

5. Зернов В. Б., Шарвин Ю. В. Измерение сопротивления олова высокой чистоты при гелиевых температурах // ЖЭТФ.— 1959.— Т. 36, № 4.
 6. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике.— М.: Наука, 1970.
 7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции.— М.: Наука, 1977.

г. Новосибирск

Поступила 6/1 1988 г.,
 в окончательном варианте —
 24/III 1988 г.

УДК 533.6.011.8

Г. А. Руев, В. М. Фомин, М. Ш. Шавалиев

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В СМЕСЯХ ГАЗОВ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ МАССАМИ МОЛЕКУЛ

Течения смеси газов с сильно различающимися массами молекул при резких ускорениях или торможениях потока и больших градиентах гидродинамических величин, что имеет место в ударной волне (УВ), не могут быть описаны в рамках обычных, т. е. односкоростных и однотемпературных, уравнений Навье — Стокса. В таких течениях из-за большей инертности тяжелых молекул возникает скоростное «скольжение» между компонентами смеси, а в силу затрудненности обмена энергией между молекулами с большой разницей в массах внутри каждого компонента устанавливается своя температура. Часто возникающие разность гидродинамических скоростей компонентов смеси и разность их температур сравнимы с самими скоростями и температурами. В этих случаях необходимо привлечь уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей (многожидкостные гидродинамические уравнения), в которой каждый компонент (или группа компонентов) характеризуется собственными гидродинамической скоростью и температурой.

Задача о структуре УВ в бинарной смеси газов с сильно различающимися массами молекул ($\varepsilon = m_1/m_2 \ll 1$) решена в [1] на основе уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики [2, 3]. Однако входящие в эти уравнения парциальные коэффициенты вязкости и теплопроводности равны соответствующим коэффициентам чистых газов. Это приводит к тому, что результаты расчетов согласуются с данными экспериментов и расчетов на основе кинетических уравнений в узкой области значений концентрации тяжелого компонента. В [1] сделан вывод о том, что для расширения области применимости уравнений необходимо привлечь более общие выражения для парциальных коэффициентов переноса, которые зависят от концентрации и параметров другого компонента.

В [4] уравнения с такими коэффициентами получены из системы 13-моментных (для каждого компонента смеси) уравнений [5, 6] и использованы для решения задачи о структуре УВ умеренной интенсивности в газовых смесях He — Ar и He — Xe. В настоящей работе дано детальное исследование этой задачи, приведены новые результаты и их анализ.

1. Исходная система уравнений и постановка задачи. Система уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики в одномерном случае имеет вид [4]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, j \neq i,$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial x} - F_{ij} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right),$$

$$\frac{3}{2} \rho_i R_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) = - p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - Q_{ij} + \beta_i F_{ij} u_{ij} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{4}{3} \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2, \quad F_{ij} = K u_{ij}, \quad Q_{ij} = q (T_i - T_j), \quad u_{ij} = u_i - u_j,$$

$$p_i = \rho_i R_i T_i, \quad \beta_i = \frac{T_i}{m_i} \left| \begin{matrix} T_1 \\ m_1 \\ T_2 \\ m_2 \end{matrix} \right|.$$

Здесь ρ_i , u_i , T_i — массовая плотность, скорость и температура i -го компонента; $n_i = \rho_i/m_i$; $R_i = k/m_i$; k — постоянная Больцмана. Коэффициенты K и q , характеризующие обмен импульсом и энергией между компонентами смеси, и парциальные коэффициенты вязкости μ_i и тепло-

проводности λ_i запишем в форме [4]

$$(1.2) \quad K = \frac{16}{5} \frac{\rho_1 \rho_2}{m_1 + m_2} \Omega_{12}^{(1,1)}, \quad q = \frac{3k}{m_1 + m_2} K,$$

$$\mu_1 = \frac{5}{8} k T_1 \left(\Omega_1^{(2,2)} + 2 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(2,2)} \right)^{-1}, \quad \mu_2 = \frac{5}{8} k T_2 \left(\Omega_2^{(2,2)} + \frac{20}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1},$$

$$\lambda_1 = \frac{75}{32} \frac{k^2 T_1}{m_1} \left(\Omega_1^{(2,2)} + 5 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \quad \lambda_2 = \frac{75}{32} \frac{k^2 T_2}{m_2} \left(\Omega_2^{(2,2)} + 15 \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}.$$

В (1.1), (1.2) не включены члены, исчезающие в случае максвелловской модели молекул, а в Q_{ij} — и парциальные тензоры напряжений, кроме того, и члены $\sim u_{ij}^2$ (в силу условия $u_{ij}/\sqrt{2kT_1/m_1} \ll 1$ [3]). В кинетических коэффициентах μ_i и λ_i проведено разложение по ϵ и отброшены члены порядка ϵ (но оставлены слагаемые $\sim \epsilon n_1/n_2$ для $\rho_1 \geq \rho_2$).

