

УДК 532.591:539.3:534.1

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ, ПЛАВАЮЩУЮ НА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Стурова, А. А. Коробкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mails: sturova@hydro.nsc.ru, kaa@hydro.nsc.ru

В линейной постановке методом нормальных мод исследовано воздействие внешнего периодического давления на упругую пластину, свободно плавающую на поверхности жидкости, которая предполагается идеальной и несжимаемой. Подробно изучено поведение матрицы коэффициентов гидродинамической нагрузки на пластину в зависимости от частоты. Сопоставлено поведение пластины под действием локализованной периодической нагрузки для весомой жидкости конечной и бесконечной глубины, а также невесомой жидкости бесконечной глубины.

**Ключевые слова:** плавающая упругая пластина, периодическое давление, гидродинамическая нагрузка.

**Введение.** Исследование нестационарного поведения плавающих упругих пластин под действием внешней нагрузки актуально в связи с созданием плавучих платформ больших размеров. Наиболее простым примером нестационарного воздействия на пластину является периодическое внешнее давление. Эта задача в плоской постановке исследована для балочной пластины, а в пространственном случае — для круглой пластины [1, 2]. Глубина жидкости предполагалась конечной. Используемые методы (разложение по собственным вертикальным модам [1] и метод Винера — Хопфа [2]) не позволили распространить полученные результаты во всем диапазоне частот на случай бесконечной глубины жидкости.

В данной работе применяется метод нормальных мод и для каждой моды колебаний пластины определена действующая на нее гидродинамическая нагрузка (коэффициенты присоединенной массы и демпфирования). Исследовано поведение гидродинамической нагрузки в предельных случаях низких и высоких частот колебания. Полученные результаты применены к решению задачи о воздействии внешнего периодического давления на плавающую пластину.

**1. Постановка задачи.** Пусть на поверхности бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости плавает тонкая упругая пластина в виде полосы шириной  $2L$  и бесконечной длины. Поверхность жидкости, не закрытая пластиной, является свободной. Концы пластины не закреплены, и ее осадка не учитывается. На пластину действует периодическое по времени с частотой  $\omega$  внешнее давление вида  $P(x) \exp(i\omega t)$  ( $x$  — горизонтальная координата, направленная перпендикулярно к краям пластины,  $x = 0$  соответствует средней линии пластины).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-902.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00739).

Рассматриваемая задача является плоской. Течение жидкости полагается потенциальным, а колебания пластины и жидкости — установившимися. Потенциал скоростей жидкости  $\phi(x, y, t)$  и нормальный прогиб пластины  $w(x, t)$  ищем в виде

$$\phi(x, y, t) = i\omega\Phi(x, y) \exp(i\omega t), \quad w(x, t) = W(x) \exp(i\omega t),$$

где ось  $y$  направлена вертикально вверх и на поверхности жидкости  $y = 0$ .

В рамках линейной теории волн потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \quad (|x| \leq \infty, \quad y < 0)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial y} = W(x) \quad (|x| \leq L, \quad y = 0), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \nu\Phi \quad (|x| > L, \quad y = 0), \quad \nu = \omega^2/g, \\ |\nabla\Phi| \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Нормальный прогиб пластины описывается уравнением

$$DW^{IV} - \rho_1 h_1 \omega^2 W + \rho g W - \rho \omega^2 \Phi = -P(x) \quad (|x| \leq L, \quad y = 0), \quad (1.2)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость;  $\rho_1, h_1$  — плотность и толщина пластины;  $\rho$  — плотность жидкости.

Края пластины являются свободными, что предполагает равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы

$$W'' = W''' = 0 \quad (|x| = L).$$

Штрихом помечается производная по переменной  $x$ .

Вдали от пластины следует выполнить условие излучения, означающее, что генерируемые колебаниями пластины поверхностные волны являются расходящимися

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \pm i\nu\Phi \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad (1.3)$$

Далее перейдем к безразмерным переменным (отмечены звездочкой)

$$(x_*, y_*, W_*) = \left( \frac{x, y, W}{L} \right), \quad \omega_* = \omega \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \Phi_* = \frac{\Phi}{L^2}, \quad P_* = \frac{P}{\rho g L}.$$

Ниже используются следующие безразмерные коэффициенты:

$$\delta = \frac{D}{\rho g L^4}, \quad \chi = \frac{\rho_1 h_1}{\rho L}, \quad K = \nu L.$$

**2. Метод решения.** В безразмерных переменных (звездочки далее опущены) прогиб пластины  $W(x)$  ищем в виде разложения по нормальным модам колебания балки со свободными концами в вакууме:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x), \quad (2.1)$$

где комплексные коэффициенты  $b_n$  подлежат определению, а функции  $W_n(x)$  — нетривиальные решения следующей спектральной задачи:

$$\begin{aligned} W_n^{IV} = \lambda_n^4 W_n \quad (|x| \leq 1), \\ W'_{2k} = W_{2k+1} = 0 \quad (x = 0), \quad W''_n = W_n''' = 0 \quad (|x| = 1). \end{aligned}$$

