

6. Johnston J. P. The suppression of shear layer turbulence in rotating systems.— Trans. ASME. J. Fluid Engng, 1973, vol. I 95, N 2. Рус. пер. Джонстон. Подавление турбулентности в течениях со сдвигом во вращающихся системах.— Теор. основы инж. расчетов, 1973, т. 95, № 2.
7. Johnston J. P., Eide S. A. Turbulent boundary layer on centrifugal compressor blades: prediction of the effects of surface curvature and rotation.— Trans. ASME. J. Fluid Engng, 1976, vol. I 98, N 3. Рус. пер. Джонстон, Эйд. Турбулентный пограничный слой на лопатках центробежного компрессора. Расчет эффектов кривизны поверхности и вращения.— Теор. основы инж. расчетов, 1976, т. 98, № 3.
8. Wattendorf F. H. A study of curvature on fully developed flow.— Proc. Roy. Soc., 1935, ser. A, vol. 148, p. 565.
9. Устименко Б. П. Процессы турбулентного переноса во вращающихся течениях. Алма-Ата: Наука, 1977.
10. Shivaprasad B. G., Ramaprian B. R. Turbulence measurements in boundary layers along mildly curved surfaces.— Trans. ASME. J. Fluid Engng, 1978, vol. I 100, N 1. Рус. пер. Шивапраasad, Рамприан. Измерения турбулентности в пограничных слоях на умеренно искривленных поверхностях.— Теор. основы инж. расчетов, 1978, т. 100, № 1.
11. Волчков Э. П., Снотарь С. Ю., Терехов В. П. Турбулентный теплообмен в начальном участке трубы при закрутке потока. Теплообмен-VI.— В кн.: Материалы VI Всесоюз. конф. по теплообмену. Т. 1, ч. 3. Минск, 1980.
12. So R. M. C. Momentum integral for curved shear layers.— Trans. ASME. J. Fluid Engng, 1975, vol. I 97, N 2. Рус. пер. Интегральное уравнение импульсов для пограничного слоя на искривленной поверхности.— Теор. основы инж. расчетов, 1975, т. 97, № 2.
13. Corino E. R., Brodkey R. S. A visual investigation of the wall region in turbulent flow.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, N 1. Рус. пер. Корино Е. Р., Бродки Р. С. Визуальное исследование пристеночной области в турбулентном течении.— Сб. пер. Механика, 1971, № 1.
14. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. П. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия, 1972.
15. Щукин А. В. Турбулентный пограничный слой на криволинейной поверхности.— Изв. вузов. Авиад. техн., 1978, № 3.

УДК 533.6.011.8

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗА В СОПЛАХ С УЧАСТКОМ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ ГОРЛА

В. А. Сальников  
(Москва)

1. Численному исследованию неравновесных течений в соплах посвящено большое число работ. Подробную библиографию по этому направлению можно найти в [1—3]. Дополнительно укажем опубликованные в последнее время работы [4—11] по расчету двумерных течений смеси газов в соплах с релаксацией колебательной энергии. Вместе с тем следует отметить, что среди большого числа публикаций, посвященных данному вопросу, можно назвать относительно небольшой круг работ [6—11], в которых исследовались до-, транс- и сверхзвуковые течения колебательно-релаксирующего газа в окрестности минимального сечения сужающихся — расширяющихся сопел. Однако именно здесь, в области больших отрицательных градиентов температуры и давления, при прохождении потока через скорость звука происходят физико-химические превращения, которые во многом определяют характер процессов в сверхзвуковой части сопла.

Заметим, что в [6—10] рассматривались течения в соплах, минимальные сечения которых образованы плавносопрягающимися дугами окружностей или гладкими кривыми. Было показано, что отрыв колебательных температур от поступательной температуры газовой смеси наступает в трансзвуковой области течения до критического сечения и развивается вниз по потоку в сверхзвуковой части сопла.

