чительно осложняет его использование при решении самосогласованных задач, и в этих случаях можно рекомендовать двучленное приближение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гинзбург В. Л., Гуревич А. В.** Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электрическом поле // УФН.— 1960.— Т. 70, № 2.
2. **Reid I. D.** An investigation of the accuracy of numerical solutions of Boltzmann's equation for electron swarms in gases with large inelastic cross sections // Austral. J. Phys.— 1979.— V. 32.— P. 231.
3. **Pitchford L. C., O'Neil S. V., Rumble J. R.** Extended Boltzmann analysis of electron swarm experiments // Phys. Rev. A.— 1981.— V. 23, N 1.
4. **Ness K. F., Robson R. E.** Velocity distribution function and transport coefficients of electron swarms in gases. II. Moment equations and applications // Phys. Rev. A.— 1986.— V. 34, N 3.
5. **Lowke J. J., Parker J. H., Hall C. A.** Electron diffusion under the influence of an electric field near absorbing boundaries // Phys. Rev. A.— 1977.— V. 15, N 3.
6. **Braglia G. L., Lowke J. J.** Comparison of Monte-Carlo and Boltzmann calculation of electron diffusion to absorbing electrodes // J. Phys. D.: Appl. Phys.— 1979.— V. 12.— P. 1831.
7. **Кейз К., Цвайфель П.** Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.
8. **Abbot R. G., Berry H. W.** Measurement of the angular distribution of electrons ejected from tungsten by helium ions // J. Appl. Phys.— 1959.— V. 30.— P. 871.
9. **Thomas W. R. L.** The determination of the total excitation cross section in neon by comparison of theoretical and experimental values of Townsend's primary ionization coefficient // J. Phys. B: Atom. Mol. Phys.— 1969.— V. 2.— P. 551.
10. **Hagstrum H. D.** Theory of Auger ejection of electrons from metals by ions // Phys. Rev.— 1954.— V. 96.— P. 336.
11. **Braglia G. L., Romana L.** On the accurasy of experimental electron energy distributions in gases // Nuovo Cim.— 1985.— V. 85 B, N 2.

г. Новосибирск *Поступила 28/XII 1987 г., в окончательном варианте — 27/IV 1988 г.*

УДК 538.24,42+517.956

С. М. Пономарев

О ПРОНИКНОВЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОВОДНИК

В данной работе рассматривается процесс проникновения импульсного магнитного поля в несжимаемый проводник с учетом выделения джоулева тепла. Получены решения для случая проникновения постоянного сильного магнитного поля (значительно превышающего поля насыщения) в проводящее полупространство с плоской границей при постоянной удельной теплоемкости и теплопроводности. Показано, что учет влияния тока смещения, когда граничное магнитное поле задано в виде ступенчатой функции, имеет принципиальное значение как в вопросе о нагреве поверхности проводника, так и в вопросе о сохранении сильных магнитных нолей в любых экспериментальных устройствах с плоскими границами.

Известно [1, 2], что проникновение сильного магнитного поля $H(x, t)$ в плоский несжимаемый проводник ($x > 0$) может быть описано уравнениями (в системе единиц МКСА):

$$-\partial H/\partial x = j + \varepsilon_0\varepsilon_R \partial E/\partial t,\ \partial E/\partial x = -\mu_0\mu_R \partial H/\partial t,\ j = \sigma E, \tag{1}$$
$$\partial Q/\partial t = j^2/\sigma - \partial q/\partial x,\ q = -\lambda \partial\theta/\partial x - \tau_0 \partial q/\partial t,\ Q = c_V \theta,$$

где $j(x, t)$ — объемная плотность тока проводимости; $E(x, t)$ — напряженность электрического поля; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ А·с/(В·м); $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ В·с/(А·м); μ_R, ε_R — относительные проницаемости, которые считаем постояными (причем либо $\mu_R = \varepsilon_R = 1$, либо $\mu_R = 1$, $\varepsilon_R = 0$, если пренебрегаем в задаче током смещения по сравнению с током проводимости); $\sigma = \mathrm{const}$ — проводимость среды; $Q(x, t)$ — прирост теплосодержания по отношению к состоянию при 0 °С; $q(x, t)$ — плотность теплового потока; $\theta(x, t)$ — температура проводника; λ — коэффициент теплопроводности; $\tau_0 = \mathrm{const}$ — время релаксации теплового потока; c_V — удельная теплоемкость проводника.

