

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СКОРОСТИ И КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ СМЕШЕНИИ И ДИФФУЗИОННОМ ГОРЕНИИ ГАЗОВ¹

В. А. Сабельников
(Жуковский)

Известно, что при некоторых предположениях общего характера решение задачи о дозвуковом турбулентном горении предварительно перемешанных газов при лимитировании горения процессом смешения горючего и окислителя требует знания совместного распределения вероятностей скорости и концентрации инертной (т. е. не участвующей в реакциях) примеси (см., например, [1]). Вывод точного уравнения для указанного распределения вероятностей дан в [2—7]. Это уравнение незамкнутое, и основная проблема заключается в его замыкании. В настоящей работе предлагается полуэмпирическое замыкание, являющееся обобщением замыкания уравнения для распределения вероятностей скорости [7, 8].

В [9—13] показано, что на распределение вероятностей концентрации в общем случае существенное влияние оказывает перемежаемость. Теоретический анализ перемежаемости, как это видно из [9—12], сопряжен с преодолением значительных трудностей, поэтому в данной работе в качестве начального приближения перемежаемость не учитывается (некоторым оправданием такого приближения служит вывод, сделанный в [14, 15], что в ряде случаев учет перемежаемости весьма слабо сказывается на результатах осреднения плотности, температуры и других термодинамических характеристик)².

Основные уравнения. Замыкающие соотношения. Выбор эмпирических постоянных

Уравнение для плотности совместного распределения вероятностей скорости и концентрации при диффузионном горении или смешении газов может быть получено с помощью методов, развитых в [16—19] (см. также обзор в [7, 20]). После использования гипотезы о статистической независимости микро- и макрохарактеристик турбулентности при больших числах Рейнольдса [18, 19], а также обобщения замыкающих соотношений из [7, 8] указанное уравнение приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho P}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho P}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial u_k} - \frac{\partial \rho \pi_k}{\partial u_k} + \frac{1}{3} \langle \epsilon \rangle \frac{\partial^2 \rho P}{\partial u_k^2} + \langle \bar{N} \rangle \frac{\partial^2 \rho P}{\partial z^2} - \frac{\partial \rho \pi}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial u_k} g_k (\rho - \rho_0) P = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $P(u_k, z, x_k, t)$ — плотность совместного распределения вероятностей скорости u_k ($k = 1, 2, 3$) и концентрации инертной примеси z ($0 \leq z \leq 1$);

¹ Статья является изложением доклада на семинаре «Механика и физика плазмы и газовых потоков (аэродинамика горения газов)», состоявшемся в г. Риге, 14—18 декабря 1981 г. (см.: Тезисы докладов. М.: Изд-во ИМП АН СССР и ИМП АН Латв. ССР, с. 42—43).

² Пренебрежение перемежаемостью при описании пульсаций концентрации, как это следует из результатов [9—12], возможно при достаточно малых интенсивностях пульсаций. В частности, это приближение справедливо в центральной части обычных турбулентных струйных течений, где интенсивность пульсаций равна 20—30%. В то же время на границе струи, где интенсивность пульсаций, согласно опытным данным, достигает 100% и более, перемежаемость, вообще говоря, может играть существенную роль. Эта роль ослабляется тем, что абсолютный уровень пульсаций здесь очень мал.

x_k — декартовы координаты; t — время; g_k — компоненты вектора ускорения свободного падения тела; p — давление; $N = D \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2$ и $\varepsilon = \frac{v}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$ — скалярная диссипация и диссипация энергии турбулентности соответственно (v и D — коэффициенты молекулярной вязкости и диффузии); угловыми скобками обозначено осреднение; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

Плотность ρ при диффузионном горении описывается соотношением

$$\rho/\rho_1 = (A_1 + A_2 z) [(A_3 + A_4 z)(A_5 + A_6 z)]^{-1}, \quad (2)$$

где постоянные A_i ($i = 1, \dots, 6$) зависят от рода горючего (для случая горения водорода в воздухе значения постоянных A_i приведены, например, в [14]); $\rho_1 = \rho(z=1)$, $\rho_0 = \rho(z=0)$ — плотности горючего и окислителя соответственно.

Выражение, аналогичное (2), имеет место и при чистом смешении. В частности, если температуры смешивающихся газов одинаковы,

$$\rho/\rho_1 = \mu_2 / [\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)z],$$

где μ_1 , μ_2 — молекулярные массы смешивающихся компонентов.

Замыкающие соотношения для функций π_k и π (не выражающихся через искомую плотность вероятностей) имеют вид

$$\pi_k = R_u T_u^{-1} u'_k P + D_{kl} \frac{\partial P}{\partial u_l} + K_k \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\pi = R_z T_z^{-1} (z' P + \sigma^2 \frac{\partial P}{\partial z}). \quad (4)$$

Здесь $u'_k = u_k - \langle u_k \rangle$; $z' = z - \langle z \rangle$; $\sigma^2 = \langle z'^2 \rangle = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2$; $T_u = q^2 \langle \varepsilon \rangle^{-1}$; $q^2 = \langle u'_k u'_k \rangle$; $T_z = \sigma^2 \langle N \rangle^{-1}$; T_u и T_z — временные масштабы для поля скорости и концентрации соответственно; величины D_{kl} и K_k описываются следующими соотношениями:

$$D_{kl} = R_u T_u^{-1} q^2 / 3 \cdot \delta_{kl} + \{ A q^2 / 3 \cdot \delta_{kn} \delta_{lm} + D_1 \langle u'_k u'_m \rangle \delta_{nl} + D_2 \langle u'_k u'_n \rangle \delta_{ml} + C \langle u'_n u'_m \rangle \delta_{kl} \} \frac{\partial \langle u \rangle_n}{\partial x_m}, \quad (5)$$

$$K_k = C_{z_1} \langle u'_i z' \rangle \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} + C_{z_2} \langle u'_i z' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle_i}{\partial x_k}.$$

