2} = \tau^{*1/2} = 0{,}28$ для конуса).

Результаты численного счета при $\beta = 0$ и в интервале $5 < |\Theta_0| < 25$ могут быть аппроксимированы с точностью до 15 % формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= 0{,}33 + 2{,}44\,|\Theta_0|^{-0{,}65}, \\ \omega_2^* &= 0{,}65 + 3{,}3\,|\Theta_0|^{-0{,}5}. \end{aligned} \tag{10}$$

В литературе даются различные функции для критерия воспламенения $\Omega^*(\Theta_0)$ полупространства [4—6], однако при $5 < |\Theta_0| < 25$ они все близки и их различие слабо сказывается на температуре воспламенения. Расчет, проведенный в настоящей работе, дает следующую зависимость (полупространство):

$$\Omega^* = 1{,}3|\Theta_0|^{-2/3}, \tag{11}$$

которая хорошо согласуется с данными [5] с учетом приведения критерия воспламенения к виду, принятому в настоящей работе.

Сопоставив (10) с (11), получим интерполяционные выражения для критерия воспламенения в функции угла, хорошо описывающие значения для малых углов и для полупространства ($\varphi_0 = \pi/2$):

$$\begin{aligned} \Omega_1^* &= \left(0{,}13\cos\varphi_0 + (1{,}3 - 0{,}3\cos\varphi_0)\,|\Theta_0|^{-2/3}\right)(\pi/2\varphi_0)^2, \\ \Omega_2^* &= \left(0{,}2\cos\varphi_0 + (1{,}3 - 0{,}25\cos\varphi_0)\,|\Theta_0|^{-2/3}\right)\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_0}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно (5), (9), в размерных величинах время воспламенения клина или конуса с произвольным углом при вершине имеет вид

$$t_1^* = \frac{\pi}{4}\,\frac{\lambda c\rho\left(T_1^*(\varphi_0) - T_0\right)^2}{q^2}\left(\frac{2\varphi_0}{\pi}\right)^2,$$

$$t_2^* = \frac{\pi}{4}\,\frac{\lambda c\rho\left(T_2^*(\varphi_0) - T_0\right)^2}{q^2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2},$$

где $T^*(\varphi_0)$ находится из (12).

В промежуточной области имеется расчет [3] для клина с прямым углом при вершине. Значение времени зажигания, полученное в этой работе, мало отличается от наших результатов при $\varphi_0 = \pi/4$. Авторы [3] критерий зажигания не приводят, однако если его найти на основе приведенных там результатов, то окажется, что критерий для прямого угла примерно в 7 раз больше, чем для полупространства [6]. Этот результат хорошо согласуется с нашими данными, согласно которым их отношение изменяется от 4 до 7 в зависимости от начальной температуры.

Сравнение времени воспламенения клина и конуса и плоской поверхности. Воспламенение шероховатой поверхности

Рассмотрим полупространство, на котором имеется уединенный заостренный выступ в форме клина или конуса. Считаем, что длина выступа такова, что применимы найденные результаты. Если на поверхность выступа падает поток тепла той же интенсивности, что и на плоскую поверхность, то отношение их времен зажигания будет находиться из выражений

$$\frac{t_1^*(\varphi_0)}{t^*(\pi/2)} = \left(\frac{T_1^*(\varphi_0) - T_0}{T^*(\pi/2) - T_0}\right)^2 \left(\frac{2\varphi_0}{\pi}\right)^2,$$

$$\frac{t_2^*(\varphi_0)}{t^*(\pi/2)} = \left(\frac{T_2^*(\varphi_0) - T_0}{T^*(\pi/2) - T_0}\right)^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2},$$

температура воспламенения определяется из критерия (12). В первом приближении можно считать, что время воспламенения острого тела пропорционально квадрату угла при вершине. Указанный случай равенства потоков энергии на единицу площади острого тела и плоской поверхности реализуется при поглощении изотропного излучения, а также приближенно при нагреве тела в турбулентном потоке горячего газа, когда температура газа много больше температуры воспламенения.

Если воспламенение осуществляется плоскопараллельным потоком лучистой энергии (например лазером), то результаты зависят от взаимной ориентации тела и потока. При нормальном к плоской поверхности падении света на поверхность выступа падает поток $q \sin \varphi_0$. Запишем отношения времени зажигания:

$$\frac{t_1^*(\varphi_0)}{t^*(\pi/2)} = \left(\frac{T^*(\varphi_0) - T_0}{T^*(\pi/2) - T_0}\right)^2 \left(\frac{2\varphi_0}{\pi \sin \varphi_0}\right)^2,$$

$$\frac{t_2^*(\varphi_0)}{t^*(\pi/2)} = \left(\frac{T^*(\varphi_0) - T_0}{T^*(\pi/2) - T_0}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{tg}(\varphi_0/2)}{\sin \varphi_0}\right)^2. \qquad (13)$$

Время зажигания клина (конуса) при указанном режиме нагрева в несколько раз меньше, чем полупространства, причем отношение времен есть слабая функция угла и при $\varphi_0 < 30°$ становится константой. Температура воспламенения должна находиться из (12), где q умножен на $\sin \varphi_0$. Она также слабо зависит от угла.