Отметим, что если характерное время изменения теплового потока велико по сравнению со временем релаксации τ_0, то $q/\tau_0 \partial q/\partial t \gg 1$ и пятое уравнение системы (1) переходит в обычный закон Фурье $q = -\lambda \partial\theta/\partial x$. Если же тепловой поток меняется значительно быстрее, чем происходит релаксация, то $\partial q/\partial t \gg q/\tau_0$ и пятое уравнение системы (1) принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\tau_0}\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{2}$$

Пренебрегая током смещения по сравнению с током проводимости и полагая $\tau_0 = 0$, рассмотрим процесс проникновения магнитного поля в проводящее полупространство $x > 0$ при следующих граничных и начальных условиях:

$$H(0,\ t) = H_0,\ q(0,\ t) = 0 \quad (t > 0); \tag{3}$$

$$H(x,\ 0) = 0,\ Q(x,\ 0) = 0 \quad (0 < x < \infty) \tag{4}$$

($H_0 = \mathrm{const}$ — сильное магнитное поле).

Очевидно, что система уравнений (1) сводится путем исключения функций j, E, q, θ к паре уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial t} = b\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + k\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (b = 1/\sigma\mu_0,\ k = \lambda/c_V). \tag{5}$$

Найдем решение задачи (3) — (5). Нетрудно видеть, что автомодельная переменная представима в виде $\xi = x/2\sqrt{bt}$. Заменим искомые функции:

$$H(x, t) = H_0 h(\xi), \quad Q(x, t) = \mu_0 H_0^2 g(\xi) \quad (g(\xi) \geqslant 0).$$

Из (3) — (5) имеем

$$h'' = -2\xi h' \quad (0 < \xi < \infty),\ h(0) = 1,\quad h(\infty) = 0. \tag{6}$$

Решая задачу (6), получим

$$h(\xi) = 1 - \Phi(\xi) \quad \left(\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\tau^2}\,d\tau\right). \tag{7}$$

Используя (7) в (5) и учитывая (3), (4), имеем

$$g'' + \frac{2b}{k}\xi g' = -\frac{4b}{\pi k}\exp(-2\xi^2) \quad (0 < \xi < \infty),\quad g'(0) = 0,\quad g(\infty) = 0. \tag{8}$$

Решая задачу (8), находим

$$g(\xi) = A - \frac{4b}{\pi k}\int_0^{\xi} e^{-\frac{b}{k}z^2}\left[\int_0^{z} e^{\left(\frac{b}{k}-2\right)\tau^2}\,d\tau\right]dz \tag{9}$$

$$\left(A = \sqrt{\frac{4b}{\pi k}}\int_0^{\infty} e^{\left(\frac{b}{k}-2\right)\tau^2}\left[1 - \Phi\left(\tau\sqrt{\frac{b}{k}}\right)\right]d\tau\right).$$

Применяя известные формулы [3], получим

$$A = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{2k}{b}}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{2k}{b}}}{1-\sqrt{1-\frac{2k}{b}}}, \tag{10}$$

а учитывая (9), имеем

$$Q(0, t) = \mu_0 H_0^2 A. \tag{11}$$

Сравним формулу (11) с известным результатом Р. Киддера [1]:

$$Q(0, t) \approx \mu_0 H_0^2 \frac{2}{\pi}\ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{2k}}\right) = \mu_0 H_0^2 B. \tag{12}$$

В частности, для меди $k/b \approx 0{,}009$ [1] и из (10), (12) находим $A = 1{,}7$ и $B = 1{,}5$.

Пусть Q_* — количество тепла, необходимое для нагревания единицы объема проводника от начальной температуры до температуры кипения и для его полного испарения. В дальнейшем считаем, что при поглощении тепла Q_* происходит изменение проводимости вещества, заполняющего полупространство: из проводника вещество превращается в диэлектрик, т. е. проводимость вещества меняется по закону

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 = \mathrm{const} & \text{при} \quad Q < Q_*, \\ 0 & \text{при} \quad Q = Q_*. \end{cases} \tag{13}$$

Например, для меди $Q_* \approx 4{,}7 \cdot 10^{10}$ Дж/м³ [4].

