

КОСОЙ УДАР ТВЕРДОГО ТЕЛА О ГРУНТ

Л. Я. Любин, А. С. Повицкий

(Москва)

Процесс взаимодействия твердого тела с грунтом имеет место в различных областях современной техники и исследован рядом авторов.

А. Я. Сагомоян [1,2] рассмотрел проникание острого осесимметричного тела в грунт. Задача об ударном уплотнении лессовых грунтов плоской трамбовкой решена Б. И. Дидуком [3] при помощи теории Х. А. Рахматулина о волне разгрузки. С. С. Григорян [4] дал приближенное решение этой же задачи в элементарных функциях.

Ниже рассматривается косою удар твердого тела, имеющего параболическое (плоская задача) или параболидное (осесимметричное тело) затупление о поверхность грунта, обладающего способностью существенно изменять свою плотность при упаковке.

В п. 1—3 рассматривается удар твердого тела о грунт, являющийся упруго-пластической средой, обладающей кусочно-линейным законом одноосной деформации с участком  $\sigma = \text{const}$ .

1. Твердое тело, обладающее достаточно пологим профилем (максимальный угол между касательной к поверхности тела, взаимодействующей с грунтом, плоскостью и недеформированной поверхностью грунта  $\phi \sim \epsilon$ ;  $\epsilon$  — малый параметр), при ударе о грунт имеет компоненты начальной скорости  $W_0$  и  $U_0$  (фиг. 1).

Предполагается, что до удара тело не вращалось, а в процессе внедрения в грунт его угловое ускорение пренебрежимо мало, так как соответствующий момент инерции достаточно велик.

Будем приближенно считать, что неустановившееся движение грунта происходит в основном в одном направлении, точнее, будем предполагать, что компоненты вектора скорости имеют порядок

$$u \sim v \sim \epsilon W_0, w \sim W_0 \quad (1.1)$$

(предполагается, что коэффициент трения тела о грунт  $f \sim \epsilon^2$ ), а производные различных функций, характеризующих процесс уплотнения грунта, оцениваются соотношениями

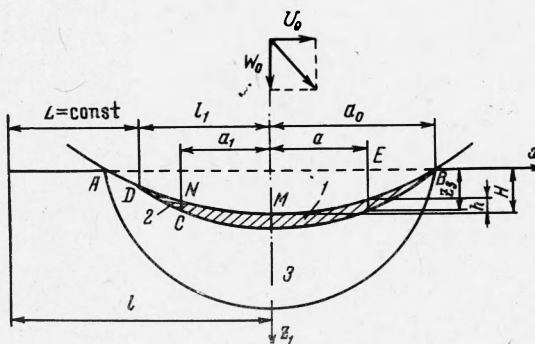
$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y} \sim \epsilon \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2)$$

Тогда, как показал С. С. Григорян [5], из уравнений, описывающих движение грунта, можно выделить, пренебрегая величинами  $O(\epsilon^2)$ , систему уравнений одномерного движения вдоль оси  $z$ .

Соответствующие приближенные уравнения неразрывности и движения имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (1.3)$$

(индексы  $zz$  у компоненты напряжений в дальнейшем опускаются:  $\sigma_{zz} = \sigma$ ).

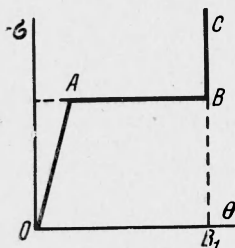


Фиг. 1

Грунт может находиться только в двух состояниях: упругом  $OA$  и упакованном, несжимаемом  $B_1BC$  (фиг. 2). Переход ко второму состоянию происходит скачком при  $\sigma = -p_s$  ( $\theta$  — относительная деформация). Разгрузка в упакованном грунте происходит без изменения объема  $CBV_1$ .