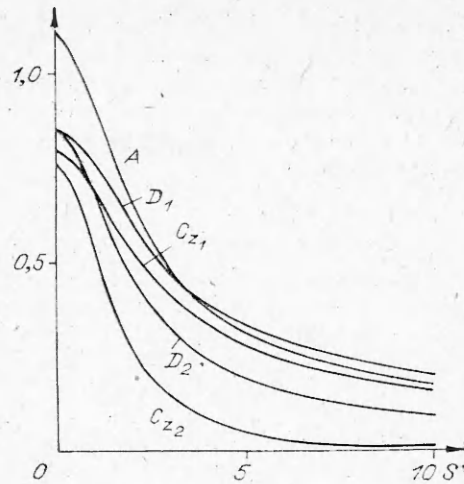
В (3) и (5) входят эмпирические постоянные: R_u , R_z , A , D_1 , D_2 , C , C_{z_1} и C_{z_2} (по сравнению со случаем распределения вероятностей скорости здесь добавились три новые постоянные R_z , C_{z_1} и C_{z_2}). Если среда несжимаема, то между D_1 , D_2 и C существует связь [7, 8]

$$D_1 + D_2 + 3C = 0. \quad (6)$$

Соотношение (6) является следствием того обстоятельства, что в несжимаемой жидкости корреляция $\langle p' \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \rangle = 0$. В [21] показано, что эта корреляция близка к нулю и при чистом смешении (она оказывается обратно пропорциональной числу Рейнольдса), а при диффузионном горении значения этой корреляции малы по сравнению с остальными слагаемыми в уравнении баланса энергии турбулентных пульсаций. В силу сказанного, далее предполагается, что соотношение (6) выполнено.

Нетрудно установить, что соответствующие выражения в уравнениях для вторых моментов $\langle u'_i u'_j \rangle$ и $\langle u'_i z' \rangle$ для случая $\rho = \text{const}$, полученные из (1) с помощью замыкающих соотношений (3)–(6), совпадают с используемыми в [22, 23]. Поэтому значения указанных эмпирических постоянных, вообще говоря, могут быть взяты из этих работ.

Рис. 1. Зависимость постоянных от степени деформации при поперечном сдвиге однородной турбулентности; $C = -(D_1 + D_2)/3$.



В данной работе, однако, для оценки постоянных D_1 , D_2 , A , C_{z_1} и C_{z_2} (а следовательно, и C), согласно идее, предложенной в [24, 25], используются результаты теории быстрой деформации турбулентности (см. обзор этой теории в [26]). Поскольку рассматриваемые ниже струйные течения анализируются в приближении пограничного слоя, то в соответствии с [24, 25] значения D_1 , D_2 , A , C_{z_1} и C_{z_2} подбираются таким образом, чтобы в частном случае воздействия в момент $t = t_0$ на однородную и изотропную турбулентность поперечного сдвига средней скорости $\frac{d\langle u \rangle}{dy} = \text{const}$ и градиента средней концентрации $\frac{d\langle z \rangle}{dy} = \text{const}$, значения вторых моментов, рассчитанные с помощью линеаризованных уравнений для вторых моментов, полученных с помощью (1), совпадали с точными результатами теории быстрой деформации [26]. Найденные таким образом зависимости постоянных D_1 , D_2 , A , C_{z_1} и C_{z_2} от степени деформации $S = \frac{d\langle u \rangle}{dy} (t - t_0)$ приведены на рис. 1. Значения постоянных при $2,5 \leq S \leq 7$ хорошо согласуются с используемыми в [22, 23], где они подобраны из условия лучшего соответствия рассчитанных полей средней скорости, концентрации и вторых моментов с экспериментальными данными.

В данной работе степень деформации S в струйных течениях находилась из полуэмпирического уравнения, предложенного в [27]. Это уравнение, дополненное диссипативным членом³, в обозначениях, принятых в теории струй, имеет вид

$$\langle \rho \rangle U \frac{\partial S}{\partial x} + \langle \rho \rangle V^* \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^i \langle \rho \rangle D_{ts} \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \langle \rho \rangle \frac{\partial U}{\partial y} - C_d \langle \rho \rangle S T_u^{-1},$$

$$\langle \rho \rangle V^* = \langle \rho \rangle V + \langle \rho' v \rangle, \quad D_{ts} = k_s \langle v^2 \rangle T_u. \quad (7)$$

Здесь k_s и C_d — эмпирические постоянные; $i = 0$ и $i = 1$ — для плоской и осесимметричной задач соответственно.

Диссипация энергии турбулентности $\langle \epsilon \rangle$ и скалярная диссипация $\langle N \rangle$ находились с помощью полуэмпирических уравнений, приведенных в [22, 23, 28]. В приближении пограничного слоя эти уравнения записываются в виде

$$\langle \rho \rangle U \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle V^* \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial y} = \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^i \langle \rho \rangle D_{t\epsilon} \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial y} \right) +$$

$$+ 2 \langle \rho \rangle \langle \epsilon \rangle q^{-2} (C_{\epsilon 1} g - C_{\epsilon 2} \langle \epsilon \rangle), \quad g = - \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\langle \rho \rangle U \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle V^* \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} = \frac{1}{y^i} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^i \langle \rho \rangle D_{tN} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \right) - \langle \rho \rangle B \langle N \rangle T_u^{-1} -$$

$$- D \langle \rho \rangle \langle N \rangle T_z^{-1} + E \langle \rho \rangle \langle v z' \rangle \frac{\partial \langle z \rangle}{\partial y} T_z^{-1}. \quad (9)$$

³ Необходимость включения диссипативного члена в уравнение для степени деформации подчеркивалась В. М. Иевлевым.

