

4. Абдукадыров С. А., Степаненко М. В. Об особенностях распространения гармонических волн в плоском слое, контактирующем с упругой средой. — ФТПРПИ, 1979, № 5.
5. Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений около дефекта в стеклопластике. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 19—20. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
6. Ермак А. А., Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений в стеклопластике. — ПМТФ, 1978, № 6.
7. Ермак А. А. Распределение напряжений в глубине однонаправленного стеклопластика при его разрушении. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 48. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1980.
8. Степаненко М. В. О динамике разрушения однонаправленного композита. — ПМТФ, 1979, № 4.

УДК 517.9 : 624.07 — 415

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНЫХ И ИЗГИБНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ ПЛАСТИН, СКРЕПЛЕННЫХ ПОД УГЛОМ

Е. В. Михайлова

(Ленинград)

1. Введем две системы координат так, чтобы в левой пластине $x_1 \leq 0$, а в правой $x_2 \geq 0$ (фиг. 1). Оси z_1 и z_2 направлены при этом нормально поверхностям пластинок, так чтобы две полуплоскости ($z_1 = 0$ при $x_1 \leq 0$ и $z_2 = 0$ при $x_2 \geq 0$) совпадали с их нейтральными плоскостями. Ось y расположена вдоль линии соединения пластин. Пусть падающая синусоидальная волна распространяется в левой пластине. Рассмотрим условия ее прохождения через границу.

Колебания пластин описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$(1.1) \quad D(\partial^4 w / \partial x^4 + 2\partial^4 w / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 w / \partial y^4) + \rho h \partial^2 w / \partial t^2 = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$(1.3) \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где h — толщина пластины; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; D — жесткость на изгиб.

Смещения точек нейтральных плоскостей пластин при колебаниях u_1, u_2 вдоль осей x_1, x_2, v_1, v_2 — вдоль оси y будут характеризовать волны в плоскостях пластин, а смещения w_1, w_2 по осям z_1, z_2 соответственно — изгибные волны [1, 2].

Решения задачи должны удовлетворять восьми граничным условиям на шарнирно-опертых краях

$$(1.4) \quad w = u = \partial v / \partial y = \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad (y = 0, l)$$

и восьми условиям сопряжения на общем ребре ($x = 0$)

$$(1.5) \quad u_1 = u_2 \cos \varphi + w_2 \sin \varphi;$$

$$(1.6) \quad w_1 = -u_2 \sin \varphi + w_2 \cos \varphi;$$

$$(1.7) \quad \partial w_1 / \partial x_1 = \partial w_2 / \partial x_2;$$

$$(1.8) \quad \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} \cos \varphi + R_{x_2} \sin \varphi;$$

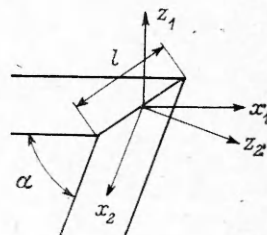
$$(1.9) \quad R_{x_1} = -\sigma_{x_2} \sin \varphi + R_{x_2} \cos \varphi;$$

$$(1.10) \quad M_{x_1} = M_{x_2};$$

$$(1.11) \quad v_1 = v_2;$$

$$(1.12) \quad \tau_{x_1 y} = \tau_{x_2 y},$$

где $\varphi = \pi - \alpha$ (α — угол между пластинами); σ_{x_i} — нормальные напряжения; $\tau_{x_i y}$ — напряжения сдвига; M_{x_i} — изгибающие моменты относительно оси $x = 0$; $R_{x_i} = Q_{x_i} + \partial M_{x_i y} / \partial y$ (Q_{x_i} — поперечная сила, $M_{x_i y}$ — крутящий момент); $i = 1, 2$.