Эти решения имеют вид

$$W_0 = 1/\sqrt{2}, \quad W_{2k} = D_{2k}[\cos(\lambda_{2k}x) + S_{2k} \operatorname{ch}(\lambda_{2k}x)], \quad (2.2)$$

$$W_1 = \sqrt{3/2}x, \quad W_{2k+1} = D_{2k+1}[\sin(\lambda_{2k+1}x) + S_{2k+1} \operatorname{sh}(\lambda_{2k+1}x)] \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $S_n = \cos \lambda_n / \operatorname{ch} \lambda_n$ ,  $D_n = 1/\sqrt{1 + (-1)^n S_n^2}$ . Собственные значения  $\lambda_n$  определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_n + (-1)^n \operatorname{th} \lambda_n = 0 \quad (n > 1), \quad \lambda_0 = \lambda_1 = 0.$$

Функции  $W_n(x)$  образуют полную ортогональную систему, для которой

$$\int_{-1}^1 W_n(x)W_m(x) dx = \delta_{nm},$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера.

Используя разложение (2.1), решение для  $\Phi(x, y)$  можно искать в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x, y). \quad (2.3)$$

Подставим разложения (2.1), (2.3) в уравнение (1.2), умножим полученное соотношение на  $W_m(x)$  и проинтегрируем результат по  $x$  от  $-1$  до  $1$ . Используя свойства функций  $W_m(x)$ , получим бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов  $b_m$ :

$$[1 + \delta(\lambda_m)^4 - \chi K]b_m - K \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Psi_{nm} = -Y_m, \quad (2.4)$$

где

$$\Psi_{nm} = \int_{-1}^1 \Phi_n(x, 0)W_m(x) dx, \quad Y_m = \int_{-1}^1 P(x)W_m(x) dx. \quad (2.5)$$

Значения  $\Psi_{nm}$  отличны от нуля только в том случае, когда оба индекса  $n$  и  $m$  являются либо четными, либо нечетными. Поэтому система уравнений (2.4) распадается на две системы уравнений — отдельно для четных и нечетных значений  $m$ .

**3. Радиационная задача.** Для определения коэффициентов  $\Psi_{nm}$  в (2.5) следует найти функции  $\Phi_n(x, 0)$ , что соответствует решению так называемой радиационной задачи по терминологии гидродинамической теории качки корабля. Ранее эта задача была подробно рассмотрена в [3–6] для первых двух мод колебания пластины ( $n = 0, 1$ ), которые далее будем называть твердотельными. Эти моды соответствуют вертикальным и вращательным колебаниям твердой пластины, плавающей на поверхности жидкости.

В рассматриваемой постановке радиационная задача имеет вид

$$\Delta \Phi_n = 0 \quad (|x| \leq \infty, \quad y < 0);$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = W_n(x) \quad (|x| \leq 1, \quad y = 0); \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = K \Phi_n \quad (|x| > 1, \quad y = 0) \quad (3.2)$$

с условиями в дальнем поле, аналогичными (1.1), (1.3).

Вдали от пластины согласно условию излучения (1.3)

$$\Phi_n(x, y) \rightarrow H_n^\pm \exp [K(y \mp ix)] \quad (x \rightarrow \pm\infty),$$

где  $H_n^\pm$  — амплитуды радиационных потенциалов и в силу предположения о свойствах симметрии функций  $W_n(x)$

$$H_{2k}^- = H_{2k}^+, \quad H_{2k+1}^- = -H_{2k+1}^+ \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Далее используется метод решения радиационной задачи, описанный в [4]. Введем вспомогательные функции  $F_n(x, y)$ , определяемые соотношением

$$\frac{\partial F_n}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} - K\Phi_n.$$

Функции  $F_n(x, y)$  удовлетворяют уравнению Лапласа в области, занятой жидкостью, и следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial F_n}{\partial y} + KF_n = U_n(x) \quad (|x| \leq 1, y = 0), \quad \frac{\partial F_n}{\partial y} = 0 \quad (|x| > 1, y = 0),$$

где

$$U_n(x) = W_n(x) + K^2 \int_0^x \int_0^\xi W_n(\eta) d\eta d\xi + K(c_n + d_n x). \quad (3.4)$$

Постоянные  $c_n$  и  $d_n$  подлежат определению.

Введем функции  $f_n(x)$ , заданные на отрезке  $|x| \leq 1$  соотношением

$$f_n(x) = \left. \frac{\partial F_n}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

Функции  $f_n(x)$  определяют гидродинамическое давление, действующее на пластину. Решение для  $f_n(x)$  может быть получено из интегрального уравнения

$$f_n(x) - \frac{K}{\pi} \int_{-1}^1 f_n(\xi) \ln |x - \xi| d\xi = U_n(x) \quad (|x| \leq 1). \quad (3.5)$$

Согласно (3.4) функции  $f_n(x)$  линейно зависят от постоянных  $c_n$  и  $d_n$ , которые определяются из следующих уравнений:

$$c_n = \int_0^1 [f_n(x) + f_n(-x)] G(x) dx; \quad (3.6)$$

$$d_n = \int_0^1 [f_n(-x) - f_n(x)] G'(x) dx. \quad (3.7)$$

Здесь для функции  $G(x)$  удобно использовать представление [7]

$$G(x) = [\cos(Kx) \text{Ci}(Kx) + \sin(Kx) \text{Si}(Kx) - \ln x] / \pi - \sin(Kx) / 2 - i \cos(Kx),$$

где  $\text{Si}(\cdot)$  и  $\text{Ci}(\cdot)$  — соответственно интегральные синус и косинус.