Результаты (13) имеют место и при некотором отклонении направления падения света от нормального, т. е. при $0 < \psi < \varphi_0$, где ψ — угол падения, отсчитываемый от нормали к поверхности. При $\varphi_0 < \psi < \pi/2$ время зажигания клина или конуса становится значительно меньше времени зажигания плоской поверхности:

$$\frac{t_1^*(\varphi_0)}{t^*(\pi/2)} = \left(\frac{T^*(\varphi_0) - T_0}{T^*(\pi/2) - T_0}\right)^2 \left(\frac{4\varphi_0}{\pi(1+\gamma)\sin\varphi_0}\right)^2,$$

$$\frac{t_2^*(\varphi_0)}{t^*(\pi/2)} = \left(\frac{T^*(\varphi_0) - T_0}{T^*(\pi/2) - T_0}\right)^2 \left(\frac{\pi \operatorname{tg}(\varphi_0/2)}{\left(\pi + \sqrt{\gamma^2 - 1} - \arccos 1/\gamma\right)\sin\varphi_0}\right)^2,$$

$$\gamma = \operatorname{tg}\psi / \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Время воспламенения можно найти, если определить отношение потоков тепла, падающих на плоскую поверхность и на выступ. Приведенные выражения описывают также время зажигания шероховатой поверхности, если поток света полностью поглощается на поверхности непрозрачного вещества, при условии, что размер шероховатостей h достаточно велик, а именно $h\varphi_0 \gg (\varkappa t^*)^{1/2}$. Если же высота неровностей мала, то поверхность при воспламенении плоско-параллельным потоком можно считать гладкой. Влияние неровностей возрастает при увеличении интенсивности нагрева.

Данные рассуждения непосредственно применимы для анализа зажигания модельной шероховатой поверхности, состоящей из конусов или клиньев одинаковой формы и размера. Они могут быть полезны и для анализа зажигания реальной поверхности, имеющей более сложную форму.

Зажигание острого клина и конуса ламинарным потоком горячего газа

Если ламинарный поток горячего газа с температурой $T_г$ обтекает клин в направлении, параллельном оси клина, или конус перпендикулярно оси, то теплопередача к телу происходит через пограничный слой переменной толщины, при этом коэффициент теплопередачи для тонкого тела может быть найден из известных [7] выражений для коэффициента теплопередачи от ламинарного потока к пластине (для клина) или же к цилиндру (для конуса):

$$\alpha_1 = A_1/r^{1/2}, \quad \alpha_2 = A_2/(r\varphi_0)^{1/2}.$$

Здесь α_k — коэффициент теплопередачи; $A_1 = \lambda_г (v/8\nu_г)^{1/2}$; $A_2 = 0{,}33\lambda_г \times \times (v/\nu_г)^{1/2}$; v — скорость потока; $\lambda_г$ и $\nu_г$ — теплопроводность и кинематическая вязкость газа соответственно. Если температура газа достаточно велика $((T_г - T_0)/(T^* - T_0) \gg 1)$, то тепловой поток от газа к телу можно представить в виде

$$q = \alpha_k (T_г - T) \approx \alpha_k (T_г - T_0).$$

Проведя усреднение по углу уравнения теплопроводности с граничными условиями, определяемыми таким видом теплового потока, и вводя безразмерные переменные, получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + \frac{K}{x^{1,5}} + \omega \exp(\Theta), \\ \Theta(0, x) = \Theta_0, \\ x^k \frac{\partial\Theta}{\partial x}(\tau, 0) = 0, \quad \Theta(\tau, \infty) = \Theta_0. \end{gathered} \tag{14}$$

Анализ показывает, что при $x \to 0$ решение системы (14) ведет себя как $\Theta = a(\tau) - 4Kx^{1/2}/(2K - 1)$, где $x = r/r_0$; $\tau = \lambda t/(c\rho r_0^2)$; $r_0 = (\lambda RT^{*2}/ /(A_k (T_г - T_0) E))^2 \varphi_0^{k+1}$; $\omega = r_0^2 EQk_0 e^{-E/RT^*}/(\lambda RT^{*2})$.

Точное решение инертной задачи дано в приложении. Температура вершины растет по закону $\Theta_k(0) = \Theta_0 + B_k \tau^{1/4}$, где $B_1 \approx 5{,}13$, $B_2 \approx 3{,}91$. Рассуждая так же, как и в случае постоянного потока, получим, что размерное время воспламенения очень сильно падает с уменьшением угла, а именно $t_1^* \sim \varphi_0^4$ для клина и $t_2^* \sim \varphi_0^6$ для конуса

$$t_1^* = \frac{c\rho}{\lambda}\left(\frac{\lambda(T^* - T_0)}{5{,}13A_1(T_г - T_0)}\right)^4 \varphi_0^4,$$

$$t_2^* = \frac{c\rho}{\lambda}\left(\frac{\lambda(T^* - T_0)}{3{,}91A_2(T_г - T_0)}\right)^4 \varphi_0^6.$$

Ввиду экспоненциальной зависимости скорости химической реакции от температуры T^* значительно слабее реагирует на изменения φ_0 и других параметров, чем время зажигания. Поэтому эти формулы при $T^* = = \mathrm{const}$ пригодны для анализа зависимости времени зажигания от скорости потока $(t^* \sim v^{-2})$, начальной температуры и т. д., а также для количественной оценки величины времени зажигания.