Так как данная модель грунта является частным случаем общей модели, рассмотренной в работе [5], то можно воспользоваться уравнениями (1.3). Учитывая несжимаемость грунта в состоянии, характеризуемом точками прямой ( $B_1, BC$ ), получим уравнения, описывающие движение вдоль оси  $z$  в зоне упакованного грунта

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \rho_1 \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (1.4)$$



Фиг. 2

Очевидно, что если нормальная к поверхности грунта компонента начальной скорости  $W_0$  достаточно велика, то, по аналогии со взрывом в упругопластическом грунте, рассмотренном Н. В. Зволинским [6], процесс деформации грунта может быть разбит на пять стадий.

- 1) Ударная волна упаковки распространяется по невозмущенной среде в направлении оси  $z$  (фиг. 1).
- 2) Под левой «кормовой» частью внедряющегося тела (в окрестности точки  $A$ ) скорость ударной волны становится равной, а затем и меньше скорости  $c_0$  распространения продольных упругих волн; ударная волна начинает излучать упругую; упаковка грунта продолжается; правая граница области излучения упругой волны распространяется вправо.
- 3) При определенном уменьшении нормальной компоненты скорости внедряющегося тела под кормовой частью тела прекратится упаковка грунта, т. е. по невозмущенной среде будет распространяться упругая волна, за ней следовать упакованная зона; границей является контактный разрыв.
- 4) Дальнейшее уменьшение нормальной компоненты скорости приведет к отрыву грунта от кормовой части поверхности внедряющегося тела (если начальное значение скорости сноса  $U_0$  соизмеримо с начальной величиной нормальной компоненты скорости  $W_0$ ).
- 5) Так как разгрузка упакованного грунта происходит без изменения объема (без разуковки), то одновременно с остановкой тела в случае прямого удара остановится упакованная зона и от нее оторвется задний фронт упругой волны; при косом ударе возможен рикошет.

В упругой зоне, как обычно, пренебрегаем конвективной частью, ускорения ( $\partial w / \partial t = dw / dt$ ) и считаем, что движение, как и в зоне упакованного грунта, практически одномерно. Тогда в плоской волне между напряжением  $\sigma_2$  ( $\sigma_{zz}$ ) и скоростью упругого смещения  $w_2$  имеет место соотношение

$$\sigma_2 = -\rho_0 c_0 w_2 \quad (1.5)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность грунта,  $c_0$  — скорость распространения продольных волн.

Ниже ограничимся рассмотрением представляющих основной интерес второй и третьей стадии, т. е. будем считать, что величина  $W_0$  умеренна, и в течение всего времени существования вся поверхность ударной волны излучает упругую волну.

Тогда граничные условия разрыва можно записать в следующем виде (см. фиг. 1, где  $AD$  — область упругих деформаций,  $DC$  — фронт контактного разрыва,  $CB$  — ударная волна):

на ударной волне

$$w_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} w_2 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \frac{\partial z_s}{\partial t}, \quad -\sigma_1 = -\sigma_2 + \frac{\rho_1^2}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \left(\frac{\partial z_s}{\partial t} - w_2\right)^2 \quad (1.6)$$

на фронте контактного разрыва

$$w_1 = w_2 = \frac{\partial z_s}{\partial t}, \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

Здесь  $\sigma_1$  и  $w_1$  соответствуют зонам 1 и 2 упакованного грунта,  $\sigma_2$  и  $w_2$  — упругой зоне 3,  $\rho_1$  — плотность упакованного грунта.

Рассматриваемая схема движения грунта может быть реализована только при выполнении дополнительного условия на ударной волне [6-8]

$$\sigma = -p \quad (1.7)$$

Граничные условия на поверхности внедряющегося тела в случае плоской задачи и для осесимметричного тела имеют соответственно вид

$$w_1 = H \pm l \frac{dh}{da}, \quad w_2 = H + l \frac{dh}{da} \cos \varphi, \quad (1.8)$$

Здесь точка обозначает производные по времени,  $H$  и  $l$  — координаты вершины  $M$  внедряющегося тела относительно неподвижной точки на поверхности грунта,  $\varphi$  — угол в горизонтальной плоскости, отсчитываемый от оси  $x$ ,  $h = h(a)$  — уравнение контура тела, верхний (нижний) знаки соответствуют точкам справа (слева) от оси симметрии (фиг. 1).