Здесь $D_{1\epsilon} = k_\epsilon \langle v^2 \rangle T_u$; $D_{1N} = k_N \langle \sigma^2 \rangle T_u$; $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, B , D , E , k_ϵ и k_N — эмпирические постоянные.

В отличие от [22, 23, 28] постоянные $C_{\epsilon 1}$ и E определим с помощью теории деформации однородной турбулентности. Рассмотрим вначале оценку для $C_{\epsilon 1}$. При быстрой деформации сдвига уравнения для q^2 и $\langle \epsilon \rangle$ принимают следующий вид:

$$\frac{dq^2}{dt} = -2 \langle uv \rangle \frac{dU}{dy}, \quad \frac{d\langle \epsilon \rangle}{dt} = -2C_{\epsilon 1} \langle \epsilon \rangle q^{-2} \langle uv \rangle \frac{dU}{dy}. \quad (10)$$

Если принять, что $\langle \epsilon \rangle \sim q^3/L$ (где L — интегральный масштаб турбулентности), и учесть, что при быстром сдвиге $L = \text{const}$ [26], то из уравнения для $\langle \epsilon \rangle$ в (10) получим

$$\frac{dq^2}{dt} = -\frac{4}{3} C_{\epsilon 1} \langle uv \rangle \frac{dU}{dy},$$

откуда, сопоставляя с уравнением для q^2 в (10), находим $C_{\epsilon 1} = 1,5$. Рекомендованные в литературе значения постоянной $C_{\epsilon 1}$ лежат в интервале 1,4—1,5.

Оценку для постоянной E в (9) получим, рассмотрев изменение σ^2 и $\langle N \rangle$ в однородной стационарной турбулентности при $\frac{d\langle z \rangle}{dy} \neq 0$, пренебрегая диссипативными эффектами и считая, что $\langle N \rangle \sim \sigma^2$. Из уравнений для σ^2 и $\langle N \rangle$ тогда нетрудно установить, что $E = -2$. Рекомендованное в [28] значение $E = -1,955$.

Значения остальных эмпирических постоянных, не определяемых с помощью теории быстрой деформации, приведены ниже согласно [7, 8, 22, 23, 28].

R_u	R_z	k_s	C_d	$C_{\epsilon 2}$	k_Σ	B	D	k_N
2,4	3,3	0,060	0,5	2	0,065	1,76	2,02	0,19

Распределение вероятностей в однородной турбулентности и в области основного порождения и диссипации пульсаций

Проанализируем на основе (1) плотность совместного распределения вероятностей скорости и концентрации в однородной турбулентности при $\rho = \text{const}$, $\langle u_k \rangle = 0$, $\langle z \rangle = \text{const}$. Уравнение (1) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{R_u}{T_u} \frac{\partial u_k P}{\partial u_k} - \frac{R_z}{T_z} \frac{\partial z' P}{\partial z} = (\bar{R}_u - i) \langle \epsilon \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial u_k^2} + (\bar{R}_z - i) \langle N \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial z'^2}. \quad (11)$$

Нетрудно установить, что общее решение (11) дается следующей формулой:

$$P(u_k, z, t) = \int P(u_{k0}, z_0, t_0) G(u_k, z, u_{k0}, t_0) d^3 u_0 dz_0, \quad (12)$$

$$G = (2\pi)^{-2} [\langle u_1^2 \rangle_\delta \langle u_2^2 \rangle_\delta \langle u_3^2 \rangle_\delta \sigma_\delta^2]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(u_1 - u_{10}\varphi)^2}{2 \langle u_1^2 \rangle_\sigma} - \frac{(u_2 - u_{20}\varphi)^2}{2 \langle u_2^2 \rangle_\sigma} - \frac{(u_3 - u_{30}\varphi)^2}{2 \langle u_3^2 \rangle_\delta} - \frac{(z' - z_0'\psi)^2}{2\sigma_\delta^2} \right],$$

$$\varphi = \exp \left(-R_u \int_{t_0}^t \langle \epsilon \rangle q^{-2} dt \right) = (q/q_0)^{R_u}, \quad \psi = \exp \left(-R_z \int_{t_0}^t \langle N \rangle \sigma^{-2} dt \right) = (\sigma/\sigma_0)^{R_z},$$

$$\langle u_k^2 \rangle_\delta = \langle u_k^2 \rangle - \langle u_{k0}^2 \rangle \varphi^2, \quad \sigma_\delta^2 = \sigma^2 - \sigma_0^2 \psi^2,$$

$$\langle u_k^2 \rangle = \left\{ \langle u_{k0}^2 \rangle + \frac{1}{3} q_0^2 \int_{t_0}^t [(q_0^2/q^2)^{R_u-1} - 1] dt \right\} (q^2/q_0^2)^{R_u}.$$

(При преобразовании выражений для ϕ и ψ использовались уравнения баланса для σ^2 и q^2 : $\frac{d\sigma^2}{dt} = -2\langle N \rangle$, $\frac{dq^2}{dt} = -2\langle \epsilon \rangle$.) Используя (12), можно показать, что если в начальный момент плотность вероятностей описывается нормальным законом, то это распределение сохраняется и во все остальные моменты. В этом случае $\pi = \pi_k = 0$ и (11) превращается в параболическое уравнение с отрицательными коэффициентами диффузии, для которого, как известно, задача Коши некорректна. Такие уравнения для плотностей вероятностей концентрации и скорости впервые получены в [19]. Введение членов с π и π_k позволяет регуляризовать задачу (поскольку при $R_u > 1$ и $R_z > 1$ коэффициенты диффузии положительны).