Отметим, что уравнения (1.2) переходят в формулы [2] при принятых там предположениях, а в условиях реализации односкоростного однотемпературного описания (1.1) с (1.2) — в систему уравнений Навье — Стокса. Поэтому можно ожидать, что уравнения (1.1) с (1.2) будут описывать структуру УВ в широком диапазоне значений концентрации тяжелого компонента x_2 ($x_i = n_i/(n_1 + n_2)$).

Требуется найти стационарное решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$(1.3) \quad (\rho_i, u_i, T_i) \rightarrow (\rho_i^0, u_i^0, T_i^0), \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$(\rho_i, u_i, T_i) \rightarrow (\rho_i^1, u_i^1, T_i^1), \quad x \rightarrow +\infty$$

(индексом 0 обозначены параметры набегающего потока, величины с индексом 1 связаны с параметрами набегающего потока соотношениями Гюгонио для равновесной смеси).

Для проведения расчетов удобно перейти к безразмерным величинам

$$(1.4) \quad \bar{\rho}_i = \rho_i/\rho_i^0, \quad \bar{u}_i = u_i/\sqrt{R^0 T^0}, \quad \bar{T}_i = T_i/T^0, \quad \bar{p}_i = p_i/(\rho_i^0 R^0 T^0),$$

$$\bar{R}_i = R_i/R^0, \quad \bar{R}^0 = kn^0/\rho^0, \quad \bar{x} = x/L^*, \quad \bar{t} = t\sqrt{R^0 T^0}/L^*,$$

$$L^* = \mu^*/(\rho^0 u^0),$$

где u^0 — скорость набегающего потока; μ^* — коэффициент вязкости газовой смеси при звуковых условиях (т. е. при температуре $T^* = 3T^0(1 + M_0^2/3)/4$, $M_0 = u^0/a^0$), который вычислялся по формуле Уилке [7]. (В случае молекул-твердых сфер пространственная переменная обезразмеривалась на длину свободного пробега молекул в набегающем потоке смеси L^* , определенную в [8].) Уравнения (1.1) и граничные условия (1.3) в переменных (1.4) имеют вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\rho}_i \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j \neq i,$$

$$\bar{\rho}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \bar{x}} - \bar{K}_i \bar{u}_{ij} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} \right),$$

$$\frac{3}{2} \bar{\rho}_i \bar{R}_i \left(\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{x}} \right) = - \bar{p}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} - \bar{q}_i (\bar{T}_i - \bar{T}_j) +$$

$$+ \beta_i \bar{K}_i \bar{u}_{ij}^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{4}{3} \bar{\mu}_i \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}} \right)^2;$$

$$(1.6) \quad \bar{\rho}_i = 1, \quad \bar{u}_i = \bar{u}^0 = \sqrt{5/3} M_0, \quad \bar{T}_i = 1 \quad \text{при } \bar{x} = -l,$$

$$\bar{u}_i = \bar{u}^1, \quad \bar{T}_i = \bar{T}^1 \quad \text{при } \bar{x} = +l.$$

Здесь введены безразмерные коэффициенты

$$\bar{K}_i = KL^*/(\rho_i^0 \sqrt{R^0 T^0}), \quad \bar{q}_i = qL^*/(\rho_i^0 R^0 \sqrt{R^0 T^0}),$$

$$\bar{\mu}_i = \mu_i/(\rho_i^0 \sqrt{R^0 T^0} L^*), \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i/(\rho_i^0 R^0 \sqrt{R^0 T^0} L^*)$$

и безразмерные скорость и температура смеси за УВ

$$\bar{u}^1 = \frac{\sqrt{15}}{4M_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{M_0^2}{3} \right), \quad \bar{T}^1 = 1 + \frac{1}{5} \left(\frac{5}{3} M_0^2 - (\bar{u}^1)^2 \right).$$

Значение l выбирается на основе численных экспериментов таким образом, чтобы расширение области интегрирования не приводило к изменению результатов счета.