Нетрудно показать, что  $c_{2k+1} = d_{2k} = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), так как функции  $f_n(x)$  обладают теми же свойствами четности, что и функции  $W_n(x)$ .

После решения интегрального уравнения (3.5) и определения комплексных постоянных  $c_n$  и  $d_n$  из соотношений (3.6), (3.7) функции  $f_n(x)$  становятся известными.

Искомые величины  $\Psi_{nm}$  определяются из соотношения

$$\Psi_{nm} = \frac{2}{K} \int_0^1 [W_n(x) - f_n(x)] W_m(x) dx = \frac{2}{K} \left[ \delta_{nm} - \int_0^1 f_n(x) W_m(x) dx \right]. \quad (3.8)$$

Амплитуды радиационных потенциалов в дальнем поле равны

$$H_{2k}^+ = 2i \int_0^1 f_{2k}(x) \cos(Kx) dx, \quad (3.9)$$

$$H_{2k+1}^+ = -2 \int_0^1 f_{2k+1}(x) \sin(Kx) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Величины  $\Psi_{nm}$  являются в общем случае комплексными, и по аналогии с гидродинамической теорией качки корабля представим их в виде

$$\Psi_{nm} = A_{nm} + iB_{nm}, \quad (3.10)$$

где вещественные значения  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  равносильны коэффициентам присоединенной массы и демпфирования.

Известен ряд полезных свойств этих коэффициентов:

- 1) матрица  $\Psi_{nm}$  симметричная, т. е.  $\Psi_{nm} = \Psi_{mn}$ ;
- 2) исходя из закона сохранения энергии коэффициенты демпфирования выражаются через амплитуды потенциалов в дальнем поле с учетом (3.3)

$$B_{nm} = H_m^+ \bar{H}_n^+, \quad (3.11)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение;

- 3) диагональные коэффициенты демпфирования всегда положительные

$$B_{nn} = |H_n^+|^2.$$

Значения  $\Psi_{nm}$  и  $H_n^+$  зависят от частотного параметра  $K$ . Представляет интерес исследование их поведения при  $K \rightarrow 0$  и  $K \rightarrow \infty$ .

**4. Предельные случаи низкой и высокой частоты колебания.** При  $K \rightarrow 0$  согласно граничному условию (3.2) свободная поверхность эквивалентна твердой стенке. Как известно (см., например, [3, 6]), предельное значение  $B_{00}$  в принятых обозначениях равно

$$\lim_{K \rightarrow 0} B_{00}(K) = 2.$$

Интересно отметить, что это предельное значение коэффициента демпфирования имеет место для любого плоского контура, плавающего на свободной поверхности и совершающего вертикальные колебания при условии равенства длины линии пересечения свободной поверхности ширине рассматриваемой пластины [8].

Соответствующий коэффициент присоединенной массы имеет логарифмическую особенность

$$A_{00}(K) \rightarrow 2[3/2 - \gamma - \ln(2K)]/\pi \quad (K \rightarrow 0),$$

где  $\gamma = 0,57721\dots$  — постоянная Эйлера.

Для всех других компонент матрицы коэффициентов демпфирования

$$\lim_{K \rightarrow 0} B_{nm}(K) = 0 \quad (n + m > 0),$$

а предельные значения соответствующих компонент матрицы присоединенной массы являются конечными и согласно [6] определяются соотношением

$$A_{nm}(0) = \int_{-1}^1 W_n(x) \int_{-1}^1 W_m(\xi) S(x - \xi) d\xi dx, \quad (4.1)$$

где

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(k\eta)}{k} dk.$$

Явно вычисляется значение  $A_{11}(0) = 1,5/\pi$ .

При высокой частоте колебаний ( $K \rightarrow \infty$ ) силой тяжести при решении радиационной задачи можно пренебречь, и для невесомой жидкости граничное условие (3.2) принимает вид

$$\Phi_n = 0 \quad (|x| > 1, \quad y = 0). \quad (4.2)$$

Поведение поверхностных волн при высокочастотных колебаниях пластины подробно исследовано в [5]. Показано, что амплитуды радиационных потенциалов в дальнем поле равны

$$H_n^{\pm} = i\sqrt{\pi/K} U_n^{\pm} \exp(-iK - i\pi/8) + O(K^{-1}) \quad (K \rightarrow \infty), \quad (4.3)$$

где

$$U_n^{\pm} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 W_n(x) \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\pm 1/2} dx.$$