Более подробный анализ соотношения (12) показывает, что главный член в асимптотическом разложении плотности вероятностей $P(u_k, z)$ при $t \rightarrow \infty$ есть плотность изотропного нормального распределения, удовлетворяющая уравнению (11) при $\pi = \pi_k = 0$.

Отметим теперь приближенное решение уравнения (1), применимое в статистически стационарных течениях в тех случаях, когда баланс энергии пульсаций в основном определяется порождением и диссипацией. В этом предположении в (1) можно отбросить все члены с пространственными производными. Непосредственной подстановкой нетрудно показать, что решением полученного уравнения является плотность нормального распределения. Этот результат удовлетворительно согласуется с известными экспериментальными данными для плотностей вероятностей в областях с максимальными градиентами средней скорости и концентрации [29, 30], а также в течениях с постоянными градиентами скорости и концентрации [31, 32].

Численное решение уравнения для плотности вероятностей в автомоделных струйных течениях несжимаемой жидкости

При численном решении более удобно рассматривать плотность вероятностей для пульсации скорости $u_k = u_k - \langle u_k \rangle$ и концентрации $z' = z - \langle z \rangle$. Обозначим эту плотность вероятностей также через P . Уравнение для плотности вероятностей пульсаций в приближении пограничного слоя и $\rho = \text{const}$ имеет вид

$$U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{1}{y^i} \frac{\partial \langle uv \rangle y^i}{\partial y} - v \frac{\partial U}{\partial y} - u T_u^{-1} \right) \frac{\partial P}{\partial u} + \left(\frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y} - v T_u^{-1} \right) \frac{\partial P}{\partial v} - \\ - \left(\frac{V + v}{y^i} i w - w T_u^{-1} \right) \frac{\partial P}{\partial w} + \left(\frac{1}{y^i} \frac{\partial \langle z' v \rangle y^i}{\partial y} - z' T_z^{-1} \right) \frac{\partial P}{\partial z} - i \frac{V}{y^i} P = D_{uu} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + \\ + D_{vv} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + D_{ww} \frac{\partial^2 P}{\partial w^2} + D_{uv} \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + D_{zz} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + D_{zu} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial u} + D_{zv} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial v}, \quad (13)$$

где

$$D_{uu} = (R_u - 1) \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{3} (2D_1 - D_2) g, \quad D_{vv} = (R_u - 1) \langle \epsilon \rangle - \frac{1}{3} (2D_2 - D_1) g, \\ D_{ww} = (R_u - 1) \langle \epsilon \rangle + \frac{1}{3} (D_1 + D_2) g, \quad D_{uv} = (\Lambda q^2 / 3 + D_1 \langle v^2 \rangle + D_2 \langle u^2 \rangle) \frac{\partial U}{\partial y}, \\ D_{zz} = (R_z - 1) \langle N \rangle, \quad D_{zu} = C_{z_1} \langle v z' \rangle \frac{\partial U}{\partial y}, \quad D_{zv} = C_{z_2} \langle u z' \rangle \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Постановка краевой задачи для уравнения (13) в основных пунктах повторяет анализ, данный в [7, 8], и здесь не обсуждается. Отметим только, что определенные трудности возникают при постановке граничного условия при $|y| \rightarrow \infty$. В работе предполагается, что плотность вероятностей при $y = \pm \infty$ описывается нормальным законом. Можно ожидать, поскольку при $|y| \rightarrow \infty$ пульсации быстро стремятся к нулю, что это допущение слабо сказывается на решении в центральной части струи.

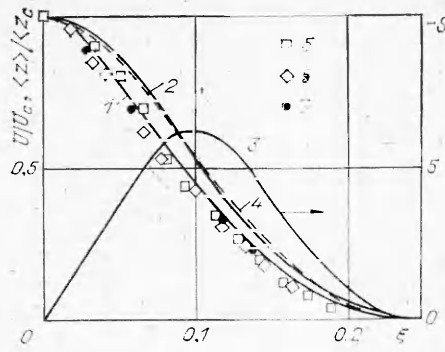


Рис. 2. Профили продольной средней скорости (1), концентрации (2, 4) и степени деформации (3) в осесимметричной затопленной струе.
 $4 - \langle z \rangle / \langle z \rangle_c$ [35], $x/d = 20, 24, 28, 32, 36$.
 U/U_c [34]: $x/d = 60$ (5), 75 (6), 97,5 (7).