Начиная с определенного момента времени контактная поверхность между телом и грунтом будет состоять из трех областей: правой  $BN$ , под которой продолжается упаковка грунта; средней  $ND$ , под которой упаковка грунта прекратилась, и «кормовой» области  $DA$ , под которой упакованного грунта нет.

Так как, в силу соотношений (1.5) и (1.7), между фронтом ударной волны и передним фронтом упругой волны лежит зона с постоянными параметрами  $\sigma = -p_s$ ,  $w_2 = w_s$ ,  $w_s = p_s / (\rho_0 c_0)$ , то упаковка грунта имеет место под той частью контактной поверхности, под которой скорость упакованного грунта  $w_1$  больше  $w_s$  ( $w_1 > w_s$ ). Таким образом, граница между первой и второй областями определяется из условия

$$w = w_s \quad (1.9)$$

Отношение  $H/l$  монотонно убывает. Следовательно, проекция границы между второй и третьей областями на недеформированную поверхность грунта не изменяется в неподвижной системе координат в случае плоской задачи и лишь продолжается (растет) по мере внедрения в случае осесимметричного тела (эта проекция состоит из точек, в которых частицы грунта в момент соприкосновения с твердым телом приобретают скорость  $w = w_s$ ).

Решая уравнения (1.4) и (1.5) совместно с граничными условиями (1.6), (1.7) и (1.8), получим распределение напряжений  $\sigma$  ( $\sigma_{zz}$ ) и толщины  $\Delta$  зоны упакованного грунта вдоль поверхности внедряющегося тела в областях 1, 2 и 3 соответственно. Например, в случае плоской задачи

$$\begin{aligned} -\sigma^{(1)} &= p_s + \frac{\rho_0}{\xi} \left[ f(a, a_0) \left( H'' \pm \frac{dh}{da} l'' - \frac{d^2 h}{da^2} l^2 \right) + \left( H \pm \frac{dh}{da} l - w_s \right)^2 \right] \\ -\sigma^{(2)} &= \rho_0 c_0 \left( H \pm \frac{dh}{da} l \right) + \frac{\rho_0}{\xi} f(a_1^0, a_0^0) \left( H'' \pm \frac{dh}{da} l'' - \frac{d^2 h}{da^2} l^2 \right) \left( \xi = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \\ -\sigma^{(3)} &= \rho_0 c_0 \left( H \pm \frac{dh}{da} l \right), \quad \Delta^{(1)}(a, a_0) = \frac{f(a, a_0)}{\xi}, \quad \Delta^{(2)}(a, a_0) = \frac{f(a_1^0, a_0^0)}{\xi} \\ \Delta^{(3)}(a, a_0) &= 0, \quad f(a, a_0) = h(a_0) - h(a) - w_s [t(a_0) - t(a')] \\ a' &= a \pm [l(a_0) - l(a')] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $t(a)$  — время увеличения ширины отпечатка от 0 до  $2a$ ; через  $2a'$  — обозначена ширина отпечатка в тот момент, когда тело коснулось грунта в точке  $E$ ; верхним индексом  $\circ$  отмечены параметры, соответствующие моменту прохождения проекции на горизонтальную плоскость границы между зонами 1 и 2 через точку, удаленную от неподвижной точки  $D$  на расстояние  $L = l_1 - a$ .