Из формулы (11) видно, что если магнитное поле H_0 достаточно велико ($H_0 > H_{\min} = \sqrt{Q_*/\mu_0 A}$), то поверхность, на которой проводимость падает до нуля (поверхность фазового перехода), может проникать внутрь полупространства $x > 0$ по закону $x = X(t)$.

В дальнейшем, пренебрегая токами смещения и считая $\tau_0 = 0$, рассмотрим процесс проникновения сильного магнитного поля H_0 в полупространство $x > 0$ при наличии фазового перехода (13), полагая, что на поверхности фазового перехода выполняются условия

$$H(x, t)\,|_{x=X(t)} = H_0, \quad Q\,|_{x=X(t)} = Q_*, \quad \frac{\lambda}{c_V} \frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{x=X(t)} = 0. \tag{14}$$

Итак, найдем решение задачи (4), (5), (14). Нетрудно видеть, что автомодельная переменная представима в виде $\xi = x/2\sqrt{bt}$, где $b = 1/\sigma_0\mu_0$. На границе фазового перехода $\xi = \alpha$ (α — неизвестная постоянная). Закон движения границы фазового перехода запишем в виде

$$x = X(t) = 2\alpha\sqrt{bt} \quad (\alpha = \mathrm{const} \geqslant 0). \tag{15}$$

Положим $H(x, t) = H_0 h(\xi)$, $Q(x, t) = \mu_0 H_0^2 g(\xi)$ $(g(\xi) \geqslant 0)$. Имеем

$$h'' = -2\xi h' \quad (\alpha < \xi < \infty), \; h(\alpha) = 1, \; h(\infty) = 0. \tag{16}$$

Решая задачу (16), получим

$$h(\xi) = (1 - \Phi(\xi))/(1 - \Phi(\alpha)). \tag{17}$$

Используя (17) в (5) и учитывая (4) и (14), находим

$$g'' + \frac{2b}{k}\xi g' = -\frac{4b\exp(-2\xi^2)}{\pi k\,[1 - \Phi(\alpha)]^2} \quad (\alpha < \xi < \infty), \; g'(\alpha) = 0, \; g(\infty) = 0; \tag{18}$$

$$g(\alpha) = Q_*/\mu_0 H_0^2. \tag{19}$$

Решая задачу (18), имеем

$$g(\xi) = \frac{4b}{\pi k\,[1 - \Phi(\alpha)]^2} \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{b}{k}z^2} \left[\int\limits_{\alpha}^{z} e^{\left(\frac{b}{k} - 2\right)\tau^2} d\tau \right] dz.$$

Чтобы определить неизвестную постоянную α, надо воспользоваться соотношением (19). Тогда

$$\sqrt{\frac{4b}{\pi k}} \frac{1}{[1 - \Phi(\alpha)]^2} \int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{\left(\frac{b}{k} - 2\right)\tau^2} \left[1 - \Phi\left(\tau\sqrt{\frac{b}{k}}\right)\right] d\tau = \frac{Q_*}{\mu_0 H_0^2}. \tag{20}$$

Решение уравнения (20) и дает значение α.

Если в (20) $\alpha = 0$, то, вычисляя интеграл и учитывая (10), получим $A = Q_*/\mu_0 H_0^2$. Значит, если $H_0 = H_{\min} = \sqrt{Q_*/\mu_0 A}$, из (20) и (15) следует, что скорость движения границы раздела фаз равна нулю.