Для моделирования кинетических коэффициентов (1.2) входящие в них Ω -интегралы выразим через коэффициенты вязкости и теплопроводности $[\mu_i]_1$ и $[\lambda_i]_1$ чистого газа сорта i и коэффициент диффузии смеси $[D_{ij}]_1$ по формулам, полученным в первом приближении по полиномам Сонина [9]. Затем примем, что потенциалы межмолекулярных взаимодействий являются степенными, и выразим $[\mu_i]_1$, $[\lambda_i]_1$ и $[D_{ij}]_1$ через их значения в набегающем потоке. В результате имеем

$$K = \frac{kT^0}{m_1 m_2 n^0 [D_{12}^0]_1} \left(\bar{T}_2 + \frac{1}{\varepsilon} \bar{T}_1 \right)^{\nu_{12}}, \quad q = \frac{3k}{m_1 + m_2} K,$$

$$\mu_1 = [\mu_1]_1 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{n_2}{n_1} \frac{A\bar{K}}{\varepsilon p_1 \rho_2} \right)^{-1}, \quad \mu_2 = [\mu_2]_1 \left(1 + \frac{6K [\mu_2]_1}{p_2 \rho_2} \right)^{-1},$$

$$\lambda_1 = [\lambda_1]_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{n_2}{n_1} \frac{K [\mu_1]_1}{\varepsilon p_1 \rho_2} \right)^{-1}, \quad \lambda_2 = [\lambda_2]_1 \left(1 + \frac{9}{2} \frac{K [\mu_2]_1}{p_2 \rho_2} \right)^{-1},$$

$$[\mu_i]_1 = [\mu_i^0]_1 \bar{T}_i^{\nu_i}, \quad [\lambda_i]_1 = \frac{5}{2} \frac{k}{Pr_i m_i} [\mu_i]_1, \quad A = \Omega_{12}^{(2,2)}/\Omega_{12}^{(1,1)},$$

где Pr_i — число Прандтля i -го газа. Показатели ν_i , ν_{12} выбирались из экспериментальных данных соответственно по вязкости газа сорта i и по диффузии в смеси [7, 9, 10]:

$$\nu_1(\text{He}) = 0,647, \quad \nu_2(\text{Ar}) = 0,816, \quad \nu_2(\text{Xe}) = 0,93,$$

$$\nu_{12}(\text{He} - \text{Ar}) = 0,25, \quad \nu_{12}(\text{He} - \text{Xe}) = 0,32.$$

Для корректного сравнения с результатами, полученными методом прямого статистического моделирования Монте-Карло, расчеты проводились и для модели молекул упругих твердых сфер ($\nu_i = \nu_{12} = 0,5$) с отношением эффективных диаметров молекул [8] $\sigma_{\text{He}}/\sigma_{\text{Ar}} = 2,19/3,66$, $\sigma_{\text{He}}/\sigma_{\text{Xe}} = 2,19/4,94$.

Для решения задачи (1.5), (1.6) применяется метод установления, т. е. ищется решение нестационарных уравнений в системе координат, движущейся вместе с волной, с последующим выходом на стационарный режим. Для аппроксимации системы (1.5) использовалась неявная разностная схема расщепления по физическим процессам, подробно описанная в [4].

2. Результаты расчетов, обсуждение. Были проведены серии расчетов в диапазоне чисел Маха в набегающем потоке $M_0 = 1,58-4$, при каждом значении M_0 расчеты проводились для трех значений концентрации тяжелого компонента, взятых соответственно из областей малых (1,5—5 %), средних (10—15 %) и больших (≈ 50 %) концентраций.

Наиболее простым параметром, характеризующим структуру УВ, является «эффективная толщина» УВ, определяемая по максимальному наклону профиля массовой плотности смеси $\Lambda = (\bar{\rho}^1 - \bar{\rho}^0)/(\bar{d}\bar{\rho}/\bar{d}\bar{x})_{\text{max}}$ (формула Прандтля). Вводят также «эффективную толщину» УВ в каждом компоненте смеси, определяемую по максимальному наклону парциальной плотности $\Lambda_i = (\bar{\rho}_i^1 - \bar{\rho}_i^0)/(\bar{d}\bar{\rho}_i/\bar{d}\bar{x})_{\text{max}}$.