Однако в последнее время широкое применение нашли сопла с высотой (диаметром) критического сечения  $h_* = 0.4 - 1.0$  мм, имеющие, как правило, в области горла участок постоянной высоты. В [11] при расчете течения колебательно-релаксирующего газа в таком сопле с участком постоянного сечения в горле длиной  $l_{II} = 0.6(l_{II} = L_{II}/(h_*/2))$ ,  $L_{II}$  — длина участка постоянного сечения) отмечен продольный положительный градиент давления на стенке в горле. В [12] представлены результаты экспериментального исследования газодинамической структуры потока в области горла сверхзвукового сопла при  $l_{II} = 1.0$ . Позже (в продолжение работы [12]) Р. К. Тагировым были проведены расчеты течений вязкого и нестеплопроводного совершен-

ного газа в сужающихся — расширяющихся соплах при  $l_{II} = 0,4-2,0$ , выполненные по методу С. К. Годунова первого порядка точности, которые показали удовлетворительное совпадение с экспериментом [12].

Однако для тщательного анализа особенностей течения в областях незначительной протяженности (особенно в окрестности минимального сечения сопла Лавала) целесообразно применение более точных методов определения газодинамической и термодинамической структуры потока. Кроме того, использование разностных схем повышенного порядка точности позволяет получать надежные результаты на более грубых сетках, чем в случае применения схем пониженного порядка аппроксимации. При этом можно добиться существенного снижения необходимых затрат машинного времени, которое требуется на расчет каждого варианта.

В данной работе представлены результаты численного исследования стационарного двумерного смешанного, до- и сверхзвукового, течения вязкого и нетеплопроводного колебательно-релаксирующего газа в плоских сужающихся — расширяющихся соплах с участком постоянного сечения в области горла. Результаты получены при совместном решении уравнений газовой динамики и релаксационной кинетики на основе метода установления, разработанного в [13] для решения прямой задачи о течении газа в сопле Лавала при наличии неравновесных физико-химических процессов, с использованием высокоточной разностной схемы [14].

2. Рассматривается смешанное, до- и сверхзвуковое, плоское или осесимметричное неравновесное течение в сужающемся — расширяющемся сопле релаксирующей смеси газов, имеющей в ресивере температуру и давление торможения  $T_0, p_0$ . Предполагается, что в среде протекают необратимые физико-химические процессы, которые характеризуются изменением  $N$  безразмерных параметров  $q_n, n = 1, 2, \dots, N$ . Вместе с давлением  $p$  и плотностью  $\rho$  эти параметры определяют неравновесное состояние среды.

Полная система нестационарных двумерных дивергентных уравнений, описывающая плоское ( $v = 0$ ) или осесимметричное ( $v = 1$ ) течение вязкого и нетеплопроводного газа при наличии неравновесных физико-химических процессов, записывается в векторном виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{g},$$

где  $\mathbf{f}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ , и  $\mathbf{g}$  — вектор-столбцы:

$$(2.2) \quad \mathbf{f} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ 2e + w^2 \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho u(2i + w^2) \\ \rho u q_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho v(2i + w^2) \\ \rho v q_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = - \begin{pmatrix} \nu \rho v / y \\ \nu \rho v u / y \\ \nu \rho v^2 / y \\ \nu \rho v(2i + w^2) / y \\ \nu \rho v q_n / y - \rho \Phi_n \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости  $w$  на оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат;  $p$  — давление;  $e$  — удельная внутренняя энергия;  $i$  — удельная энтальпия;  $\Phi_n$  — известные функции  $p, \rho, q$ . Рассматриваемая система дифференциальных уравнений (2.1), (2.2) замыкается калорическим уравнением состояния

$$(2.3) \quad i = i(p, \rho, q).$$

Искомые функции на входе сопла доопределяются с учетом заданных значений полной энтальпии и энтропии, причем полагается  $v \equiv 0, \partial u / \partial x \equiv 0$ . Граничные условия на стенках сопла задаются из условия непротекания. Значения искомых функций на выходе, в сверхзвуковой части сопла, находятся с помощью линейной экстраполяции.

Все необходимые сведения об использованном методе численного решения прямой задачи о неравновесном течении газа в сопле Лавала содержатся в [13, 14].

Подчеркнем дополнительно то обстоятельство, что уравнения неравновесной кинетики относятся к типу так называемых «жестких» уравнений или уравнений с малым параметром при старшей производной. Решение уравнений подобного типа методами, широко распространенными в газовой динамике, не позволяет вести интегрирование с шагом по времени  $\tau$ , заметно превышающим характерное время протекания физико-химических процессов (время колебательной релаксации). Это приводит к существенным затратам машинного времени.