Температура воспламенения должна определяться из критерия воспламенения. Зависимость ее $\omega \sim \varphi_0^4$ для клина и $\omega \sim \varphi_0^6$ для конуса. Абсолютную величину ω^* и ее зависимость от Θ_0 можно определить численным расчетом. Предварительная оценка адиабатической теории зажигания [5] дает $\omega_k^* = 0{,}25B_k^4\Theta_0^{-3}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем точные решения задач теории теплопроводности, на которые даны ссылки в тексте.

1. Решение задачи (1)—(3) при $\Omega = 0$:

$$\Theta = \Theta_0 + u^{1/2} g_k(\eta/u^{1/2}, \varphi),$$

$$g_1(\xi, \varphi) = \frac{\pi^{1/2}}{\varphi_0} e^{-\frac{\xi^2}{8}} \left[\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right) I_0\left(\frac{\xi^2}{8}\right) + \frac{\xi^2}{4} I_1\left(\frac{\xi^2}{8}\right) \right] - \frac{\xi \cos\varphi}{\sin\varphi_0} +$$

$$+ 8e^{-\frac{\xi^2}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(\pi n\varphi/\varphi_0)}{\varphi_0(1 - \pi n/\varphi_0)^2} \int_0^{\infty} y^2 \exp(-y^2) I_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\xi y)\, dy,$$

$I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя порядка ν.

$$g_2(\xi, \varphi) = \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2} \left[\frac{\exp(-\xi^2/4)}{\pi^{1/2}} + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{2}\right) \operatorname{erf}\frac{\xi}{2} \right] - \frac{\xi\cos\varphi}{\sin\varphi_0} +$$

$$+ \xi^{-1/2} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_{\mu_n}(\cos\varphi) \int_0^{\infty} y^{2,5} \exp(-y^2) I_{\mu_n + 0,5}(y\xi)\, dy,$$

где $c_n = 4 \int\limits_{\cos\varphi_0}^{1} y P_{\mu_n}(y)\, dy \Bigg/ \left(\sin\varphi_0 \int\limits_{\cos\varphi_0}^{1} P_{\mu_n}^2(y)\, dy \right)$;

$P_\mu(\cos\varphi)$ — функция Лежандра порядка μ, а μ_n — корни уравнения

$$P_\mu(\cos\varphi_0) = 0.$$

2. Решение задачи (6)—(8) при $\omega = 0$:

$$\Theta = \Theta_0 + \tau^{1/2} f_k(x/\tau^{1/2}),$$

$$f_1(\xi) = \pi^{1/2} \exp(-\xi^2/8) \left[\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right) I_0\left(\frac{\xi^2}{8}\right) + \frac{\xi^2}{4} I_1\left(\frac{\xi^2}{8}\right) \right] - \xi,$$

$$f_2(\xi) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) + \left(\xi + \frac{2}{\xi}\right) \operatorname{erf}\frac{\xi}{2} - \xi.$$

3. Решение задачи (14) при $\omega = 0$:

$$\Theta = \Theta_0 + \tau^{1/4} h_k(x/\tau^{1/2}),$$

$$h_1(\xi) = 8\sqrt{2} \exp(-\xi^2/4) \int_0^{\infty} y^{1,5} \exp(-y^2) I_0(\xi y)\, dy - 4\sqrt{\xi},$$

$$h_2(\xi) = \frac{32}{3} \xi^{-1/2} \exp(-\xi^2/4) \int_0^{\infty} y^2 \exp(-y^2) I_{1/2}(\xi y)\, dy - \frac{8}{3} \xi^{1/2},$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{x} \exp(-y^2)\, dy.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марголин А. Д., Крупкин В. Г.** // Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем.— Черноголовка, 1986.
2. **Берман В. С., Шевцова В. М.** ПММ, 1981, 45, 4, 680.
3. **Vorsteveld L. G., Hermance C. E.** AIAA J., 1987, 25, 4, 592.
4. **Merzhanov A. G., Averson A. E.** Comb. Flames, 1971, 16, 1, 89.
5. **Вилюнов В. Н.** Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибирск: Наука, 1984.
6. **Bradley H. H.** Comb. Sci. Technol., 1970, 2, 11.
7. **Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.** Теплопередача.— М.: Энергия, 1975.

г. Москва

Поступила в редакцию 3/VIII 1988,
после доработки — 11/I 1989