Используя (3.11) и (4.3), получим асимптотическое выражение для коэффициентов демпфирования

$$B_{nm} = \frac{\pi}{K} U_n^+ U_m^+ + O(K^{-3/2}) \quad (K \rightarrow \infty). \quad (4.4)$$

Значения  $U_n^+$  для четных мод имеют вид

$$U_0^+ = 1/\sqrt{2}, \quad U_n^+ = D_n [J_0(\lambda_n) + S_n I_0(\lambda_n)] \quad (n \geq 2),$$

для нечетных мод — вид

$$U_1^+ = \sqrt{3}/(2\sqrt{2}), \quad U_n^+ = D_n [J_1(\lambda_n) + S_n I_1(\lambda_n)] \quad (n \geq 3),$$

где  $J_m(\cdot)$ ,  $I_m(\cdot)$  — соответственно обычные и модифицированные функции Бесселя первого рода порядка  $m$ .

В [5] приведено также решение для радиационного потенциала на свободной поверхности невесомой жидкости

$$\Phi_n(x, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 W_n(\xi) \ln \frac{|\sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)} - \sqrt{(1+x)/(1-x)}|}{\sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)} + \sqrt{(1+x)/(1-x)}} d\xi.$$

Однако более удобно использовать решение радиационной задачи для невесомой жидкости, представленное в [9, 10], которое позволяет в этом случае получить явные выражения для всех компонент матрицы присоединенной массы.

Согласно [11] в решении задачи для уравнения Лапласа в нижней полуплоскости со смешанными граничными условиями (3.1), (4.2) горизонтальная составляющая скорости жидкости на пластине имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} W_n(\xi) d\xi \quad (|x| \leq 1, \quad y=0),$$

где символ v.p. означает интеграл в смысле главного значения.

Поведение радиационного потенциала под пластиной вычисляется следующим образом:

$$\Phi_n(x, 0) = \int_{-1}^x \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}(\xi, 0) d\xi,$$

так как значения потенциала на краях пластины равны нулю.

Для твердотельных мод колебания пластины эти решения хорошо известны (см., например, [5, 6]):

$$\Phi_0(x, 0) = \sqrt{(1-x^2)/2}, \quad \Phi_1(x, 0) = (x/2) \sqrt{3(1-x^2)/2} \quad (|x| \leq 1) \quad (4.5)$$

и соответствующие значения присоединенных масс равны  $A_{00} = \pi/4$ ,  $A_{11} = 3\pi/32$ .

Выражения радиационного потенциала под пластиной для четных упругих мод ( $n \geq 2$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, 0) = D_n \left\{ \sqrt{1-x^2} (J_0^n + S_n I_0^n) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^k J_{2k}^n + S_n I_{2k}^n \right] \left[ \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} - \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1} \right] \right\}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

для нечетных упругих мод ( $n \geq 3$ ) — вид

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, 0) = D_n \left\{ x \sqrt{1-x^2} (J_1^n + S_n I_1^n) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^k J_{2k+1}^n + S_n I_{2k+1}^n \right] \left[ \frac{\sin 2(k+1)\theta}{2(k+1)} - \frac{\sin 2k\theta}{2k} \right] \right\}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:  $\theta = \arccos x$ ,  $J_m^n = J_m(\lambda_n)$ ,  $I_m^n = I_m(\lambda_n)$ .

Используя решения (4.5)–(4.7), можно определить все компоненты матрицы присоединенных масс: для четных мод

$$\begin{aligned} A_{0n} = \pi D_n (J_1^n + S_n I_1^n) / (\lambda_n \sqrt{2}), \\ A_{nm} = \pi D_n D_m \{ Q_1^{nm} + Q_2^{nm} + \\ + [S_n (\lambda_n J_0^m I_1^n + \lambda_m J_1^m I_0^n) + S_m (\lambda_n J_1^m I_0^n + \lambda_m J_0^m I_1^n)] / (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) \} \quad (n, m \geq 2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

для нечетных мод

$$A_{1n} = \sqrt{3/2} \pi D_n (J_2^n + S_n I_2^n) / (2\lambda_n),$$

$$A_{nm} = \pi D_n D_m \{ Q_3^{nm} - Q_4^{nm} + [S_n(\lambda_n J_1^n I_0^n - \lambda_m J_0^m I_1^m) + S_m(\lambda_m J_1^m I_0^m - \lambda_n J_0^n I_1^n)] / (\lambda_n^2 + \lambda_m^2) \} \quad (n, m \geq 3), \quad (4.9)$$

где при  $n \neq m$

$$Q_j^{nm} = Z_j^{nm} / (\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \quad (j = \overline{1, 4}),$$

$$Z_1^{nm} = \lambda_n P_{mn} - \lambda_m P_{nm}, \quad Z_2^{nm} = \lambda_n T_{mn} - \lambda_m T_{nm}, \quad Z_3^{nm} = \lambda_m P_{mn} - \lambda_n P_{nm},$$

$$Z_4^{nm} = \lambda_m T_{mn} - \lambda_n T_{nm}, \quad P_{nm} = J_0^n J_1^m, \quad T_{nm} = I_0^n I_1^m,$$