Ф и г. 1

где первое слагаемое представляет собой гармоническую волну, второе — краевой эффект.

$$(2.12) \quad w^* = w_1^* e^{i(\omega^* t + \nu_1^* x_1)} + w_2^* e^{i(\omega^* t + \nu_2^* x_2)}$$

Отраженная волна для левой пластинки имеет вид w_1^* , а часть волны отражается обратно. Распространяясь по левой пластинке, часть волны пройдет через ребро на правую пластинку w_2^* считаем заданными).

$$w_1^* = w_0^* e^{i(\omega^* t + \nu_1^* x_1)}; \quad w_2^* = w_0^* e^{i(\omega^* t + \nu_2^* x_2)}$$

w_1^*, w_2^* — безразмерные входные амплитуды:

$$\text{где } \omega^* = \frac{c}{L} \left(\frac{L}{\lambda} \right);$$

$$(2.11) \quad w_1^* = w_0^* e^{i(\omega^* t + \nu_1^* x_1)}$$

$$(2.10) \quad w_2^* = w_0^* e^{i(\omega^* t + \nu_2^* x_2)}$$

Пусть падающие волны имеют вид

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x_2^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial w_1^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2^*}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \sin \phi + \frac{\partial w_2^*}{\partial x_2} \cos \phi;$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial w_1^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2^*}{\partial x_2} \cos \phi - \frac{\partial w_2^*}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \sin \phi;$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial w_1^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2^*}{\partial x_2} \sin \phi;$$

$$(2.5) \quad w_1^* = w_2^* \sin \phi + w_2^* \cos \phi;$$

$$(2.4) \quad w_1^* = w_2^* \cos \phi + w_2^* \sin \phi;$$

Условия сопряжения пластин в случае $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$ запишем в виде

Здесь $k = 1$ или 2 , в зависимости от того, к какой из пластин примениются уравнения $\Delta w^* = \partial^2 w^* / \partial t^2 + \partial^2 w^* / \partial x^2$.

$$(2.3) \quad \Delta w^* + 12(h_1/h_2)^2 \partial^2 w^* / \partial t^2 = 0.$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial w^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \sin \phi;$$

$$(2.1) \quad \frac{\partial w^*}{\partial x_1} = \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \cos \phi + \frac{\partial w^*}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \sin \phi;$$

Правые уравнения (1.1) — (1.3) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные координаты $\xi = x/h_1, \eta = h_2/h_1$, безразмерные переменные $u^* = u/h_1, v^* = v/h_2, w^* = w/h_1$ и безразмерное время $\tau = ct/h_1 = \sqrt{E/\rho} (t/h_1)$. Тогда (для каждой из пластин) получим

$$\frac{E_1 h_1^3}{\rho h_1^3} \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial x_1^3} = \frac{E_2 h_2^3}{\rho h_2^3} \frac{\partial^3 w_2^*}{\partial x_2^3} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{E_2 h_2^3}{\rho h_2^3} \frac{\partial^3 w_2^*}{\partial x_2^3} \cos \phi;$$

$$\frac{E_1 h_1^3}{\rho h_1^3} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x_1^2} = \frac{E_2 h_2^3}{\rho h_2^3} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x_2^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + \frac{E_2 h_2^3}{\rho h_2^3} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial x_2^2} \sin \phi;$$

$$u_1^* = u_2^* \cos \phi + w_2^* \sin \phi, \quad w_1^* = -u_2^* \sin \phi + w_2^* \cos \phi, \quad \partial w_1^* / \partial x_1 = \partial w_2^* / \partial x_2;$$

Условия сопряжения на общем ребре в данном случае имеют вид. Решения не зависят от переменной y и граничные условия (1.4) отпадают.

2. Рассмотрим сначала частный случай — плоскую задачу ($l = \infty$). Тогда $v = 0$,

Продольная отраженная волна имеет вид

$$(2.13) \quad u = u_1^* e^{i(\omega^* \tau + \alpha_1^* \xi_1)}.$$

Для правой пластинки имеем

$$(2.14) \quad w^* = w_2^* e^{i(\omega^* \tau - \gamma_2^* \xi_2)} + w_2'^* e^{-i \gamma_2^* \xi_2} e^{i \omega^* \tau}, \quad u^* = u_2^* e^{i(\omega^* \tau - \alpha_2^* \xi_2)}.$$

Значения γ_k^* , α_k^* находятся из уравнений (2.1), (2.3) при подстановке в них решений в вышеуказанной форме:

$$\gamma_k^* = \sqrt[4]{12} \sqrt{\frac{h_1}{h_k}} \omega^*, \quad \alpha_k^* = \omega_k^* \quad (k = 1, 2).$$