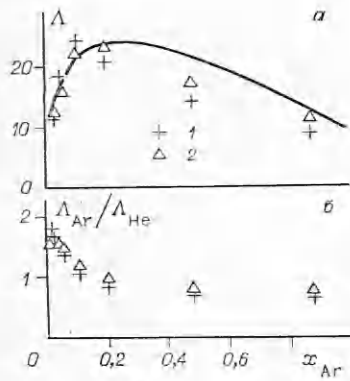


Рис. 1

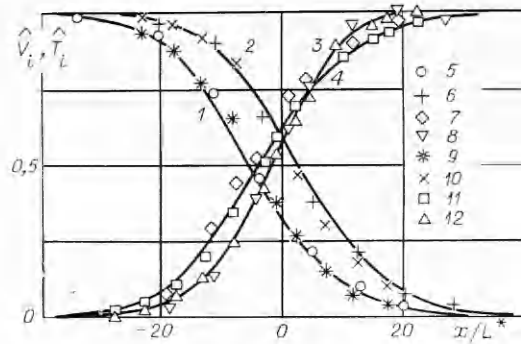


Рис. 2

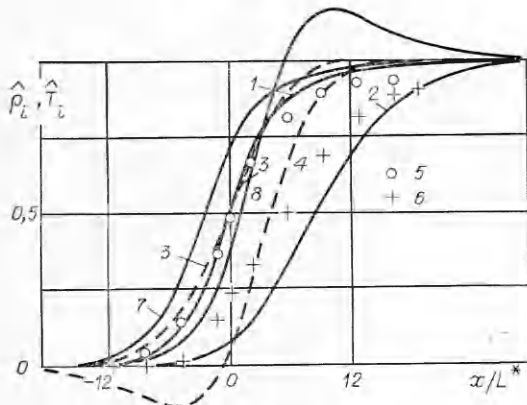


Рис. 3

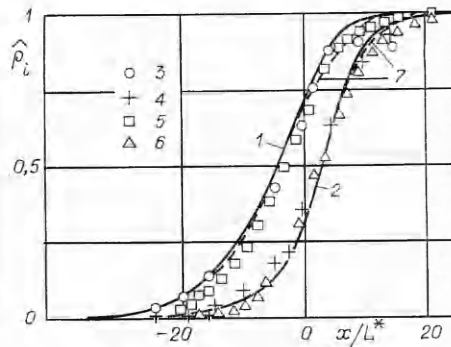
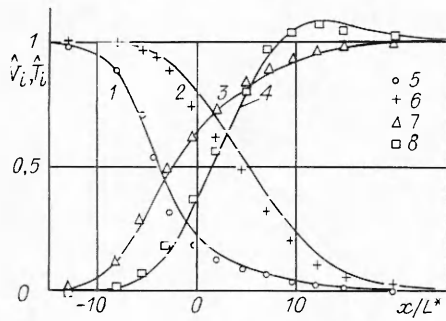


Рис. 4

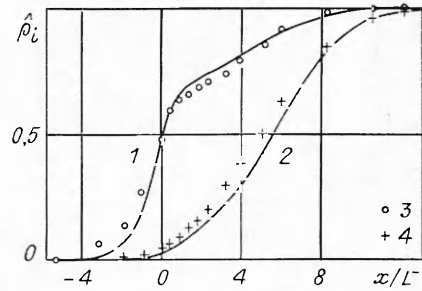
На рис. 1, а, б приведены расчетные и экспериментальные результаты по Δ и Δ_{Ar}/Δ_{He} при $M_0 \approx 2$ и различных значениях концентрации Ar (1 — расчет, 2 — эксперимент [11]). Видно, что расчеты удовлетворительно описывают экспериментальные данные во всей области концентраций. Здесь же показано аналитическое решение для толщины слабой UV [4] (линия). Видно, что оно, хотя и получено при $M_0 \rightarrow 1$, может быть использовано для определения толщины UV в диапазоне значений M_0 вплоть до 2. Отметим, что с некоторого значения $x_{Ar}\Delta_{Ar} < \Delta_{He}$. Однако приведенные ниже графики парциальных плотностей ρ_i в UV показывают, что ширина переходного слоя (если ее определить по Тейлору как расстояние между точками, в которых соответственно $(\rho_i - \rho_i^0)/(\rho_i^1 - \rho_i^0) = 0,05$ и $(\rho_i^1 - \rho_i)/(\rho_i^1 - \rho_i^0) = 0,05$) для тяжелого компонента всегда больше ширины для легкого компонента. Данное противоречие указывает на ограниченность формулы Прандтля для определения толщины UV в смесях.

На рис. 2—5 представлены профили парциальных плотностей, скоростей и температур в UV, определяемых в виде $\bar{V}_i = (\bar{u}_i - \bar{u}^1)/(\bar{u}^0 - \bar{u}^1)$, $\bar{T}_i = (\bar{T}_i - 1)/(\bar{T}^1 - 1)$, $\bar{\rho}_i = (\bar{\rho}_i - 1)/(\bar{\rho}^1 - 1)$ ($\bar{\rho}^1 = \bar{u}^0/\bar{u}^1$). Начало отсчета выбрано в точке, где числовая плотность смеси изменялась наполовину от своего изменения в UV, т. е. $x_{11}^0\bar{\rho}_1 + x_{22}^0\bar{\rho}_2 = 0,5$ при $x = 0$. Результаты настоящей работы приведены сплошными линиями. Здесь же сравниваются результаты расчетов в смеси He — Ar с данными экспериментов и численного моделирования кинетических уравнений.