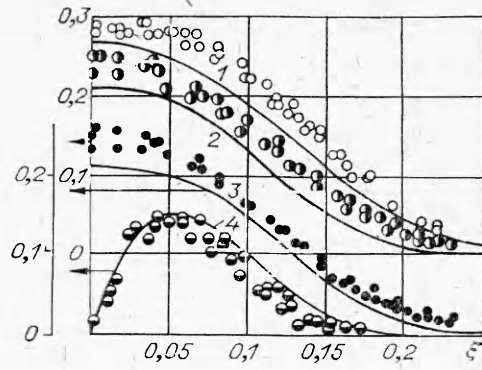


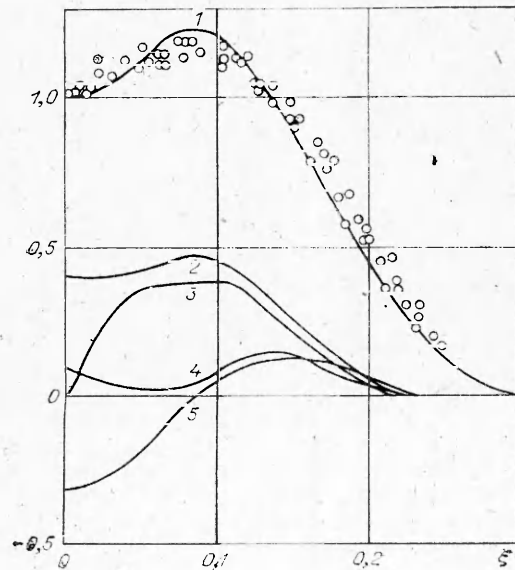
Рис. 3. Профили вторых моментов поля скорости в осесимметричной затопленной струе.
 $1 - \langle u^2 \rangle^{1/2} / U_c$; $2 - \langle v^2 \rangle^{1/2} / U_c$; $3 - \langle w^2 \rangle^{1/2} / U_c$;
 $4 - \langle uv \rangle / U_c^2 \cdot 10^2$. Линии — расчет; точки — экспериментальные данные [34], $x/d = 60, 75, 97,5$.

Из-за высокой размерности функции P (шесть независимых переменных в неавтомоделных струях и пять — в автомоделном случае) прямое численное решение уравнения (13) трудно осуществимо. Поэтому, как и в [7, 8, 33], (13) заменяется эквивалентной системой уравнений для функций меньшей размерности. Для определения средней скорости и концентрации вторых, а также третьих моментов, входящих в уравнения для вторых, достаточно рассмотреть уравнения для четырех функций, связанных с P соотношениями

$$G(v, z, x, y) = \int P \, du \, dw, \quad J = \int uP \, du \, dw, \\ H_u = \int u^2 P \, du \, dw, \quad H_w = \int w^2 P \, du \, dw.$$

Моменты поля скорости и концентрации определяются по введенным функциям очевидным образом, например

$$\langle z^2 \rangle = \int z^2 G \, dv \, dz, \quad \langle zv \rangle = \int zv G \, dv \, dz, \\ \langle uv \rangle = \int Jv \, dv \, dz, \quad \langle u^2 \rangle = \int H_u \, dv \, dz, \quad \langle v^2 \rangle = \int v^2 G \, dv \, dz, \\ \langle w^2 \rangle = \int H_w \, dv \, dz, \quad \langle vu^2 \rangle = \int vH_u \, dv \, dz, \\ \langle vw^2 \rangle = \int vH_w \, dv \, dz, \quad \langle v^2 u \rangle = \int z^2 J \, dv \, dz$$



и т. д. В автомоделных струйных течениях функции G, J, H_u и H_w представляются в следующем виде:

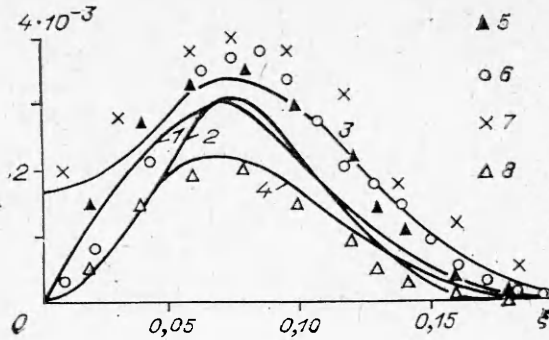
$$G = [\sigma \langle v^2 \rangle^{1/2}]^{-1} g(\eta, s, \xi), \\ J = \langle u^2 \rangle^{1/2} [\sigma \langle v^2 \rangle^{1/2}]^{-1} j(\eta, s, \xi), \\ H_u = \langle u^2 \rangle [\sigma \langle v^2 \rangle^{1/2}]^{-1} h_u(\eta, s, \xi), \\ H_w = \langle w^2 \rangle [\sigma \langle v^2 \rangle^{1/2}]^{-1} h_w(\eta, s, \xi), \\ \eta = v / \langle v^2 \rangle^{1/2}, \quad s = (z - \langle z \rangle) / \sigma, \quad \xi = y / x.$$

Рис. 4. Профили смешанных вторых моментов поля скорости и концентрации, дисперсии и коэффициентов асимметрии и эксцесса пульсаций концентрации в осесимметричной затопленной струе.

$1 - \sigma / \sigma_c$; $2 - \langle uz' \rangle / \sqrt{\langle u^2 \rangle} \cdot \sigma$; $3 - \langle vz' \rangle / \sqrt{\langle v^2 \rangle} \cdot \sigma$; $4 - E_z = \langle z'^4 \rangle / \sigma^4 - 3$; $5 - A_z = -\langle z'^3 \rangle / \sigma^3$. Линии — расчет; точки — данные измерений [35], $x/d = 20, 24, 28, 32, 36$.

Рис. 5. Профили третьих моментов поля скорости в осесимметричной затопленной струе.

1,5 - $\langle v^3 \rangle / U_c^3$; 2,6 - $\langle vu^2 \rangle / U_c^3$; 3,7 - $\langle v^2 u \rangle / U_c^3$; 4,8 - $\langle vw^2 \rangle / U_c^3$. Линии - расчет; точки - данные измерений [34], $x/d = 90$.