а при  $n = m$

$$Q_1^{nn} = [(J_0^n)^2 + (J_1^n)^2] / 2, \quad Q_2^{nn} = [(I_0^n)^2 - (I_1^n)^2] / 2,$$

$$Q_3^{nn} = [(J_1^n)^2 - J_0^n J_2^n] / 2, \quad Q_4^{nn} = [I_0^n I_2^n - (I_1^n)^2] / 2.$$

**5. Численные расчеты.** При численном решении интегрального уравнения (3.5) отрезок  $-1 \leq x \leq 1$  разбивается на  $2N$  элементов с равномерным шагом по переменной  $\theta = \arccos x$ . Внутри каждого элемента вводится дополнительный узел в средней точке и используются трехточечные квадратичные функции формы. С учетом свойств четности для функций  $f_n(x)$  задача их определения сводится к решению системы линейных уравнений порядка  $2N + 1$  ( $2N$ ) для четных (нечетных) номеров  $n$ . При используемом численном методе интегрирование в (3.6)–(3.9) выполняется аналитически.

Для твердотельных мод результаты, полученные предлагаемым методом, сопоставлены с табличными значениями  $A_{00}$ ,  $B_{00}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ , приведенными в [6] для  $0,01 \leq K \leq 20$ . При  $N = 100$  расхождение не превышало 1 %. Все представленные ниже результаты получены при  $N = 100$ , дальнейшее увеличение  $N$  практически не меняет их.

В данной работе приведены лишь некоторые примеры полученных решений для упругих мод с номерами  $0 \leq n \leq 5$ . Зависимости  $|f_n(x)|/K$  при различных значениях параметра  $K$  для  $n = 4, 5$  представлены на рис. 1. При  $K = \infty$  использовались решения (4.8), (4.9) соответственно для четной и нечетной моды. Следует отметить, что при малых значениях  $K$  распределение функций  $f_n(x)$  вдоль пластины качественно совпадает с поведением соответствующих нормальных мод  $W_n(x)$ , представленных зависимостями (2.2). Однако с ростом частоты амплитуда прогиба пластины на ее краях уменьшается и при  $K \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Зависимости некоторых элементов матрицы гидродинамической нагрузки от параметра  $K$  представлены на рис. 2 для четных и нечетных мод. Горизонтальная ось приведена в логарифмическом масштабе в связи с большим диапазоном изменения параметра  $K$ . Сравнение коэффициентов демпфирования, определенных с использованием (3.10) и энергетического соотношения (3.11), показало их хорошее соответствие. При  $K \rightarrow 0$  использовались предельные значения коэффициентов присоединенной массы, определенные по (4.1), при  $K \rightarrow \infty$  — определенные по (4.8), (4.9). Видно, что использование последних предельных зависимостей для гидродинамической нагрузки возможно только при очень больших значениях частоты, по крайней мере при  $K > 10^3$ .

Отметим также, что с увеличением номеров  $n$  и  $m$  положение экстремумов в зависимостях  $A_{nm}(K)$  и  $B_{nm}(K)$  сдвигается в сторону более высоких частот. Это означает, что старшие упругие моды возбуждаются только при внешних воздействиях достаточно высокой частоты.

Влияние периодической нагрузки на упругую пластину исследовано для следующего распределения внешнего давления в размерных переменных:

$$P(x) = a\rho g[1 - (x - x_0)^2/s^2] \quad (|x - x_0| \leq s), \quad P(x) = 0 \quad (|x - x_0| > s),$$

где  $a$  — множитель, имеющий размерность длины. Предполагается, что  $|x_0| + s < L$ .