Пусть в (20) $\alpha \to +\infty$. Используя известную [5] асимптотику интеграла ошибок $\Phi(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$

$$\Phi(\alpha) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}(1 + o(1)) \tag{21}$$

и правило почленного интегрирования асимптотических разложений, имеем

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{\left(\frac{b}{k}-2\right)\tau^2}\left[1 - \Phi\left(\tau\sqrt{\frac{b}{k}}\right)\right] d\tau = \sqrt{\frac{k}{4\pi b}} \int_{2\alpha^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt\,(1 + o(1)). \tag{22}$$

Известно [6], что при $\alpha \to +\infty$

$$\int_{2\alpha^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \frac{e^{-2\alpha^2}}{2\alpha^2}(1 + o(1)). \tag{23}$$

Учитывая (21) — (23) и переходя в (20) к пределу при $\alpha \to +\infty$, находим предельное значение магнитного поля $H_0 = H_{\max} = \sqrt{2Q_*/\mu_0}$. Отметим, что $H_{\max}$ не зависит от λ. Таким образом, в рамках выбранной математической модели (4), (5), (14) сохранение магнитных полей, бо́льших $H_{\max}$, невозможно в любых экспериментальных устройствах с плоскими границами (в случае $\lambda = 0$ значение $H_{\max}$ получено в [4, 7]).

Выше, исследуя процесс проникновения импульсного магнитного поля в проводник, пренебрегали током смещения по сравнению с током проводимости в уравнении Максвелла. В результате имели некоторые утверждения, неадекватные физическому опыту. Например, в задаче (3) — (5) $\lim\limits_{t\to+0}\left(-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=0}\right) = \lim\limits_{t\to+0} E(0, t) = +\infty$, хотя из физики очевидно, что этого быть не может.

Ниже, рассматривая задачу о проникновении импульсного магнитного поля в проводящее полупространство $x > 0$, учтем влияние члена, обусловленного током смещения.

Итак, считая сначала для простоты выкладок $\lambda = 0$ и полагая

$$E(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty), \tag{24}$$

найдем решение задачи (1), (3), (4), (24) при $\mu_R = \varepsilon_R = 1$.

Нетрудно видеть, что, исключая функции j и E, имеем задачу

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \; H(0, t) = H_0, \; H(x, 0) = \frac{\partial H}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \; (0 < x < \infty)$$

($c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — скорость света в пустоте). Решение ее известно [5]:

$$H(x, t) = \begin{cases} -cH_0 \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_{\frac{x}{c}}^{t} I_0\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{c^2}}\right) \exp\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} y\right) dy & \text{при } t > \dfrac{x}{c}, \\ 0 \text{ при } t < \dfrac{x}{c} \end{cases}$$

($I_0(x)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента). Отсюда и из (1)

$$E(x, t) = \begin{cases} c\mu_0 H_0 I_0\left(\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{t^2 - \dfrac{x^2}{c^2}}\right) \exp\left(-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} t\right) & \text{при } t \geqslant \dfrac{x}{c}, \\ 0 \quad \text{при } t < \dfrac{x}{c}. \end{cases} \tag{25}$$

Если $\tau_0 = 0$, то из (1) $q(x, t) = 0$. Если $\tau_0 \neq 0$, то, записывая пятое уравнение системы (1) в виде $\frac{\partial}{\partial t}\left[q \exp\left(\frac{1}{\tau_0} t\right)\right] = 0$ и учитывая (24), имеем

$q(x, t) = 0$. Используя это в (1) и решая задачу для $Q(x, t)$, получим

$$Q(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\mu_0 H_0^2\displaystyle\int_{\frac{x}{c}}^{t} I_0^2\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{y^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)\exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}y\right)dy & \text{при } t>\dfrac{x}{c},\\ 0 \text{ при } t<\dfrac{x}{c}. & \end{cases}$$

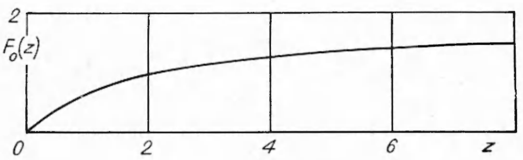
Следовательно, на поверхности проводника

$$Q(0,t)=\mu_0 H_0^2\int_0^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} I_0^2\left(\frac{\tau}{2}\right)\exp(-\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Из (26) вытекает, что в рамках выбранной математической модели (1), (3), (4), (24) для любых магнитных полей H_0, в том числе и для сверхсильных $H_0>\sqrt{\frac{2Q_*}{\mu_0}}$, существует конечный промежуток времени t_0, который определяется из уравнения

$$\frac{Q_*}{\mu_0 H_0^2}=\int_0^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t_0} I_0^2\left(\frac{\tau}{2}\right)\exp(-\tau)\,d\tau, \tag{27}$$

в течение его плоская поверхность $x = 0$ проводника остается проводящей (не претерпевает фазового перехода). Например, для меди при $\sigma = 63\cdot10^6$ (Ом·м)$^{-1}$, $H = (1/3)H_{\min} = 5\cdot10^7$ А/м $= 0{,}62$ МЭ из (27) получим $t_0 \approx 36$ с.