Система уравнений для $g, j, h_u, h_w, \langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle, \langle w^2 \rangle, \sigma^2, \langle \epsilon \rangle, \langle N \rangle$ и S решалась численно с использованием метода, описанного в [7, 8]. В расчетах вместо бесконечной области $0 \leq \xi < \infty, -\infty < \eta < \infty, -\infty < s < \infty$ рассматривался прямоугольник $0 \leq \xi \leq \xi_{\max}, |\eta| \leq \eta_{\max}, |s| \leq s_{\max}$, т. е. граничные условия при $\xi = \infty, |s| = \infty, |\eta| = \infty$ сносились соответственно на линии $|s| = s_{\max}, |\eta| = \eta_{\max}$. Расчеты проводились при $\xi_{\max} = 0,3$ и $0,4, s_{\max} = \eta_{\max} = 3,5$. Число узлов по координате ξ равнялось 24, по координатам η и s - 41. Разностная сетка в каждом из направлений была равномерной.

На рис. 2-5 приведены результаты расчетов продольной средней скорости, концентрации, степени деформации, вторых и ряда третьих моментов в осесимметричной струе. Там же нанесены экспериментальные данные [34, 35]. Из рисунков можно заключить, что результаты вычислений с удовлетворительной точностью описывают данные измерений.

Расчеты показывают, что совместная плотность $G(v, z)$ пульсации скорости v и концентрации z , а также плотности вероятностей скорости и концентрации близки к плотностям нормального распределения. Для иллюстрации сказанного на рис. 6 показаны вычисленные плотности вероятностей скорости v для нескольких значений автомодельной координаты ξ . Качественный вид этих кривых согласуется с опытными данными [36]. Вывод о близости плотностей вероятностей к нормальным следует также и из результатов вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса пульсаций (см., например, рис. 4, на котором изображены коэффициенты асимметрии и эксцесса пульсаций концентрации). Важно, однако, подчеркнуть, что имеющееся отличие плотностей вероятностей от нормальных является принципиальным, поскольку только оно обуславливает диффузию пульсаций скорости концентрации в пространстве.

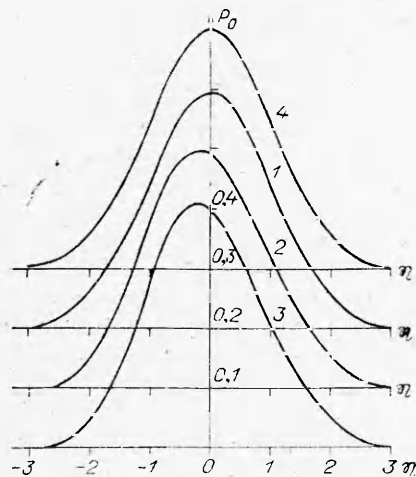


Рис. 6. Плотность распределения вероятностей пульсаций поперечной скорости в осесимметричной затопленной струе; $\eta = v/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, $P_0 = 1/\sqrt{\langle v^2 \rangle} \cdot \int G(v, z) dz$. 1 - $\xi = 0$; 2 - $\xi = 0,06$; 3 - $\xi = 0,15$; 4 - $\xi = 0,3$.

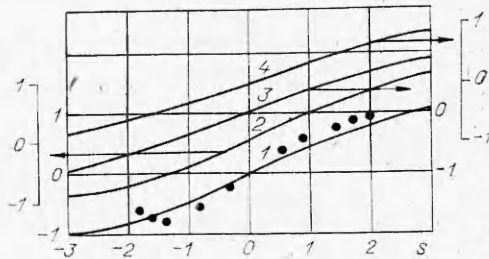


Рис. 7. Условно осредненные продольная и поперечная скорости при заданном значении концентрации в осесимметричной затопленной струе и диффузионном факеле водорода; $s = (z - \langle z \rangle) / \delta$.

1 - $\langle u \rangle_z / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$, $\xi = 0$; 2 - $\langle u \rangle_z / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$, $\xi = 0,09$; 3 - $\langle v \rangle_z / \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, $\xi = 0,09$; 4 - $\langle v \rangle_z / \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, $\xi = 0,045$ - диффузионный факел; точки - экспериментальные данные [38], $x/d = 30$, $\xi = 0,083$ (струя).

Используемый в настоящей работе подход позволяет определить также условно осредненные моменты поля скорости и концентрации и, в частности, условно осредненные значения скоростей $\langle v \rangle_z$ и $\langle u \rangle_z$. Эти величины связаны с введенными выше функциями G и J соотношениями

$$\langle v \rangle_z = \int v G dv / \int G dv, \quad (14)$$

$$\langle u \rangle_z = \int J dv / \int G dv.$$

В [9] показано, что $\langle u \rangle_z$, $\langle v \rangle_z$ входят в уравнение для плотности вероятностей концентрации. Таким образом, функции $\langle u \rangle_z$ и $\langle v \rangle_z$ играют большую роль при рассмотрении процесса молекулярного смешения в турбулентных течениях. В [9] $\langle u \rangle_z$ и $\langle v \rangle_z$ аппроксимировались линейными зависимостями, например $\langle v \rangle_z = \langle v z' \rangle \sigma^{-2}(z - \langle z \rangle)$. В [37] в соответствии с данными измерений [31, 32, 38] использовалась несколько уточненная в области достаточно больших значений амплитуды пульсаций концентрации зависимость $\langle v \rangle_z$ от z (согласно [31, 32, 38], при $|(z - \langle z \rangle)| \geq 1,5\sigma \langle u_k \rangle_z$ возрастает медленнее, чем по линейному закону и, повидимому, имеется тенденция к тому, что $\langle u_k \rangle_z$ стремится к конечному пределу $|(z - \langle z \rangle)| \sigma^{-1} \rightarrow \infty$).