Вначале расчеты проведены при $M_0 < 2$ и умеренных концентрациях Ar ($M_0 = 1,58$, 11 % Ar на рис. 2), когда заведомо работают уравнения сплошной среды. Видно убедительное совпадение с экспериментальными



Р и с. 5



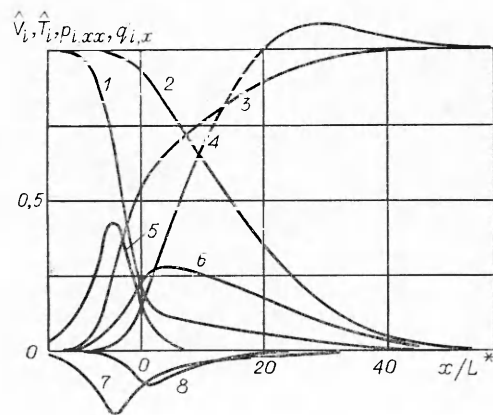
Р и с. 6

[12] и расчетными [13] данными (1, 5, 9 — \bar{V}_{He} , 2, 6, 10 — \bar{V}_{Ar} , 3, 7, 11 — \bar{T}_{He} , 4, 8, 12 — \bar{T}_{Ar} , 5—8 — эксперимент [12], 9—12 — расчет, метод Монте-Карло для БГК-модели [13]). Эффекты «разделения» компонентов смеси по скоростям и температурам начинают проявляться с $M_0 \approx 2$ и особенно при малой концентрации тяжелого газа (рис. 3, $M_0 = 2,07$, 2,2 % Ar, 1, 3, 5 — $\bar{\rho}_{\text{He}}$, 2, 4, 6 — $\bar{\rho}_{\text{Ar}}$, 3, 4 — расчет на основе уравнений Навье — Стокса [14], 5, 6 — эксперимент [11], 7 — \bar{T}_{He} , 8 — \bar{T}_{Ar}). Решение уравнений Навье — Стокса приводит к немонотонному профилю плотности тяжелого компонента [14]. Как уже отмечалось в литературе, такой профиль, означающий согласно соотношению $\rho_i u_i = C_i = \text{const}$ ускорение тяжелого газа на начальном участке УВ и последующее торможение, не имеет физического объяснения и противоречит экспериментальным данным [11]. Решение же по модели (1.1), (1.2) согласуется с экспериментом.

Для чисел Маха, близких к 2, расчеты при умеренных (13 %) и больших (48 %) концентрациях Ar приводят к более полному совпадению с экспериментом. Кроме того, при 48 % Ar, когда реализуются условия односкоростного однотемпературного описания смеси, уравнения (1.1) с (1.2) и уравнения Навье — Стокса дают совпадающие результаты почти на всей ширине УВ (рис. 4, $M_0 = 2,24$, 1, 3, 5 — $\bar{\rho}_{\text{He}}$, 2, 4, 6 — $\bar{\rho}_{\text{Ar}}$, 3—6 — эксперимент [11, 15], 7 — расчет, уравнения Навье — Стокса [14]).

Отметим, что даже при $M_0 = 3$ имеет место хорошее совпадение с результатами численного решения БГК-модели уравнения Больцмана [16] (рис. 5, 10 % Ar, 1, 5 — \bar{V}_{He} , 2, 6 — \bar{V}_{Ar} , 3, 7 — \bar{T}_{He} , 4, 8 — \bar{T}_{Ar} , 5—8 — БГК-модель).

Аналогичные расчеты выполнены в смеси He — Xe, где можно ожидать, что эффекты, обусловленные разницей в массах молекул ($\epsilon \approx 3 \cdot 10^{-2}$), проявятся еще сильнее.



Р и с. 7

Результаты в случае $M_0 = 3,89$ и 3 % Xe представлены на рис. 6, 7. Данные по плотностям достаточно близки к полученным методом Монте-Карло [17] (рис. 6, 1, 3 — $\bar{\rho}_{\text{He}}$, 2, 4 — $\bar{\rho}_{\text{Ar}}$, 3, 4 — [17]). На рис. 7 показаны профили парциальных скоростей и температур (1 — \bar{V}_{He} , 2 — \bar{V}_{Xe} , 3 — \bar{T}_{He} , 4 — \bar{T}_{Xe}).