Таким образом, толщина зоны упакованного грунта  $\Delta < [h(a_0) - h(a)]\xi^{-1}$ , и, следовательно, в силу способности грунта существенно изменять свою плотность при деформации ( $\xi \sim 1$ ) упакованная зона представляет собой тонкий слой, т. е. мало отношение характерного размера  $l_z$  этой зоны в направлении оси  $z$  к характерным размерам  $l_{xy}$  в направлениях, перпендикулярных к оси  $z$  ( $l_z \sim \varepsilon l_{xy}$ ), что приводит к оценкам (1.1) и (1.2) [5]. Одномерный характер движения грунта в упругой зоне на начальном этапе внедрения, пока зона 3 (фиг. 1) относительно узка, может быть объяснен аналогично. При дальнейшем внедрении одномерность предполагается в силу специальных свойств грунта. Кроме того, следует отметить, что на наиболее интересном этапе процесса внедрения, когда отношение  $w_s / H$  мало, влияние упругих деформаций на рассматриваемый процесс является эффектом второго порядка.

Уравнения движения внедряющегося тела, имеющего массу  $m$  и начальные условия, запишутся в виде

$$mH'' = b \int_{-a_0}^{a_0} \sigma da, \quad ml'' = b \int_0^{a_0} \sigma \frac{dh}{da} da - b \int_{-a_0}^0 \sigma \frac{dh}{da} da + fb \int_{-a_0}^{a_0} \sigma da \quad (1.11)$$

$$H' = W_0, \quad l' = U_0 \quad \text{при } H = 0 \quad (1.12)$$

Здесь  $b$  — ширина внедряющегося тела.

2. Пусть  $h(a) = a^2 / 2R$ . Так как рассматриваются малые глубины внедрения  $H$ , то можно считать, что этот контур приближенно соответствует окружности радиуса  $R$ . Выберем в качестве малого параметра  $\varepsilon$  отношение скоростей  $w_s / W_0$  и перейдем к безразмерным величинам:

$$H' = W_0 W, \quad l' = W_0 U, \quad a = \alpha a_*, \quad b = \beta a_*, \quad p_s = \Pi \rho_0 W_0^2 \\ t = \varepsilon \xi \tau a_* / W_0, \quad \mu = 4\varepsilon a_*^3 \rho_0 / m, \quad a_* = 2\varepsilon \xi R, \quad f = \varepsilon^2 f_1$$

Так как поверхность внедряющейся в грунт части тела полого, то можно считать, что  $\alpha \sim \tau \sim 1$ . Рассматривается наиболее интересный этап движения, когда вертикальная составляющая  $H'$  скорости внедрения соизмерима со своим начальным значением  $W_0$  ( $W \sim 1$ ). Предполагается, что начальные значения компонент скорости  $W_0$  и  $U_0$  имеют одинаковые порядки и, следовательно,  $U \sim 1$ . Кроме того, предполагается, что ширина внедряющегося тела имеет порядок характерного размера в направлении оси  $x$  ( $\beta \sim 1$ ), а присоединенная масса грунта соизмерима с массой тела ( $\mu \sim 1$ ).

Тогда уравнения движения (1.11) для периода до появления зоны контактного разрыва и начальные условия (1.12) переписутся в виде

$$\left[ 1 + \frac{1}{2} \beta \mu \left( \frac{2}{3} \alpha_0^3 - \varepsilon \alpha_0 \tau + \varepsilon \int_0^{\alpha_0} \tau d\alpha \right) \right] W \frac{dW}{d\alpha_0} + \beta \mu \alpha_0^2 (W^2 - 2\varepsilon W) + \beta \mu \xi \Pi \alpha_0^2 = 0 \\ \frac{dU}{d\alpha_0} - \varepsilon^2 f_1 \frac{dW}{d\alpha_0} + \frac{8}{3} \varepsilon^2 \xi^2 \beta \mu \alpha_0^4 U = 0 \quad (2.1)$$

$$W = 1, \quad U = U_0 / W_0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0 \quad (2.2)$$

Будем искать решение уравнений (2.1) в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , т. е.