На рисунке изображен график функции $F_0(z)=\int_0^z I_0^2\left(\frac{\tau}{2}\right)\exp(-\tau)d\tau$. Отметим, что при $z\to+\infty$ $F_0(z) = (1/\pi)\ln z(1 + o(1))$.

Пусть теперь $\lambda\neq 0$. В дальнейшем, не исследуя задачу (1), (3), (4), (24) при $\mu_R = \varepsilon_R = 1$ в общем виде, найдем ее решение в предположении, что в системе (1) вместо пятого уравнения стоит уравнение (2). Нетрудно видеть, что эта задача редуцируется к задаче

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+f(x,t),\ q(0,t)=0,\ q(x,0)=\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad (0<x<\infty)$$

($a=\sqrt{\lambda/c_V\tau_0}$ — скорость распространения тепла ($a\leqslant c$), $f(x, t) = -\sigma a^2\partial E^2(x, t)/\partial x$, $E(x, t)$ определяется формулой (25)), решение ее известно [5]:

$$q(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau+\dfrac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau & \text{при } t>\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau & \text{при } t<\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Используя это решение в (1) и проводя вычисления, получим

$$Q(0,t) = \mu_0 H_0^2 \left[\int\limits_{\frac{a}{a+c}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} I_0^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t - \tau\right)^2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \exp(-\tau)\,d\tau + 1 - \exp\left(-\frac{a}{a+c}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t\right)\right]. \tag{28}$$

Для твердых тел (металлов) $\tau_0 \approx 10^{-11}$ с [2], поэтому, например, для меди $a \approx 3 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = \frac{a}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\lambda}{c_V \tau_0}} \approx 10^{-5}$. Отметим, что при $\nu = 0$ из формулы (28) имеем (26).

Итак, требуется исследовать неотрицательную функцию

$$F_\nu(z) = \int\limits_0^z I_0^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - \nu^2(z-\tau)^2}\right)\exp(-\tau)\,d\tau \quad (\nu = \mathrm{const})$$

при $z > 0$, где $0 < \nu \leqslant 1$.

Приведем лишь один результат:

$$F_1(z) = 2/\pi z + o(1/z) \text{ при } z \to +\infty. \tag{29}$$

Действительно, учитывая известную асимптотику функций Бесселя [5], находим

$$F_1(z) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{z}{2}} \int\limits_{1/2}^{1} x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}x}\,dx + \frac{z}{2} e^{-\frac{z}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{z}{2}x} I_0^2\left(\frac{z}{2}\sqrt{x}\right)dx -$$
$$- \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty e^{-\frac{z}{2}(y-1)^2}\,dy + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Отсюда, используя известные формулы [3] и интегрируя по частям 1-й интеграл, имеем

$$F_1(z) = \frac{2}{\pi z} + \frac{1}{2} I_0\left(\frac{z}{4}\right)\exp\left(-\frac{z}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

и, учитывая асимптотику $I_0(z/4)$ при $z \to +\infty$, получим (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кнопфель Г.** Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М.: Мир, 1972.
2. **Лыков А. В.** Тепломассообмен.— М.: Энергия, 1971.
3. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений.— М., 1963.
4. **Семченко В. В., Степанов А. В.** О диффузии импульсных сверхсильных магнитных полей // ПМТФ.— 1969.— № 1.
5. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
7. **Биченков Е. И., Войтенко А. Е.** Автомодельный электрический скиновый взрыв проводника // ПМТФ.— 1969.— № 3.

г. Москва — *Поступила 16 / XII 1987 г., в окончательном варианте — 30 / V 1988 г.*