Из приведенных результатов можно установить некоторые особенности структуры УВ в смесях газов с большой разницей в массах молекул. Из графиков видно,

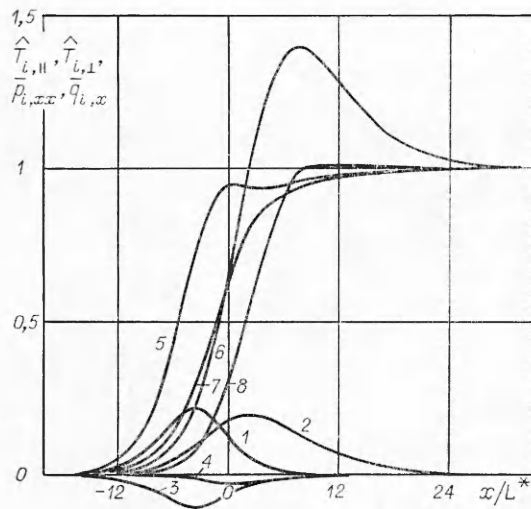
что в УВ возникают значительные разность скоростей и разность температур компонентов смеси $((u_2 - u_1) \sim u_i, |T_1 - T_2| \sim T_i)$, что говорит о правомерности использования двухскоростных двухтемпературных уравнений.

В [16, 18] на основе численного моделирования кинетических уравнений обнаружен немонотонный профиль температуры тяжелого компонента смеси при его малом содержании. Температура тяжелого газа возрастает до некоторого значения, превышающего равновесную температуру за УВ, а затем убывает, стремясь к последней. Наши расчеты также подтверждают наличие данной немонотонности. В частности, сравнение с результатами [16] показывает совпадение величины и положения температурного пика (см. рис. 5). С помощью детальных расчетов установлена зависимость температурного пика от концентрации, M_0 и отношения молекулярных масс ϵ . Он убывает при увеличении концентрации тяжелого газа перед УВ и при фиксированном значении концентрации возрастает с ростом M_0 . Из сравнения результатов расчетов для смесей He — Ar и He — Xe следует, что при уменьшении ϵ при фиксированном значении концентрации тяжелого газа x_2 температурный пик уменьшается. Его максимальное значение смещается в область меньших значений концентраций газа. При фиксированной массовой концентрации максимальное значение температуры тяжелого компонента растет при увеличении как M_0 , так и m_2/m_1 , что качественно согласуется с [19].

Приведем некоторые соображения для выявления механизма образования температурного пика. В стационарной УВ скорость тяжелого компонента (в силу большей инерции его молекул) всегда превосходит скорость легкого. Более резкое торможение легкого компонента приводит, с одной стороны, к возрастанию его температуры, которая на начальном участке УВ всегда больше температуры тяжелого газа, а с другой — к обогащению смеси легким газом. В результате обогащения смеси легким газом увеличивается энергоподвод к тяжелому газу за счет работы силы межкомпонентного взаимодействия F_{ij} . Действительно, как вытекает из уравнений энергии системы (1.1), такой энергоподвод в расчете на одну молекулу равен $\beta_2 F_{12} u_{12} / n_2$ в тяжелом газе и $\beta_1 F_{12} u_{12} / n_1$ в легком. Их отношение $\beta_2 n_1 / \beta_1 n_2 \sim m_1 n_1 / m_2 n_2 = \rho_1 / \rho_2$. Если концентрация тяжелого газа перед волной мала, так что $\rho_2^i \ll \rho_1^0$, то внутри волны $\rho_1 / \rho_2 = \rho_1^0 u_2 / \rho_2^0 u_1 \gg 1$. Кроме того, при достаточном продвижении внутрь ударного слоя, где $|\nabla u_2| \gg |\nabla u_1|$, диссипация энергии из-за вязкости происходит в основном в тяжелом газе. Вследствие этих факторов, а также теплообмена из-за разности температур происходит интенсивный рост температуры тяжелого газа. Это может привести к тому, что она превысит равновесную температуру за УВ. Основной вклад в формирование температурного пика вносит работа силы межкомпонентного взаимодействия. Как показано в [20], этот пик сохраняется и при стремлении коэффициентов вязкости к нулю.

Другой характерной особенностью структуры УВ при малой концентрации тяжелого компонента является то, что имеет место четко выраженный зона ударного перехода, в которой резко меняются параметры легкого компонента, а параметры тяжелого практически постоянны, и зона релаксации, в которой смесь приходит в равновесное состояние за УВ (см. рис. 6, 7).