$$W = W_1 + \varepsilon W_2 + \dots, \quad U = U_1 + \varepsilon U_2 + \dots, \quad \tau = \tau_2 + \varepsilon \tau_3 + \dots \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в (2.1), получим уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i}{3} \beta \mu \alpha_0^3\right) W_1 \frac{dW_1}{d\alpha_0} + \beta \mu \alpha_0^2 W_1^2 + \beta \mu \alpha_0^2 \xi \Pi = 0, \quad \frac{dU_1}{d\alpha_0} = 0 \\ W_1 = 1, \quad U_2 = U_0/W_0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения второго приближения имеют вид

$$\frac{d\tau_2}{d\alpha_0} - \frac{2\alpha_0}{W_1}, \quad \frac{dW_2}{d\alpha_0} + \Phi_{12}(\alpha_0) W_2 - \Phi_{22}(\alpha_0) = 0, \quad \frac{dU_2}{d\alpha_0} = 0 \quad (2.5)$$

$$W_2 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \tau_2 = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0; \quad \Phi_{12}(\alpha_0) = \frac{2\beta \mu \alpha_0^2}{1 + \frac{1}{3} \beta \mu \alpha_0^3} + \frac{1}{W_1} \frac{dW_1}{d\alpha_0}$$

$$\Phi_{22}(\alpha_0) = \frac{\beta \mu}{2(1 + \frac{1}{3} \beta \mu \alpha_0^3)} \left[ \alpha_0 \tau_2 - \int_0^{\alpha_0} \tau_2(\alpha) d\alpha \right] \frac{dW_1}{d\alpha_0} + \frac{2\beta \mu \alpha_0^2}{1 + \frac{1}{3} \beta \mu \alpha_0^3}$$

Уравнение третьего приближения

$$\frac{dU_3}{d\alpha_0} - f_1 \frac{dW_1}{d\alpha_0} + \frac{8}{3} \xi^2 \beta \mu \alpha_0^4 U_1 = 0, \quad U_3 = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0 \quad (2.6)$$

Решения уравнений (2.4), (2.5) и (2.6) при указанных начальных условиях находятся в квадратурах. Для (2.4) имеем

$$W_1 = \sqrt{(1 + \xi \Pi)(1 + \frac{1}{3} \beta \mu \alpha_0^3)^{-2} - \xi \Pi}, \quad U_1 = U_0/W_0 \quad (2.7)$$

Для системы второго приближения (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \tau_2 = \frac{2I(\delta, \omega)}{(\xi \Pi)^{1/2} (3\beta^2 \mu^2)^{1/2}}, \quad W_2 = - \frac{J_1(\delta, \omega) - J_2(\delta, \omega)}{W_1(1 + \omega)^2} \\ U_2 = 0, \quad \omega = \frac{\beta \mu \alpha_0^3}{3}, \quad \delta = \frac{1}{\xi \Pi}, \quad I(\delta, \omega) = \int_0^{\omega} \frac{(1 + \omega_1) d\omega_1}{\sqrt{(\delta - 2\omega_1 - \omega_1^2) \omega_1^{3/2}}} \\ J_1(\delta, \omega) = \left( \sqrt{\delta} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right) [I_1(\delta, \omega) - I_2(\delta, \omega)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} J_2(\delta, \omega) = \left\{ \frac{\kappa \sqrt{\delta + 1 - \kappa^2}}{\sqrt{\delta}} - 1 + \left( \sqrt{\delta} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} \kappa \right) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} \right] \right\} \quad \kappa = 1 + \omega \end{aligned}$$

$$I_1(\delta, \omega) = \int_0^{\omega} \frac{I(\delta, \omega_1) \omega_1^{1/2} d\omega_1}{(1 + \omega_1)^2}, \quad I_2(\delta, \omega) = \int_0^{\omega} \frac{I_0(\delta, \omega) d\omega_1}{(1 + \omega_1)^2}$$

$$I_0(\delta, \omega) = \int_0^{\omega} \frac{I(\delta, \omega_1) d\omega_1}{\omega_1^{1/2}}$$