Подстановка (2.10)–(2.14) в уравнения (2.4)–(2.9) дает следующую систему из шести линейных уравнений (с шестью неизвестными безразмерными амплитудами w_1^* , $w_1'^*$, w_2^* , $w_2'^*$, u_1^* , u_2^*):

$$(2.15) \quad u_{01}^* + u_1^* = u_2^* \cos \varphi + (w_2^* + w_2'^*) \sin \varphi;$$

$$(2.16) \quad w_{01}^* + w_1^* + w_1'^* = -u_2^* \sin \varphi + (w_2^* + w_2'^*) \cos \varphi;$$

$$(2.17) \quad \gamma_1^* (-i w_{01}^* + i w_1^* + w_1'^*) = \gamma_2^* (-i w_2^* - w_2'^*);$$

$$(2.18) \quad \alpha_1^* (-i u_{01}^* + i u_1^*) = -\alpha_2^* \left(\frac{h_2}{h_1} \right) i u_2^* \cos \varphi + \\ + \frac{1}{12} (\gamma_2^*)^3 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 (-i w_2^* + w_2'^*) \sin \varphi;$$

$$(2.19) \quad \frac{1}{12} (\gamma_1^*)^3 (-i w_{01}^* + i w_1^* - w_1'^*) = \alpha_2^* \left(\frac{h_2}{h_1} \right) i u_2^* \sin \varphi + \\ + \frac{1}{12} (\gamma_2^*)^3 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 (-i w_2^* + w_2'^*) \cos \varphi;$$

$$(2.20) \quad (\gamma_1^*)^2 (-i w_{01}^* - w_1^* + w_1'^*) = (\gamma_2^*)^2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 (-w_2^* + w_2'^*).$$

Будем искать асимптотическое решение системы (2.15)–(2.20) в предположении, что угол α между пластинами не является малым или близким к π .

Введем параметр $k = \sqrt[4]{\omega^*} = \frac{1}{\sqrt[4]{12}} \sqrt{\frac{\omega h_1}{c}}$, рассматриваемый в дальнейшем как малый. Обозначим $h_1/c = T_0$, $2\pi/\omega = T_\omega$. Малость параметра k означает, что время прохождения волной расстояния h много меньше, чем период $2\pi/\omega$.

После деления обеих частей уравнения (2.19) на величину $\alpha_2^* h_2/h_1$ получаем

$$\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \frac{h_1}{h_2} \omega^{*1/2} [-i w_{01}^* + i w_1^* - w_1'^*] = i u_2^* \sin \varphi + \\ + \frac{1}{\sqrt[4]{12}} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} \omega^{*1/2} (-i w_2^* + w_2'^*),$$

откуда в нулевом приближении ($\sqrt[4]{\omega^*} = k = 0$) следует

$$(2.21) \quad u_2^* = 0 \quad (\sin \varphi \neq 0).$$

Поделив уравнение (2.18) на α_1^* и принимая во внимание (2.21), получим

$$-i u_{01}^* + i u_1^* = \frac{1}{\sqrt[4]{12}} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{3/2} \omega^{*1/2} (-i w_2^* + w_2'^*) \sin \varphi,$$

откуда

$$(2.22) \quad u_1^* = u_{01}^*.$$

С учетом (2.21), (2.22) уравнения (2.15), (2.16) преобразуются следующим образом:

$$(2.23) \quad w_2'^* = -w_2^* + \frac{2}{\sin \varphi} u_{01}^*;$$

$$(2.24) \quad w_1'^* = -w_{01}^* - w_1^* + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} u_{01}^*.$$

Подставив (2.23), (2.24) в (2.17), (2.20) и перенеся члены, содержащие известные безразмерные амплитуды u_{01}^* , w_{01}^* в правую часть, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными w_1^* , w_2^* , решение которой имеет вид

$$w_1^* = - \frac{\left[1 + i \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} w_{01}^* +$$

$$+ \frac{\left\{ \left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right] \cos \varphi + i \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \left[\cos \varphi + \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{1/2} \right] \right\} \frac{1}{\sin \varphi}}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} u_{01}^*,$$

$$w_2^* = - \frac{(i-1) \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} w_{01}^* +$$

$$+ \frac{\left\{ \left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right] + i \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} \cos \varphi + 1 \right] \right\} \frac{1}{\sin \varphi}}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} u_{01}^*.$$