На рис. 7, 8 представлены графики отношений тензора вязких напряжений $p_{i,xx}$ к давлению и теплового потока $q_{i,x}$ к конвективному потоку тепла в каждом компоненте смеси: $\bar{p}_{i,xx} = p_{i,xx} / p_i$, $\bar{q}_{i,x} = q_{i,x} / (\rho_i c_{pi} T_i u_i)$ ($c_{pi} = 5R_i/2$). Они, с одной стороны, дают определенную информацию о поведении $p_{i,xx}$ и $q_{i,x}$ в УВ, с другой — позволяют определить область применимости по числу Маха уравнений (1.1) с (1.2). Фактически $\bar{p}_{i,xx}$ и $\bar{q}_{i,x}$ есть отношение навье-стоксовских поправок в тензоре напряжений и тепловом потоке к соответствующим эйлеровским членам и поэтому должны оставаться малыми величинами порядка



Р и с. 8

числа Кнудсена. В смеси He — Ar они не превышают 0,2 при $M_0 = 2,07$ (рис. 8, где 2,2 % Ar, 1 — $\bar{p}_{\text{He},xx}$, 2 — $\bar{p}_{\text{Ar},xx}$, 3 — $q_{\text{He},x}$, 4 — $q_{\text{Ar},x}$), но достигают значения 0,63 при $M_0 = 4$, а в смеси He — Xe при $M_0 = 3,89$ достигают 0,4 (см. рис. 7, где 5 — $\bar{p}_{\text{He},xx}$, 6 — $\bar{p}_{\text{Xe},xx}$, 7 — $q_{\text{He},x}$, 8 — $q_{\text{Xe},x}$). Эти данные указывают на то, что в смеси He — Ar уравнения при $M_0 = 4$ явно неприменимы, а в смеси He — Xe $M_0 = 3,5$ — верхний предел.

Представляет интерес вопрос о величине анизотропии парциальных температур $(\bar{T}_{i,\parallel} - \bar{T}_{i,\perp})/\bar{T}_i$ в УВ, где продольная и перпендикулярная составляющие температур определяются с помощью соотношений

$$\bar{T}_{i,\parallel} = T_{i,\parallel}/T_i = 1 + \bar{p}_{i,xx}/2, \quad \bar{T}_{i,\perp} = T_{i,\perp}/T_i = 1 - \bar{p}_{i,xx}/2.$$

(Такое определение $\bar{T}_{i,\parallel}$ и $\bar{T}_{i,\perp}$ не является строгим, но оно дает качественное описание и позволяет приближенно найти условия, когда их надо вводить. При строгом подходе следовало бы ввести продольные и перпендикулярные температуры еще при асимптотическом решении уравнений Больцмана и выводе газодинамических уравнений.) Отсюда анизотропия равна $(\bar{T}_{i,\parallel} - \bar{T}_{i,\perp}) = \bar{p}_{i,xx}$ и мала в области применимости исходных уравнений. На рис. 8 представлены графики $\bar{T}_{i,\parallel}$, $\bar{T}_{i,\perp}$ (5 — $\bar{T}_{\text{He},\parallel}$, 6 — $\bar{T}_{\text{Ar},\parallel}$, 7 — $\bar{T}_{\text{He},\perp}$, 8 — $\bar{T}_{\text{Ar},\perp}$). Здесь большие отличия продольных температур от перпендикулярных обусловлены выбором $\bar{T}_{i,\parallel(\perp)}$ вместо $\bar{T}_{i,\parallel(\perp)}$. Температурный пик появляется на продольной составляющей температуры тяжелого компонента смеси.

Из проведенных расчетов и сравнения результатов с имеющимися данными экспериментов и расчетов по кинетическим уравнениям следует, что уравнения двухскоростной двухтемпературной газодинамики (1.1), (1.2) применимы к описанию структуры УВ в газовых смесях в диапазоне чисел Маха до 3,5 и в широкой области концентраций тяжелого компонента смеси (от 1 до 50 %).

ЛИТЕРАТУРА

1. Руев Г. А., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш. Структура ударной волны в двухскоростной и двухтемпературной смеси вязких теплопроводных газов // ЧММСС.— 1986.— Т. 17, № 2.
2. Струминский В. В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ.— 1974.— Т. 38, № 2.
3. Струминский В. В., Шавалиев М. Ш. Явления переноса в многоскоростных и многотемпературных смесях газов // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 1.
4. Руев Г. А., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш. Распространение звука и структура ударной волны в двухскоростной и двухтемпературной смеси газов // Численные и аналитические методы в динамике разреженных газов: Тр. VIII Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов.— М.: МАИ, 1986.
5. Курочкин В. И., Маркеев Б. М. К вопросу об уравнениях переноса для многокомпонентной газовой смеси // ЖТФ.— 1979.— Т. 49, № 8.
6. Великодный В. Ю. Уравнения движения газовой смеси при конечных числах Кнудсена // Тр. VI конф. молодых ученых, Москва, 1981.— Деп. в ВИНТИ 2.07.81, № 3278—81.
7. Гиршфельдер Дж., Кэртисс У., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
8. Берд Г. Молекулярная газовая динамика.— М.: Мир, 1981.