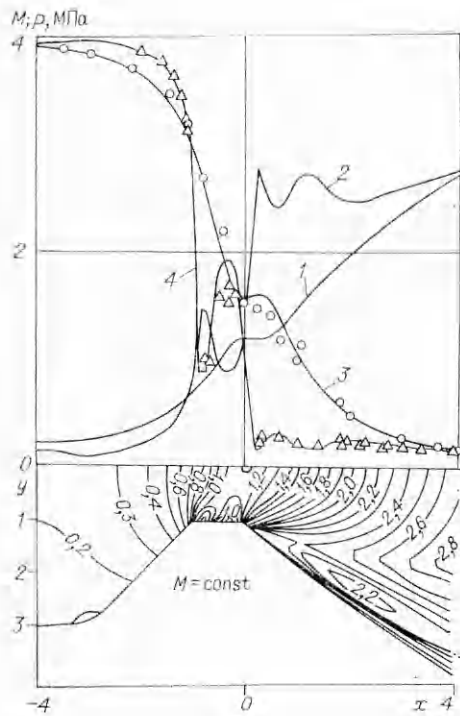
Для увеличения допустимого шага численного интегрирования  $\tau$  в настоящей работе применялся метод, предложенный в [15, 16] и состоящий в разложении источниковых членов  $\Phi_n$  в ряд по  $q_n$  до производных первого порядка включительно. Данный метод позволил увеличить шаг  $\tau$  до величины, определяемой из условия устойчивости разностной схемы [14], и существенно сократить требуемые затраты машинного времени. С целью уменьшения времени расчета каждого варианта начальные распределения параметров вдоль сопла задавались из решения рассматриваемой задачи в одномерном стационарном приближении.

3. Ниже представлены результаты расчетов стационарного двумерного смешанного течения колебательно-релаксирующей смеси газов 10%  $\text{CO}_2 + 88\% \text{N}_2 + 2\% \text{H}_2\text{O}$  в плоских сужающихся — расширяющихся соплах, имеющих в области горла участок постоянной высоты и две точки излома контура в начале и в конце участка постоянного сечения. При расчетах угловые точки заменяются дугами окружностей достаточно малого радиуса  $r = 0,3$ . Все линейные размеры приведены в безразмерном виде. За характерный линейный масштаб выбирается полувисота критического сечения  $h_*/2$ . Сопла имеют одинаковую высоту критического сечения  $h_* = 0,4$  мм, но отличаются между собой длиной участка постоянного сечения в области горла  $l_n = 1; 2; 4$ . Дозвуковая часть сопел имеет клиновидный вход с полным углом раскрытия  $90^\circ$ , сверхзвуковая часть спрфилирована на степень расширения 28. Температуру и давление торможения смеси в ресивере сопла полагают равными  $T_0 = 1800$  К,  $p_0 = 4$  МПа.

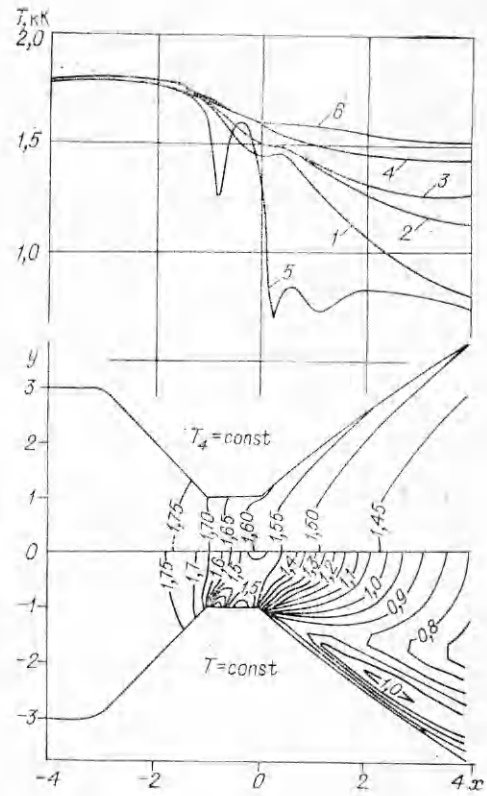
В качестве неравновесных параметров, характеризующих колебательное состояние среды, выбираются средние числа колебательных квантов в расчете на один тип колебаний молекулы (без вырождения) —  $q_n = [\exp(\Theta_n/T_n) - 1]^{-1}$  ( $\Theta_n$  и  $T_n$  — характеристическая и неравновесная колебательные температуры  $n$ -го типа колебаний,  $n = 1; 2; 3; 4$ ), представляющие безразмерные выражения колебательных энергий соответствующих типов колебаний, причем  $q_1, q_2, q_3$  отвечают соответственно трем типам колебаний молекулы  $\text{CO}_2$  и  $q_4$  — колебаниям молекулы  $\text{N}_2$ . Уравнение колебательной релаксации в системе (2.1), (2.2) и калорическое уравнение состояния (2.3) записываются в виде, приведенном в [2], отсюда же взяты времена  $V-T$ - и константы  $V-V$ - и  $V-V'$ -обмена.