На рис. 7 приведены рассчитанные функции $\langle u \rangle_z$ и $\langle v \rangle_z$, а также данные измерений $\langle u \rangle_z$ [38]. Видно, что качественный характер рассчитанной кривой $\langle u_k \rangle_z$ согласуется с экспериментально найденной зависимостью.

Расчет турбулентного диффузионного факела водорода в квазиавтомодельном приближении

Диффузионный факел в общем случае является существенно неавтомоделным течением и в рамках развиваемого подхода для своего описания требует решения уравнений для функций с четырьмя независимыми аргументами. Однако, как это показано в [39], при больших числах Фруда $Fr = u_0^2/gd \approx 10^6$ (u_0 — скорость истечения струи из сопла; d — диаметр сопла; g — ускорение свободного падения) влияние сил плавучести на параметры течения в факеле на не слишком больших удалениях от среза сопла оказывается несущественным, и распределения средней скорости и концентрации инертной примеси с точностью, вполне приемлемой для ряда приложений, могут быть описаны автомодельными зависимостями.

Если принять во внимание этот вывод, то при больших числах Фруда можно указать приближенный способ решения уравнений для функций G , J , H_u и H_w , основывающийся на предположении о квазиавтомодельности течения в факеле.

Согласно этому предположению, считается, что зависимость безразмерных профилей средней скорости, концентрации инертной примеси, вторых моментов, диссипации энергии турбулентности, скалярной диссипации от продольной координаты x край-

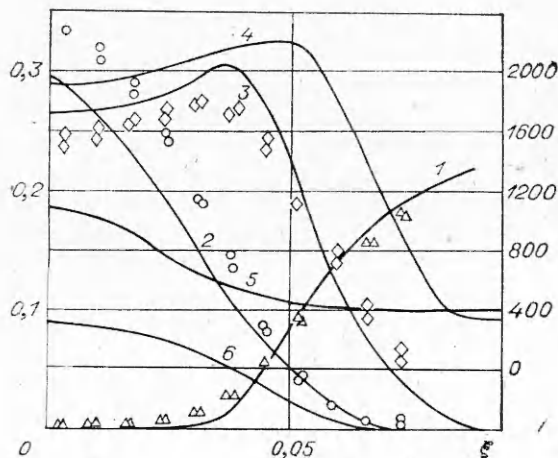


Рис. 8. Профили осредненных параметров в диффузионном факеле водорода в спутном потоке воздуха.

1 — $\langle c_{O_2} \rangle$; 2 — $\langle c_{H_2} \rangle$; 3 — $\langle c_{H_2O} \rangle$; 4 — $\langle T \rangle$, К; 5 — U ; 6 — $\langle z \rangle$. Линии — расчет; точки — данные измерений [40] (спутность 0,1).

не слабая. Принятое предположение соответствует тому, что в уравнениях для безразмерных функций G , J , H_u и H_w (как это сделано выше при рассмотрении автомодельных струй), записанных в переменных x , ξ , η и s , пренебрегается производной по x по сравнению с остальными членами. Таким образом, в получающиеся в результате указанной процедуры уравнения переменная x входит в качестве параметра. Метод решения этих уравнений, которые для краткости не выписываются, остается прежним (здесь $\xi_{\max} = 0,15$).

На рис. 8 приведено сопоставление между рассчитанными профилями некоторых из осредненных параметров и данных измерений в горизонтальном спутном факеле водорода в сечении $x/d = 80$ [40]. На рис. 7 представлена вычисленная в одной из точек указанного сечения факела функция $\langle v \rangle_z$. Видно, что качественный характер этой зависимости не изменился по сравнению с рассмотренным выше случаем $\rho = \text{const}$.

На основании проведенных расчетов можно также сделать вывод, что влияние переменности плотности в рассмотренных условиях на вид плотностей вероятностей скорости и концентрации инертной примеси в рамках развиваемого подхода весьма незначительно. Этот вывод в известной степени объясняет, почему при расчете диффузионного горения с помощью моделирования плотности вероятностей концентрации без учета переменности плотности в ряде случаев получаются достаточно хорошие результаты (см., например, [13, 14, 41]).