9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов.— М.: ИЛ, 1960.
10. Kestin J., Khalita H. E., Wakeham W. A. The viscosity and diffusion coefficients of the binary mixtures of xenon with other noble gases // Physica.— 1978.— V. 90A, N 2.
11. Center R. E. Measurement of shock-wave structure in helium — argon mixtures // Phys. Fluids.— 1967.— V. 10, N 8.
12. Harnett L. N., Muntz E. P. Experimental investigation of normal shock wave velocity distribution functions in mixtures of argon and helium // Phys. Fluids.— 1972.— V. 15, N 4.
13. Григорьев Ю. Н., Иванов М. С. Метод Монте-Карло и структура ударной волны для бинарной смеси газов // ЧММСС.— 1977.— Т. 8, № 6.
14. Sherman F. S. Shock-wave structure in binary mixtures of chemically inert perfect gases // J. Fluid Mech.— 1960.— V. 8, pt 3.
15. Бочкарев А. А., Ребров А. К., Тимошенко Н. И. Структура ударной волны в смеси Ar—He // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1976.— № 3, вып. 1.
16. Abe K., Oguchi H. Shock wave structure in binary gas mixtures // Rarefied Gas Dynamics.— N. Y.; L.: Acad. Press, 1969.— V. 1.
17. Schmidt B., Seiler F., Worner M. Shock structure near a wall in pure inert gas and in binary inert-gas mixtures // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 143.— P. 305.
18. Bird G. A. The structure of normal shock waves in a binary gas mixture // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 31, N 4.
19. Bird G. A. Shock wave structure in gas mixtures // Rarefied Gas Dynamics.— То-куо: University of Tokyo Press, 1984.— V. 1.
20. Руев Г. А., Фомин В. М. Структура ударной волны в бинарной смеси вязких га-зов // ПМТФ.— 1984.— № 5.

г. Новосибирск

Поступила 30/XI 1987 г.,
в окончательном варианте —
17/II 1988 г.

УДК 534.222.2+539.375

С. П. Киселев, В. М. Фомин

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛЕТА ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ РАЗРУШЕНИЯ И ИСТЕЧЕНИЯ ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ МЕЖДУ ОСКОЛКАМИ

Теоретическому изучению разлета оболочки под действием продуктов детонации посвящено большое число работ [1—13]. Несмотря на это, вопрос о влиянии разрушения на максимальную скорость оболочки до сих пор остается невыясненным. В данной работе предложена математическая модель, учитывающая разрушение и истечение продуктов детонации между осколками. Показано, что при осевой детонации учет разрушения приводит к уменьшению максимальной скорости оболочки на 20—30 % по сравнению со случаем без разрушения.

1. Рассмотрим цилиндрическую оболочку с внутренним радиусом a^0 , внешним b^0 и толщиной H . Внутри оболочки находится заряд взрывчатого вещества, вне оболочки — воздух. После выхода детонационной волны на внешнюю поверхность оболочки она начинает быстро расширяться. В оболочке и продуктах детонации (ПД) наблюдается сложная ударно-волновая картина, условно изображенная на рис. 1 ломаными линиями. Здесь область D_1 занимают ПД, D_2 — сплошная оболочка, D_3 — разрушенная оболочка, D_4 — воздух, Γ_1 — границы разрушенной оболочки, на которых имеет место комбинированный разрыв (КР), Γ_2 — контактный разрыв ПД — воздух, Γ_3 — ударная волна в воздухе. До разрушения оболочка описывается уравнениями идеальной упругопластической среды [14]

$$(1. \quad \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = - \frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial S_2}{\partial r} + (k-1) \frac{(S_1 - S_2)}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u_2,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} + (k-1) \frac{\rho_2 u_2}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{p_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \left(S_1 \frac{\partial u_2}{\partial r} + (k-1) S_2 \frac{u_2}{r} \right) / \rho_2 = 0,$$

$$p_2 = (\gamma_2 - 1) \rho_2 \varepsilon_2 + c_0^2 (\rho_2 - \rho_2^0),$$