На фиг. 1, 2 представлены результаты расчета течения рассматриваемой колебательно-релаксирующей смеси газов в плоском сужающемся — расширяющемся сопле, имеющем в окрестности критического сечения участок постоянной высоты длиной  $l_n = 1$ . На фиг. 1 в изолиниях  $M = \text{const}$  показано поле чисел Маха. Кривыми 1, 2 соответственно показано изменение числа  $M$  по оси и стенке. Там же с учетом того, что в области минимального сечения сопла отклонение от равновесия рассматриваемой трехкомпонентной смеси газов незначительно и мало влияет на газодинамику потока, при равных показателях адиабаты проведено сравнение изменения давления  $p$  по оси и стенке (кривые 3, 4 соответственно) с экспериментом [12].

На фиг. 2 в изолиниях  $T_n = \text{const}$  показаны поля поступательной температуры смеси  $T$  (нижняя полуплоскость сопла) и колебательной температуры азота  $T_4$  (верхняя полуплоскость); показано изменение по оси поступательной температуры  $T$  (кривая 1), колебательных температур дважды вырожденного симметричного деформационного  $T_2$  и антисимметричного валентного  $T_3$  типов колебаний молекулы  $\text{CO}_2$  (кривые 2, 3) и ко-



Ф и г. 1

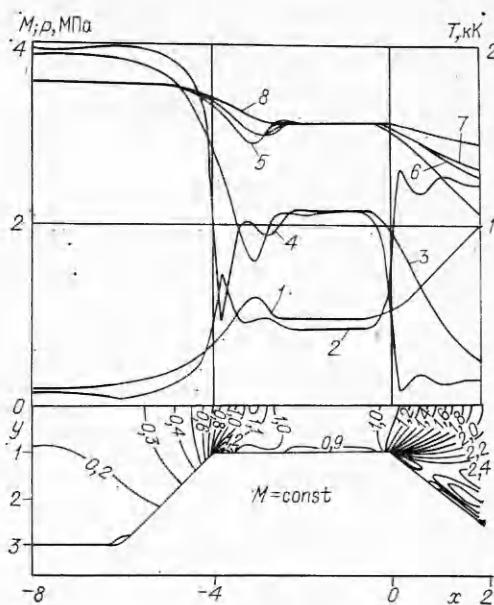
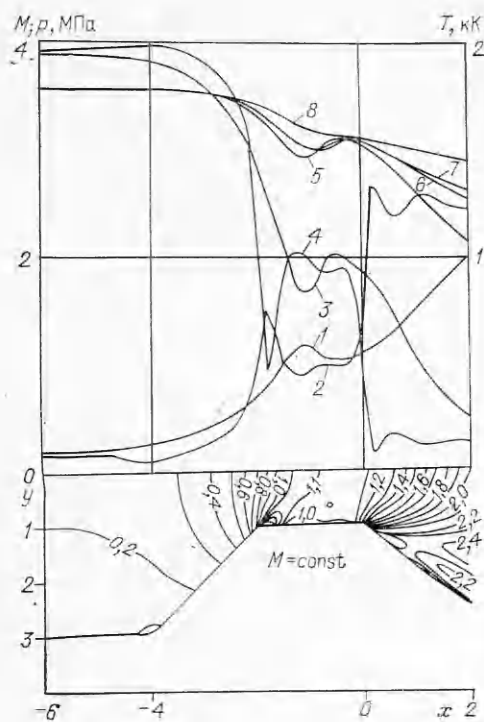


Ф и г. 2

лебательной температуры азота  $T_4$  (кривая 4). Кривыми 5, 6 показано изменение поступательной  $T$  и колебательной  $T_4$  температур на стенке соответственно.