Таким образом, в нулевом приближении продольная волна целиком отражается от ребра как от свободного края и возвращается назад, при этом она порождает две изгибные волны. Изгибное же возмущение порождает только изгибные волны, причем передача возмущения от изгибной волны не зависит от угла между пластинами (в предположении, что $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$). Решение не зависит от частоты колебаний ω . Для $\varphi = \pi/2$ имеем

$$w_1^* = - \frac{\left[1 + i \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} w_{01}^* + \frac{i \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} u_{01}^*,$$

$$w_2^* = - \frac{(i-1) \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} w_{01}^* + \left\{ 1 + \frac{i}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} \right\} u_{01}^*, \quad u_1^* = u_{01}^*, \quad u_2^* = 0.$$

3. Рассмотрим вопрос о передаче волновой энергии. Запишем формулы, описывающие волну, движущуюся в направлении x :

$$(3.1) \quad w = w_0 \sin(\omega t + \gamma x), \quad u = u_0 \sin(\omega t + \alpha x).$$

Возьмем изгибную волну и посчитаем кинетическую и потенциальную энергию на одной ее длине:

$$0 \longleftarrow \frac{2\pi}{\gamma},$$

$$T_w = \frac{\rho h_k}{2} \int_s (w_t')^2 ds = \frac{\rho h_k h_1 c^2}{2} \int_{s^*} (w_t'^*)^2 ds^* = \frac{\rho h_k h_1 c^2}{2} |w_0^*|^2 (w_t'^*)^2 \frac{\pi}{\gamma_k^*},$$

$$\Pi_w = \frac{D}{2} \int_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 ds = \frac{\rho h_k^3 c^2}{2 \cdot 12 h_1} \int_{s^*} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} \right)^2 ds^* = \frac{\rho h_k^3 c^2}{2 \cdot 12 h_1} |w_0^*|^2 (\gamma_k^*)^4 \frac{\pi}{\gamma_k^*},$$

$$k = 1, 2, s^* = s/h_1.$$

Подстановка (3.1) (в безразмерном виде) в уравнение (2.3) дает соотношение $(\gamma^*)^4 = 12(h_1/hk)^2(\omega^*)^2$, означающее, что кинетическая энергия изгибной волны пластины равна ее потенциальной энергии: $T_w = \Pi_w$.

Аналогичным образом можно показать, что $T_u = \Pi_u$.

Теперь, чтобы проверить выполнение энергетического баланса $E_0 = E_1 + E_2$, достаточно показать, что $T_0 = T_1 + T_2$.

Будем для простоты считать, что на левую пластинку подается только изгибное возмущение $w^* = w_{01}^* e^{i(w^* \tau - \gamma_1^* \xi)}$.

В нулевом приближении эта волна породит лишь изгибные волны с безразмерными амплитудами w_1^*, w_2^* , которые определяются по формулам

$$w_1^* = - \frac{\left[1 + i \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} w_{01}^*, \quad w_2^* = - \frac{(i-1) \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]} w_{01}^*.$$

Рассмотрим приведенную (безразмерную) кинетическую энергию изгибной волны пластины. Для этого поделим T_w на величину $\rho c^2 h_1^2$

$$T_w^* = \frac{1}{2} \frac{h_k}{h_1} |w_0^*|^2 (\omega^*)^2 \frac{\pi}{\gamma_k^*}, \quad k=1, 2.$$

По левой пластинке к ребру подошла энергия $T_{w_0}^* = \frac{1}{2} |w_{01}^*|^2 (\omega^*)^2 \frac{\pi}{\gamma_1^*}$,

от ребра ушла энергия $T_w^* = T_{w_1}^* + T_{w_2}^* = \frac{1}{2} |w_1^*|^2 (\omega^*)^2 \frac{\pi}{\gamma_1^*} + \frac{1}{2} |w_2^*|^2 (\omega^*)^2 \times$
 $\times \frac{\pi}{\gamma_2^*} \frac{h_2}{h_1}$,

$$\gamma_2^* = \gamma_1^* \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{1/2},$$

$$|w_1^*|^2 + |w_2^*|^2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{3/2} = \frac{1 + \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]^2 + 2 \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{3/2}}{\left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]^2} |w_{01}^*|^2 = |w_{01}^*|^2.$$

Таким образом, энергетический баланс выполняется.