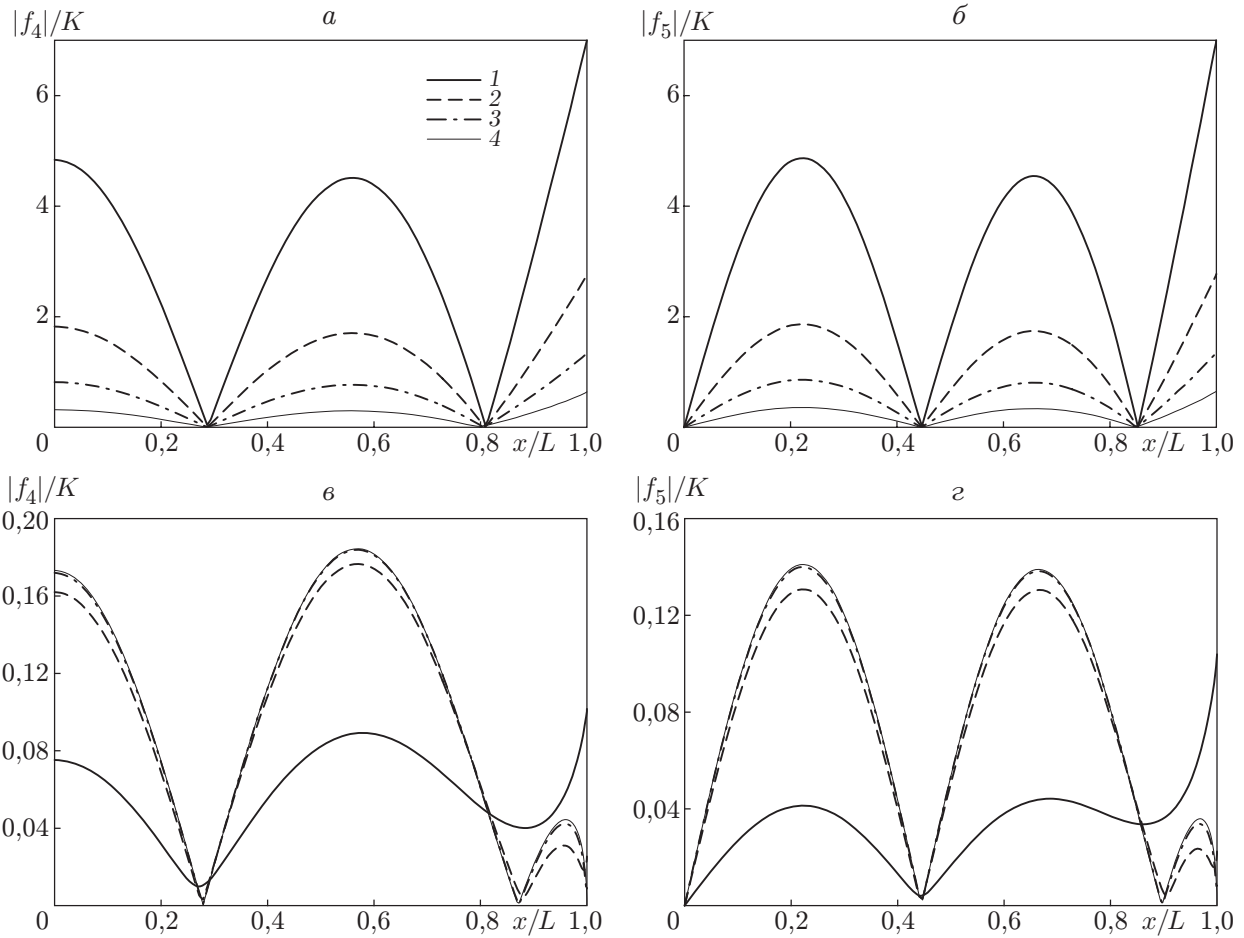


Рис. 1. Зависимости функций  $|f_n(x)|/K$  вдоль пластины при различных значениях частотного параметра  $K$ :  
 а —  $n = 4$ ;  $K = 0,2; 0,5; 1; 2$  (кривые 1–4); б —  $n = 5$ ;  $K = 0,2; 0,5; 1; 2$  (кривые 1–4);  
 в —  $n = 4$ ;  $K = 10; 100; 1000; \infty$  (кривые 1–4); г —  $n = 5$ ;  $K = 10; 100; 1000; \infty$  (кривые 1–4)

Значения исходных параметров приняты те же, что и в [1]:  $D = 1,093 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ;  $\rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;  $\rho_1 h_1 = 12,5 \text{ кг}/\text{м}^2$ ;  $L = 2,5 \text{ м}$ ;  $s = 0,5 \text{ м}$ .

Система линейных уравнений (2.4) решалась методом редукции, бесконечный ряд заменялся конечной суммой с числом членов  $M$ . В приведенных расчетах учитывалось  $M = 20$  мод.

На рис. 3 представлены амплитуды нормальных прогибов пластины  $W/a$  при  $x_0/L = 0,5$  и четырех различных значениях безразмерной частоты  $\omega\sqrt{L/g}$ . В решении для невесомой жидкости учитывались только коэффициенты присоединенной массы, определенные по (4.8), (4.9). Штрихпунктирными линиями показаны амплитуды прогибов пластины под действием той же нагрузки, но плавающей на поверхности жидкости конечной глубины, которая равна 0,25 м. Сравнивая решения для весоной жидкости конечной и бесконечной глубины, следует отметить их существенное расхождение. Как правило, амплитуды прогибов пластины в случае бесконечно глубокой жидкости превышают соответствующие значения для жидкости конечной глубины.

Решение для невесомой бесконечно глубокой жидкости дает удовлетворительное соответствие решению для весоной жидкости только при достаточно высокой частоте (см.