Анализ результатов, представленных на фиг. 1, 2, показывает, что обтекание угловых точек, расположенных в начале участка постоянного сечения, сопровождается перерасширением потока до сверхзвуковой скорости с последующим торможением в скачках уплотнения. При  $l_{\text{п}} = 1$  скачок, возникающий за угловой точкой в начале участка постоянного сечения, достигает оси сопла в окрестности выхода из горла и здесь ослабевает, размывается волной разрежения, образующейся при обтекании угловой точки, расположенной в конце участка постоянного сечения. При этом на участке сверхзвукового перерасширения потока происходит отрыв колебательной температуры азота от колебательных температур  $\text{CO}_2$  и последних от поступательной температуры смеси, т. е. происходит процесс замораживания энергии колебательных степеней свободы в молекулах азота и  $\text{CO}_2$ . Однако далее прохождение потока через скачок уплотнения сопровождается увеличением поступательной температуры смеси и интенсивным процессом релаксации колебательной энергии в горле сопла. Смесь стремится к равновесию по поступательно-вращательным и колебательным степеням свободы, но не достигает его. При этом течение за скачком уплотнения остается сверхзвуковым и только у стенки образуется небольшая зона дозвукового течения. Дальнейший отрыв колебательных температур азота и  $\text{CO}_2$  от поступательной температуры смеси и между собой происходит в сверхзвуковой части сопла.

С увеличением длины участка постоянного сечения картина течения изменяется. На фиг. 3 аналогично фиг. 1 для сопла с  $l_{\text{п}} = 2$  в изолиниях  $M = \text{const}$  представлено поле чисел Маха и кривыми 1—4 показано изменение вдоль сопла числа  $M$  и давления  $p$  на оси и стенке. Дополнительно кривыми 5—8 показано изменение по оси поступательной  $T$  и колебательных  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$  температур соответственно.



Ф и г. 4

Ф и г. 3

Видно, что при  $l_n = 2$  скачок уплотнения, образовавшийся за угловой точкой, расположенной в начале участка постоянного сечения, достигает противоположной стенки на выходе из горла. При этом несколько возрастают интенсивность скачка уплотнения и потери колебательной энергии в горле, увеличивается зона дозвукового течения у стенки. Однако в ядре потока течение по-прежнему остается сверхзвуковым и отрыв колебательной температуры азота от поступательной температуры смеси и колебательных температур  $\text{CO}_2$  сохраняется.

При дальнейшем увеличении  $l_n$  картина течения качественно изменяется. На фиг. 4 представлены результаты расчета течения рассматриваемой колебательно-релаксирующей смеси газов в сопле с  $l_n = 4$ . Аналогично фиг. 3 показано поле чисел Маха, изменение  $M$  и  $p$  на оси и стенке, изменение  $T$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$  на оси. Заметим, что при  $l_n = 4$  течение за скачками уплотнения становится дозвуковым и снова переходит через скорость звука при обтекании угловых точек, расположенных в конце участка постоянного сечения. При этом образовавшийся при обтекании угловых точек в начале горла отрыв колебательных температур от поступательной температуры газовой смеси не развивается вниз по потоку, как это имеет место в соплах, окрестность критического сечения которых образована плавносопрягающимися кривыми, а исчезает при прохождении потока через скачки уплотнения и при течении в горле. Система приходит в равновесие, но уже на более низком уровне температуры и снова выходит из него в сверхзвуковой части сопла.

Таким образом, при  $l_n > 2$  происходит полная потеря колебательной энергии, запасенной в дозвуковой части сопла.

Автор глубоко признателен М. Я. Иванову, А. Н. Крайко, Ю. В. Курочкину и Р. К. Тагирову за полезные обсуждения и внимание к работе.

Поступила 17 V 1983

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хайлов В. М. Химическая релаксация в соплах реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1975.
2. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. М.: Наука, 1977.
3. Андерсон Дж. Газодинамические лазеры. М.: Мир, 1979.