Поступила в редакцию 20/VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. E. E. O'Brien. AIAA Paper, 1980, 137.
2. C. Dopazo. Acta Astronautica, 1976, 3, 9—10.
3. В. Р. Кузнецов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, 5.
4. В. А. Сабельников. Тр. ЦАГИ. Вып. 1998, 1979.
5. S. V. Pore. Phys. Fluids, 1981, 24, 4.
6. В. А. Сабельников. Ученые записки ЦАГИ, 1980, XI, 6.
7. В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников. Успехи механики, 1981, 4, 4.
8. В. А. Сабельников. ПМТФ, 1982, 5.
9. В. Р. Кузнецов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, 5.
10. В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников. Успехи механики, 1981, 4, 2.
11. В. А. Сабельников. ФГВ, 1982, 18, 2.
12. В. А. Сабельников.— В кн.: Горение газов и натуральных топлив. Черноголовка, 1980.
13. В. Р. Кузнецов, А. Б. Лебедев и др. Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, 4.
14. В. Р. Кузнецов, А. Б. Лебедев и др. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, 1.
15. В. Р. Кузнецов, А. Б. Лебедев и др.— В кн.: Горение гетерогенных и газовых систем. Черноголовка, 1977.
16. А. С. Монин. ПММ, 1967, 31, 6.
17. T. S. Lundgren. Phys. Fluids, 1967, 10, 5.
18. Ф. Р. Улинич, Б. Я. Любимов. ЖЭТФ, 1968, 55, 3.
19. В. Р. Кузнецов. ПММ, 1967, 31, 6.
20. В. М. Иевлев. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975.
21. В. Р. Кузнецов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, 3.
22. W. C. Reynolds. Annual Rev. Fluid Mech., 1976, 8.
23. O. Zeman, J. L. Lumley. J. Atmos. Sci., 1976, 33.
24. В. Л. Зимонт, В. А. Сабельников. Докл. АН СССР, 1975, 222, 3.
25. В. Л. Зимонт, В. А. Сабельников.— В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977.
26. В. А. Сабельников. Тр. ЦАГИ. Вып. 1702, 1975.
27. A. A. Townsend. J. Fluid. Mech., 1970, 41, 1.
28. G. R. Newman, V. E. Launder, J. L. Lumley. J. Fluid Mech., 1981, 111.
29. Ж. Конт-Белло. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.
30. K. S. Venkataramani, N. K. Tutu, R. Chevray. Phys. Fluids, 1975, 18, 11.
31. K. S. Venkataramani, R. Chevray. J. Fluid Mech., 1976, 86, 3.

32. S. Tavoularis, S. Corrsin. J. Fluid Mech., 1981, 104.
 33. В. А. Сабельников.— В кн.: Турбулентные струйные течения. Ч. II. Таллин, 1982.
 34. I. Wygnanski, H. Fiedler. J. Fluid Mech., 1969, 38, 3.
 35. H. A. Becker, H. C. Hottel, G. C. Williams. J. Fluid Mech., 1967, 30, 2.
 36. M. M. Ribeiro, J. H. Whitelaw. J. Fluid Mech., 1975, 70, 1.
 37. В. А. Сабельников. Ученые записки ЦАГИ, 1982, XIII, 5.
 38. Ю. В. Голованов. Автореф. канд. дис. М., МФТИ, 1977.
 39. H. Kremer. Eleventh Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh, 1967.
 40. J. H. Kent, R. W. Bilger. Fourteenth Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh, 1973.
 41. В. Л. Зимоит, Е. А. Мещеряков, В. А. Сабельников.— В кн.: Теория и практика сжигания газов. Вып. VII. Л.: Недра, 1981.

О ГОРЕНИИ ЭТИЛЕНДИАМИНОВ НИТРАТОВ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

В. В. Горбунов, А. А. Шидловский, Л. Ф. Шмагин
(Москва)

При взаимодействии аммиака или органических аминов с нитратами переходных металлов образуются комплексные соединения, имеющие формулу $[Me^{n+}(R)_x](NO_3)_n$, где Me^{n+} — ион переходного металла, R — аммиак или органический амин. Известно, что комплексные соединения такого состава способны к экзотермическому разложению [1, 2]. Горение аммиаков нитратов переходных металлов изучалось ранее в [3—5].

В данной работе исследовалось горение комплексных нитратов Cu(II), Cr(III), Co(III), Ni(II) и Zn(II), горючей частью молекулы которых является этилендиамин.

Определялась скорость горения полученных комплексов при давлениях до 10 МПа, создаваемых сжатым азотом. Навеску соли 0,6 г помещали в трубку из органического стекла с внутренним диаметром 7 мм и прессовали под давлением 250 МПа до плотности 1,55—1,75 г/см³. Для определения скорости горения применялся фоторегистратор. В качестве характеристики термической стабильности комплексов определялась температура, при которой время задержки вспышки навески 0,05 г было 5 с.

Результаты термохимических расчетов, скорости горения и температуры задержки вспышки комплексов приведены в таблице. Все комплексы легко воспламенялись от электроспирали и горели со слабым свечением и обильным выделением белого дыма. Исключение составлял комплекс Zn(II), который не воспламенился при давлениях до 10 МПа и

Формула комплексной соли *	$-\Delta H_{298}^{\circ}$, ** Дж/моль	Продукт горения ***						Теплота горения соли		Массовая скорость горения при 10 МПа, г/(см ² ·с)	Температура задержки вспышки (°С) при времени 5 с
		H ₂ O (пар)	CO	N ₂	C (кр.)	H ₂	Прочие	кДж/моль	кДж/г		
[CuR ₂](NO ₃) ₂	582	3	3	3	1	5	Cu (кр.)	475	1,55	0,59	295
[CrR ₃](NO ₃) ₃	971	4	3,5	4,5	2,5	8	0,5Cr ₂ O ₃ (кр.)	953	2,28	0,50	283
[CoR ₃](NO ₃) ₃	990	4,5	4,5	4,5	1,5	7,5	Co (кр.)	596	1,40	0,40	308
[NiR ₃](NO ₃) ₂	795	3	3	4	3	9	Ni (кр.)	262	0,72	0,11	315
[ZnR ₃](NO ₃) ₂	808	3	3	4	3	9	Zn (кр.)	249	0,68	—	—

* R — этилендиамин.

** Стандартная энтальпия образования из элементов [CoR₃](NO₃), взята из [6], для остальных комплексных солей ее значения определены методом сравнительного расчета [7].

*** Количество молей продукта, образующееся при сгорании 1 моля комплексной соли.