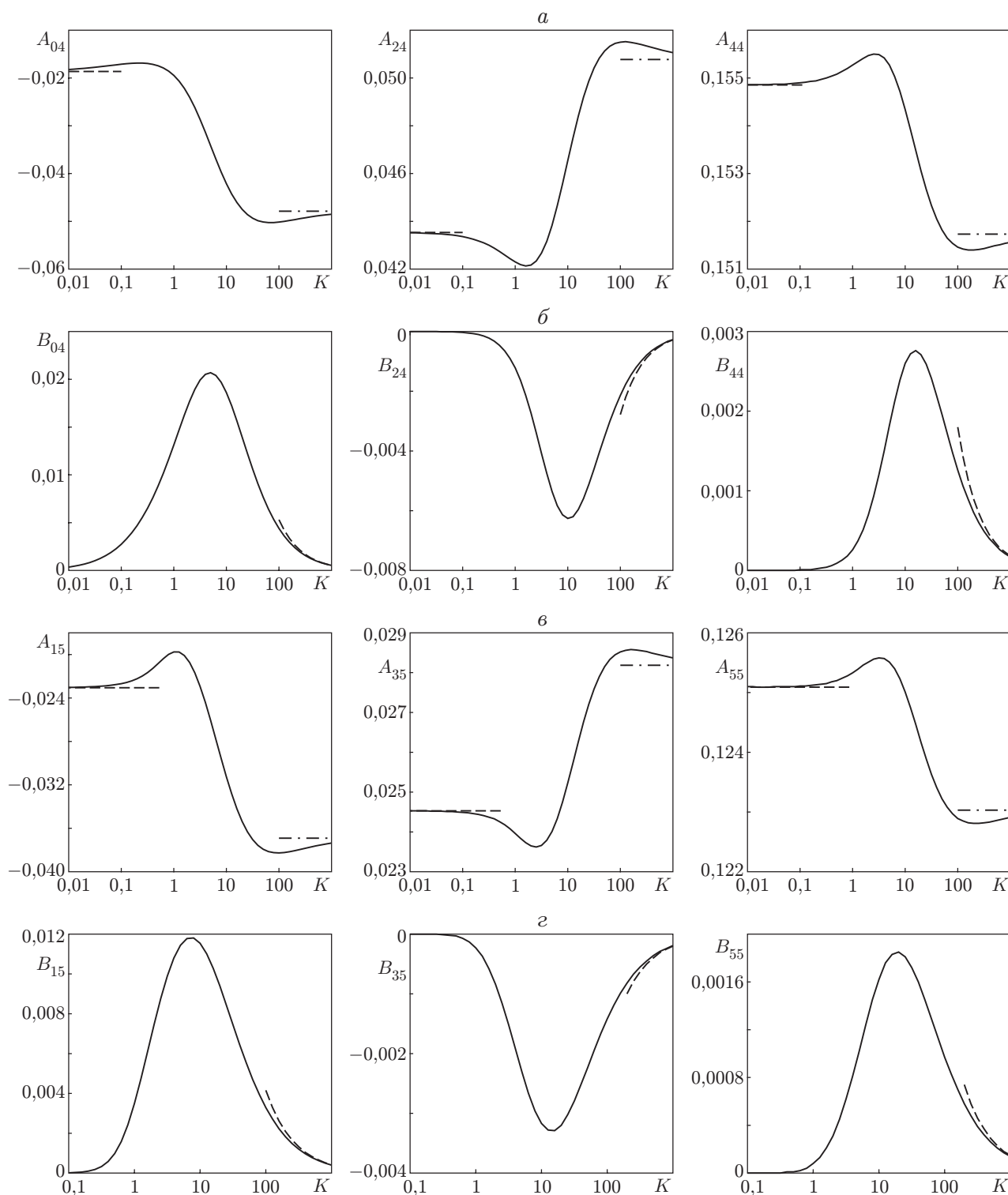


Рис. 2. Зависимости коэффициентов гидродинамической нагрузки от частотного параметра  $K$ :

$a, в$  — коэффициенты присоединенной массы (сплошные линии) и их предельные значения при  $K \rightarrow 0$  (штриховые линии) и  $K \rightarrow \infty$  (штрихпунктирные линии);  $б, г$  — коэффициенты демпфирования (сплошные линии) и их асимптотические зависимости при  $K \rightarrow \infty$  (штриховые линии)