Для уравнения третьего приближения находим

$$U_3 = -f_1(1 - W_1) - \frac{8}{3} \xi^2 \beta \mu \alpha_0^5 U_0 / W_0 \quad (2.9)$$



Компоненты силы, действующей на внедряющееся тело, равны

$$P_z = \frac{1}{2\varepsilon\xi} \frac{mW_0^2}{\alpha_0 a_*} \left\{ \frac{\varepsilon\beta\mu}{2(1 + \frac{1}{3}\beta\mu\alpha_0^3)} \left[ (\alpha_0\tau_2 - \int_0^{\alpha_0} \tau_2(\alpha) d\alpha) \frac{dW_1}{d\alpha_0} + 4\alpha_0^2(1 - W_2) \right] + \frac{dW_1}{d\alpha_0} \right\} W_1 \quad (2.10)$$

$$P_x = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\xi} \frac{mW_0^2}{\alpha_0 a_*} \left( f_1 \frac{dW_1}{d\alpha_0} - \frac{8}{3} \xi^2 \beta\mu\alpha_0^4 \frac{U_0}{W_0} \right) W_1$$

Упаковка грунта под кормовой частью тела прекратится, когда скорость грунта в окрестности точки А станет равной  $w_s$  или (см. 1.8) когда безразмерная ширина отпечатка станет равной величине

$$2\alpha_1 = \frac{W - \varepsilon}{\varepsilon\xi U} \quad (2.11)$$

С этого момента и до начала отрыва тела от грунта в кормовой части его движение будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{\beta\mu}{4} \left[ (\alpha_0 + \alpha_1)(\alpha_0^2 - \varepsilon\tau) - \frac{\alpha_0^3 + \alpha_1^3}{3} + \int_0^{\lambda - \alpha_1} f_0(\alpha) d\alpha - \varepsilon \left( \int_0^{\alpha_0} \tau(\alpha) d\alpha + \int_0^{\alpha_1} \tau(\alpha) d\alpha \right) \right] \right\} W \frac{dW}{d\alpha_0} + \frac{\beta\mu(\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_0 W^2}{2} + \frac{\beta\mu[\xi\xi(\alpha_0 - \alpha_1)\alpha_0 - 2\varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1)\alpha_0] W}{2} + \\ & + \beta\mu\varepsilon\xi\alpha_0(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) WU - \frac{\beta\mu\varepsilon\xi\alpha_0(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)(2 + \xi\xi) U}{2} + \frac{\beta\mu\xi\Pi\alpha_0(\alpha_0 + \alpha_1)}{2} = 0 \\ & W \frac{dU}{d\alpha_0} + \left\{ \frac{\beta\mu}{4} \left[ \frac{\varepsilon\xi(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)}{2} - \varepsilon^2\xi(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)\tau - 2\varepsilon\xi\lambda \int_0^{\lambda - \alpha_1} f_0(\alpha) d\alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\varepsilon\xi \int_0^{\lambda - \alpha_0} \alpha f_0(\alpha) d\alpha + 2\varepsilon^2\xi \left( \int_0^{\alpha_0} \alpha\tau(\alpha) d\alpha - \int_0^{\alpha_1} \alpha\tau(\alpha) d\alpha \right) \right] - \varepsilon^2 f_1 \right\} W \frac{dW}{d\alpha_0} + \frac{\beta\mu\varepsilon\xi\alpha_0(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) W^2}{2} - \frac{\beta\mu(2\varepsilon^2\xi + \varepsilon\xi^2\xi)\alpha_0(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) W}{2} + \\ & + \frac{4\beta\mu\varepsilon^2\xi^2\alpha_0(\alpha_0^3 + \alpha_1^3) WU}{3} + \frac{2\beta\mu\varepsilon^2\xi^2\xi\alpha_0(\alpha_0^3 - \alpha_1^3) U}{3} + \frac{\beta\mu\varepsilon\xi^2\alpha_0(\alpha_0^2 - \alpha_1^2) \Pi}{2} = 0 \\ & \xi = \frac{c_0}{W_0} \quad \frac{d\tau}{d\alpha_0} = \frac{2\alpha_0}{W}, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha_0} = \frac{2\alpha_0 U}{W}, \quad \lambda = \frac{l_1}{a_*}, \quad f_0(\lambda - \alpha) = f(\alpha_1^\circ, \alpha_0^\circ) \end{aligned}$$