Назовем величину $\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{3/2} |w_2^*|^2$ амплитудным коэффициентом прохождения энергии изгибной волны, а величину $|w_1^*|^2$ — амплитудным коэффициентом отражения:

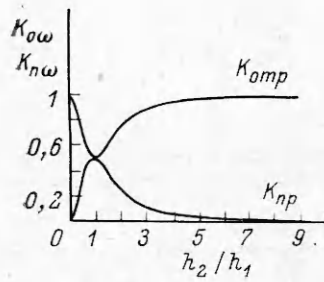
$$K_{прw} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{3/2} |w_2^*|^2, \quad K_{отрw} = |w_1^*|^2, \quad K_{прw} + K_{отрw} = 1$$

(берется такое входное возмущение w_{01}^* , что $|w_{01}^*|^2 = 1$).

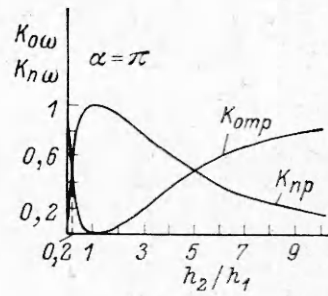
Для того чтобы большая часть энергии отразилась от ребра, необходимо выполнение условия $K_{отрw} > K_{прw}$ или $\left[1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{5/2} \right]^2 > 0$.

Таким образом, в нулевом приближении ($k=0$), когда пластинки имеют одинаковую толщину, половина энергии проходит через ребро; если же толщины пластин различны, то всегда возвращается большая часть энергии (сохраняется предположение о том, что угол между пластинами не является малым и близким к π).

Предельные случаи: 1. Правая пластинка много тоньше левой $h_2/h_1 \rightarrow 0$, тогда $K_{отрw} = |w_1^*|^2 \sim 1$, $K_{прw} \sim (h_2/h_1)^{5/2} \rightarrow 0$, т. е. практически вся энергия возвращается обратно (фиг. 2).



Ф и г. 2



Ф и г. 3

2. Левая пластинка много тоньше правой

$$h_1/h_2 \rightarrow 0, K_{0trw} \sim 1, K_{prw} \sim (h_1/h_2)^{5/2} \rightarrow 0.$$

В этом случае почти вся энергия также возвращается обратно (фиг. 3).

Если угол между пластинами $\alpha = \pi$ ($\varphi = 0$), то нулевое приближение дает следующие выражения для амплитуд:

$$u_1^* = u_2^* = 0,$$

$$w_1^* = \frac{4 \left(\frac{h_2}{h_1}\right) \left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right) - 2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} \right]^2}{\left\{ \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} \right] \left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2} \right]^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} \right]^2 \right\} \times \rightarrow \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) w_{01}^*},$$

$$w_2^* = \frac{4 \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} \right] \left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2} \right]}{\left\{ \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} \right] \left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2} \right]^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} \right]^2 \right\} \times \rightarrow \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) w_{01}^*}.$$

Здесь для пластин одинаковой толщины $K_{0trw} \rightarrow 0$, $K_{prw} \sim 1$, в случае же, если $h_2/h_1 \rightarrow 0$ или $h_1/h_2 \rightarrow 0$, $K_{0trw} \sim 1$, $K_{prw} \rightarrow 0$.

4. Вернемся к общему случаю, когда имеют место колебания по всем трем направлениям. Волна в направлении оси x (в безразмерном виде) описывается формулами:

$$(4.1) \quad u^*(\xi, \eta) = u^* \sin \lambda^* \eta \sin (\alpha^* \xi - \omega^* \tau);$$

$$(4.2) \quad v^*(\xi, \eta) = v^* \cos \lambda^* \eta \cos (\alpha^* \xi - \omega^* \tau);$$

$$(4.3) \quad w^*(\xi, \eta) = w^* \sin \lambda^* \eta \sin (\gamma^* \xi - \omega^* \tau),$$

где $\lambda^* = \lambda h_1$; параметр λ таков, что по общему ребру длины l укладывается целое число полуволн: $l/(\pi/\lambda) = n$, n — целое.