4. Иванов М. Я., Смагин И. П. К расчету двумерных сверхзвуковых течений при наличии физико-химических процессов.— ЧММСС, 1978, т. 9, № 6.
5. Курочкин Ю. В., Смагин И. П. Численное исследование двумерного распределения инверсной населенности и показателя усиления при сверхзвуковом расширении смеси  $\text{CO}_2\text{—N}_2\text{—He}$ .— Квант. электроника, 1979, т. 6, № 6.
6. Колмогоров В. Ф. Численное решение обратной задачи теории сопла Лавалья применительно к двумерным неравновесным течениям совершенного газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2.
7. Бреев В. В., Минин С. Н. и др. Течение смеси газов с релаксацией колебательной энергии в плоских и осесимметричных соплах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5.
8. Дрегалли А. Ф., Жукова И. К. К расчету двумерных энергетически неравновесных течений.— В кн.: Газодинамика двигателей летательных аппаратов. Вып. 1. Казань, 1978.
9. Пинчуков В. И. Численное исследование влияния формы трансзвуковой части сопла Лавалья на течение смеси  $\text{CO}_2\text{—N}_2\text{—H}_2\text{O—He}$ .— ФГВ, 1981, т. 17, № 4.
10. Курочкин Ю. В., Сальников В. А., Смагин И. П. Численное исследование течений в соплах колебательно-неравновесной среды  $\text{CO}_2\text{—ГДЛ}$ .— Квант. электроника, 1982, т. 9, № 6.
11. Вирюков А. С., Сериков Р. И. и др. Влияние неоднородностей параметров потока на характеристики рабочих сред  $\text{CO}_2$ - и  $\text{N}_2\text{O}$ -газодинамических лазеров.— Квант. электроника, 1977, т. 4, № 4.
12. Чефанов В. М. Течение газа в области горла сверхзвукового сопла.— В кн.: Газодинамика двигателей летательных аппаратов. Вып. 1. Казань, 1978.
13. Иванов М. Я., Сальников В. А. К расчету течения газа в сопле Лавалья при наличии неравновесных физико-химических процессов.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4.
14. Иванов М. Я., Идиятуллина Ф. П. К расчету гладких стационарных течений идеального газа методом третьего порядка точности.— ЖВММФ, 1978, т. 18, № 4.
15. Крайко А. Н. К численному интегрированию уравнений с малым параметром при старшей производной.— ЖВММФ, 1969, т. 9, № 2.
16. Крайко А. И. О расчете неравновесных течений газа в соплах Лавалья.— Тр. Ин-та мех. МГУ, 1973, № 21.

УДК 517.9 + 532

## О ДЕМПФИРОВАНИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВЯЗКОГО ШАРА

*О. М. Лаврентьева*

(Новосибирск)

Изучению задачи о нормальных колебаниях вязкой капиллярной жидкости, частично или полностью ограниченной свободной поверхностью, посвящено значительное число работ. Результаты большинства из них изложены в [1]. Рассматривался, в частности, вопрос об асимптотике решений задачи при больших и малых значениях вязкости  $\nu$ , когда все остальные параметры фиксированы. В [2] показано, что для сильновязких тяжелых жидкостей в случае устойчивости скорость затухания возмущений может быть сколько угодно мала. В [1] высказано предположение, подтверждаемое рассмотрением конкретных примеров, что в случае устойчивости скорость затухания колебаний становится сколь угодно малой и при стремлении вязкости к нулю. Если это верно, то для каждой конкретной задачи найдется значение  $\nu^*$ , при котором возмущения в жидкости затухают наиболее быстро. В данной работе найдено значение  $\nu^*$  для классической задачи о нормальных колебаниях вязкого шара.

Задача о линейных колебаниях невесомого жидкого шара с учетом вязких и капиллярных сил рассматривается в сферической системе координат  $\hat{r}$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  (начало координат совпадает с центром шара).

Пусть  $R$  — радиус шара,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Удобно ввести безразмерные переменные, выбирая в качестве характерных размера, времени, скорости и давления соответственно величины  $\hat{R}$ ,  $\nu^{-1}R^2$ ,  $\nu R^{-1}$  и  $\rho\nu R^{-2}$  и обозначая через  $\hat{u}(r, \theta, \varphi, t)$ ,  $\hat{p}(r, \theta, \varphi, t)$ ,  $\hat{N}(\theta, \varphi, t)$  соответственно безразмерные вектор скорости, давление и отклонение свободной поверхности от равновесной формы по нормали к ней,  $r = \hat{r}R^{-1}$ .