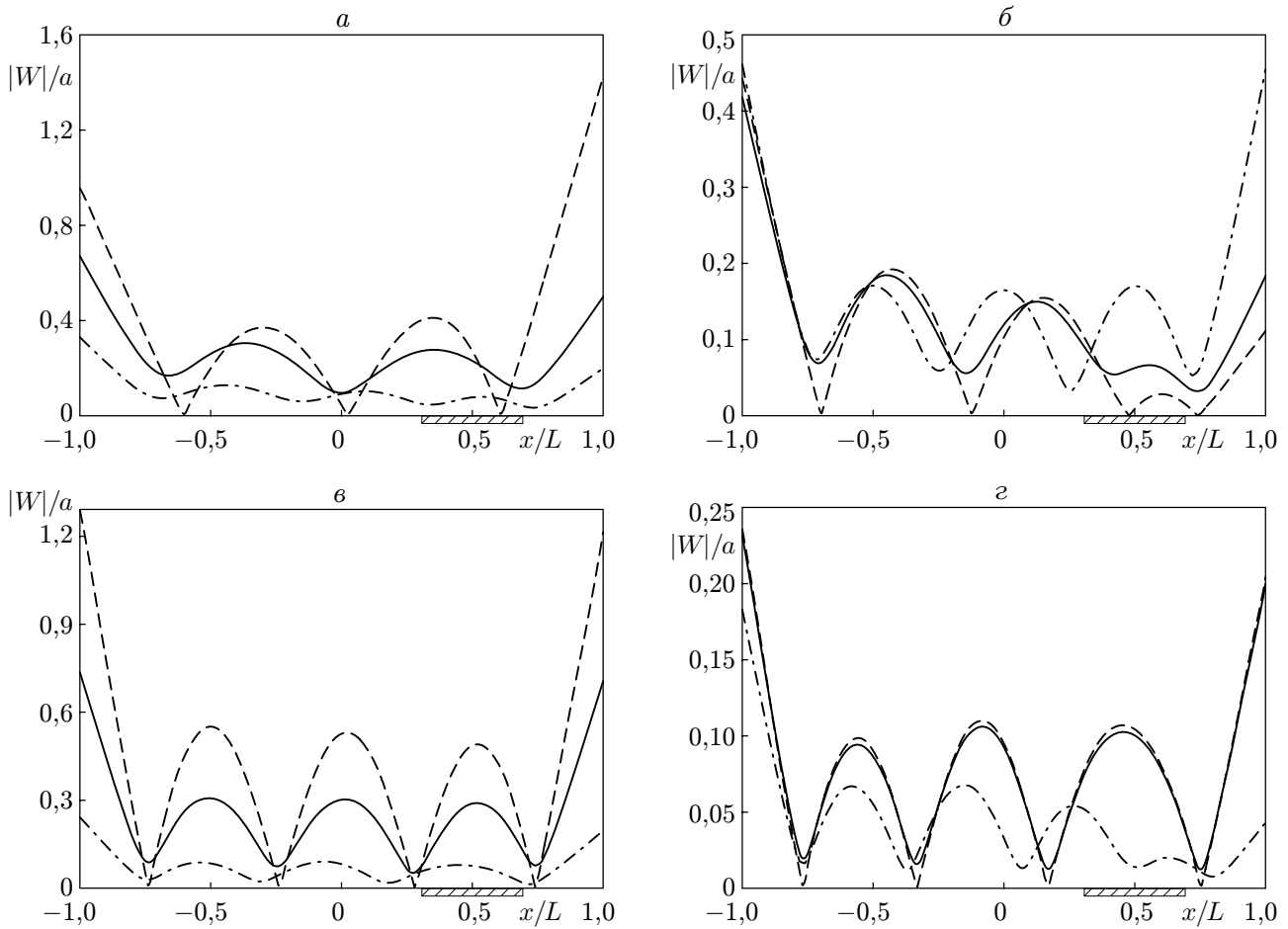


Рис. 3. Амплитуды нормальных прогибов  $|W|/a$  для весоной (сплошные линии) и невесоной (штриховые линии) бесконечно глубокой жидкости и результаты [1] для весоной жидкости конечной глубины (штрихпунктирные линии):  
 $a - \omega\sqrt{L/g} = 3,162$ ;  $б - \omega\sqrt{L/g} = 4,111$ ;  $в - \omega\sqrt{L/g} = 5,060$ ;  $г - \omega\sqrt{L/g} = 6,325$ ;  
 заштрихованная полоса — область приложения давления

рис. 3,г), а при более низких частотах дает, как правило, завышенные значения прогибов пластины.

Отметим, что для всех решений характерно резкое превышение прогибов на краях пластины их значений в средней ее части.

**Заключение.** Представленные результаты показывают существенное влияние глубины жидкости на поведение упругой пластины, подверженной действию внешней периодической нагрузки. Выполненное детальное исследование зависимости элементов матрицы гидродинамической нагрузки от частоты может быть использовано для решения задачи о воздействии на плавающую упругую пластину нестационарной нагрузки общего вида.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Стурова И. В.** Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 75–86.
2. **Ткачева Л. А.** Воздействие периодической нагрузки на плавающую упругую пластину // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 2. С. 132–146.

3. **Хаскинд М. Д.** Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973.
4. **Holford R. L.** Short surface waves in the presence of a finite dock. I // Proc. Camb. Phil. Soc. 1964. V. 60, N 4. P. 957–983.
5. **Holford R. L.** Short surface waves in the presence of a finite dock. II // Ibid. P. 985–1011.
6. **Bessho M., Komatsu M.** On hydrodynamical forces acting on a flat plate oscillating on water surface // J. Kansai Soc. Nav. Archit., Japan. 1974. N 154. P. 69–76.
7. **MacCamy R. C.** On the heaving motion of cylinders of shallow draft // J. Ship Res. 1961. V. 5, N 3. P. 34–43.
8. **McIver P.** Low-frequency asymptotics of hydrodynamic forces on fixed and floating structures // Ocean Waves Engineering. Southampton: Comput. Mech. Publ., 1994. P. 1–49.
9. **Коробкин А. А.** Плоская задача о симметричном ударе волной по балке Эйлера // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 134–147.
10. **Коробкин А. А., Хабахпашева Т. И.** О несимметричном ударе вершиной волны по упругой пластине // Там же. С. 148–158.
11. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 26/VIII 2004 г.*

---