Подставив (4.3) в (2.3), получим

$$(\gamma_k^{*2} + \lambda^{*2})^2 = 12 (h_1/h_k)^2 \omega^{*2}, \quad k = 1, 2, \quad \text{откуда } (\gamma^*)_{1,2}^2 = \pm \frac{h_1}{h_2} \sqrt{12} \omega^* - \lambda^{*2}.$$

Подставляя (4.1), (4.2) в уравнения (2.1), (2.2), получаем однородную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными u^* и v^* :

$$(4.4) \quad \left(\alpha^{*2} + \frac{1-\nu}{2} \lambda^{*2} - \omega^{*2} \right) u^* - \frac{1+\nu}{2} \alpha^* \lambda^* v^* = 0, \quad - \frac{1+\nu}{2} \alpha^* \lambda^* u^* + \left(\frac{1-\nu}{2} \alpha^{*2} + \lambda^{*2} - \omega^{*2} \right) v^* = 0.$$

Равенство нулю определителя этой системы дает квадратное уравнение относительно ω^{*2} :

$$(4.5) \quad (\omega^{*2})^2 - [(3-\nu)/2](\alpha^{*2} + \lambda^{*2})\omega^{*2} + [(1-\nu)/2](\alpha^{*2} + \lambda^{*2})^2 = 0.$$

Уравнение (4.5) имеет корни

$$(4.6) \quad (\omega^{*2})_1 = \alpha^{*2} + \lambda^{*2}, \quad (\omega^{*2})_2 = [(1 - \nu)/2](\alpha^{*2} + \lambda^{*2}),$$

при этом первому корню соответствует решение системы (4.4) $u^* = \alpha^*$, $v^* = -\lambda^*$; второму $u^* = \lambda^*$, $v^* = \alpha^*$.

Из (4.6) имеем

$$(\alpha^{*2})_1 = \omega^{*2} - \lambda^{*2}, \quad (\alpha^{*2})_2 = [2/(1 - \nu)]\omega^{*2} - \lambda^{*2}.$$

Введем обозначения:

$$(\gamma^*)^2 = (\gamma^{*2})_1 = (h_1/h_k)\sqrt{12}\omega^* - \lambda^{*2}, \quad (\gamma'^*)^2 = -(\gamma^{*2})_2 = (h_1/h_2)\sqrt{12}\omega^* + \lambda^{*2}, \\ (\alpha^*)^2 = -(\alpha^{*2})_1 = \lambda^{*2} - \omega^{*2}, \quad (\alpha'^*)^2 = -(\alpha^{*2})_2 = \lambda^{*2} - [2/(1 - \nu)]\omega^{*2},$$

если

$$(4.7) \quad (h_1/h_k)\sqrt{12}\omega^* > \lambda^{*2}, \quad \omega^* > \lambda^*,$$

то γ^* , γ'^* вещественные; α^* , α'^* чисто мнимые.

Считаем, что на вход подается только изгибное возмущение $w^* = \sin \lambda^* \eta w_{01}^* \times \times e^{i(\omega^* \tau - \gamma_1^* \xi_1)}$ с заданной амплитудой w_{01}^* ($w_{01}^* = w_{01}/h_1$).

Запишем решение на выходе в следующем виде:

левая пластина

$$w^* = \sin \lambda^* \eta \left[w_1^* e^{i(\omega^* \tau + \gamma_1^* \xi_1)} + w_1'^* e^{i\omega^* \tau + \gamma_1'^* \xi_1} \right], \\ u^* = \sin \lambda^* \eta \left[u_1^* \alpha_1^* e^{i\omega^* \tau} e^{\alpha_1^* \xi_1} + u_1'^* \lambda^* e^{i\omega^* \tau} e^{\alpha_1'^* \xi_1} \right], \\ v^* = \cos \lambda^* \eta \left[u_1^* \lambda^* e^{i\omega^* \tau} e^{\alpha_1^* \xi_1} + u_1'^* \alpha_1'^* e^{i\omega^* \tau} e^{\alpha_1'^* \xi_1} \right];$$

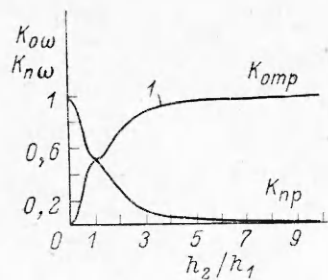
правая пластина

$$w^* = \sin \lambda^* \eta \left[w_2^* e^{i(\omega^* \tau + \gamma_2^* \xi_2)} + w_2'^* e^{i\omega^* \tau - \gamma_2'^* \xi_2} \right], \\ u^* = \sin \lambda^* \eta \left[-u_2^* \alpha_2^* e^{i\omega^* \tau} e^{-\alpha_2^* \xi_2} + u_2'^* \lambda^* e^{i\omega^* \tau} e^{-\alpha_2'^* \xi_2} \right], \\ v^* = \cos \lambda^* \eta \left[u_2^* \lambda^* e^{i\omega^* \tau} e^{-\alpha_2^* \xi_2} - u_2'^* \alpha_2'^* e^{i\omega^* \tau} e^{-\alpha_2'^* \xi_2} \right],$$

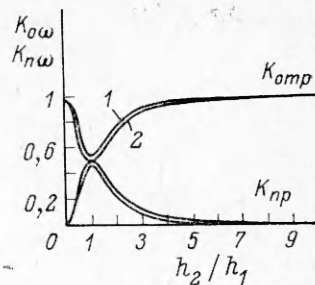
при этом волна имеет место в той области, где выполняется условие (4.7). Решение в вышеуказанной форме удовлетворяет восьми граничным условиям (1.4). Подставив это решение в условия сопряжения на общем ребре (1.5)–(1.12) (в нулевом приближении) в предположении, что $\varphi \sim 0(k^0)$, $(\pi - \varphi) \sim 0(k^0)$, получаем, что изгибное возмущение порождает лишь изгибные волны с амплитудами

$$(4.8) \quad w_1^* = - \frac{\left\{ [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_2'^* + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 [(\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2] \gamma_1'^* \right\} +}{\left\{ [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_2'^* + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 [(\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2] \gamma_1'^* \right\} +} \\ + i \left\{ - [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_2^* + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 [(\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2] \gamma_1^* \right\} \\ \rightarrow \frac{\left\{ [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_2^* + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 [(\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2] \gamma_1^* \right\}}{2i [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_1^*} w_{01}^*, \\ w_2^* = - \frac{2i [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_1^*}{\left\{ [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_2'^* + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 [(\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2] \gamma_1'^* \right\} +} \\ \rightarrow \frac{\left\{ [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_2^* + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 [(\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2] \gamma_1^* \right\}}{2i [(\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2] \gamma_1^*} w_{01}^*,$$

которые не зависят (как и в плоской задаче) от угла между пластинами.



Ф и г. 4



Ф и г. 5

Если положить $\gamma_i^* = \gamma_i'^*$ ($i = 1, 2$) ($\lambda = 0$), что соответствует случаю, когда нет колебаний в направлении y (пластинки бесконечно широкие), то (4.8) сведется к тому же результату, что и в п. 2.

Проведя выкладки, аналогичные выкладкам н. 3, получим, что и в этом случае кинетическая энергия изгибной волны пластины равна ее потенциальной энергии:

$$T_w^* = \Pi_w^* = \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} |w_0^*|^2 (\omega^*)^2 \frac{\pi}{\gamma_k^*} \frac{\pi}{\lambda^*}, \quad k = 1, 2, \quad K_{прw} = |w_1^*|^2,$$

$$K_{отрw} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{\gamma_2^* (\gamma_2^*)^2 + (\gamma_2'^*)^2}{\gamma_1^* (\gamma_1^*)^2 + (\gamma_1'^*)^2} |w_2^*|^2.$$

Все вышеизложенное верно для $\sqrt{\omega^*} \ll 1$.

На фиг. 4, 5 даны графики зависимостей коэффициентов отражения и прохождения изгибной волны от отношения толщин пластинок при различных значениях параметров ω^* и λ^* (фиг. 4: $\omega^* = 0,01$, линия 1 — $\lambda^* = 0,005; 0,009$; фиг. 5: $\omega^* = 0,1$; линия 1 — $\lambda^* = 0,09$, 2 — $\lambda^* = 0,005; 0,009; 0,02$). Из фиг. 4, 5 видно, что кривые незначительно отличаются от кривых на фиг. 2.

Таким образом, если параметр ω^* достаточно мал, вместо общего случая можно рассматривать плоскую задачу, которая является более простой.

Поступила 26 XII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966.
2. Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М.: Наука, 1974.