Нелинейная система уравнений (2.12) решается численными методами. Начальные значения  $W$ ,  $U$  и  $\tau$  определяются в результате расчета предыдущего этапа. Величина  $\lambda$  в начале рассматриваемого этапа равна 0. Безразмерная координата  $\alpha_1$  границы зон находится по формуле (2.11).

3. Аналогично можно рассмотреть косо удар осесимметричного тела о грунт. Первый этап движения (до прекращения упаковки грунта в кормовой части) при  $h = a^2 / 2R$  описывается уравнениями

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \mu_1 \left[ \frac{1}{2} \chi^2 - \varepsilon\chi\tau + \varepsilon \int_0^\chi \tau(\chi_1) d\chi_1 \right] W \frac{dW}{d\chi} + \mu_1 \chi (W^2 - 2\varepsilon W) + \mu_1 \xi \Pi \chi = 0 \right. \\ & \left. \frac{dU}{d\chi} - \varepsilon^2 f_1 \frac{dW}{d\chi} + 2\mu_1 \varepsilon^2 \xi^2 \chi U = 0, \quad \frac{d\tau}{d\chi} = \frac{1}{W} \right. \quad (3.1) \\ & \left. W = 1, \quad U = \frac{U_0}{W_0}, \quad \tau = 0 \quad \text{при } \chi = 0. \quad \left( \chi = \frac{H}{\varepsilon\xi a_*}, \quad \mu_1 = \frac{\pi\varepsilon\rho_0 a_*^3}{m} \right) \right. \end{aligned}$$

Подставив (2.3) в (3.1) и считая, что для безразмерных величин имеют место оценки, аналогичные оценкам п. 2, получим:

уравнения первого приближения

$$\left(1 + \frac{\mu_1 \chi^2}{2}\right) W_1 \frac{dW_1}{d\chi} + \mu_1 \chi W_1^2 + \mu_1 \xi \Pi \chi = 0, \quad \frac{dU_1}{d\chi} = 0 \quad (3.2)$$

$$W_1 = 1, \quad U_1 = U_0/W_0 \quad \text{при } \chi = 0$$

уравнения второго приближения

$$\frac{d\tau_2}{d\chi} = \frac{1}{W_1}, \quad \frac{dW_2}{d\chi} + \Psi_{12}(\chi) W_2 + \Psi_{22}(\chi) = 0, \quad \frac{dU_2}{d\chi} = 0$$

$$\tau_2 = 0, \quad W_2 = 0, \quad U_2 = 0 \quad \text{при } \chi = 0, \quad \Psi_{12}(\chi) = \frac{2\mu_1 \chi}{1 + 1/2 \mu_1 \chi^2} + \frac{1}{W_1} \frac{dW_1}{d\chi}$$

$$\Psi_{22}(\chi) = - \frac{\mu_1}{1 + 1/2 \mu_1 \chi^2} \left\{ \left[ \chi \tau - \int_0^\chi \tau(\chi_1) d\chi_1 \right] \frac{dW_1}{d\chi} - 2\chi \right\} \quad (3.3)$$

уравнение третьего приближения

$$\frac{dU_3}{d\chi} - f_1 \frac{dW_1}{d\chi} + 2\mu_1 \xi^2 \chi U_1 = 0, \quad U_3 = 0 \quad \text{при } \chi = 0 \quad (3.4)$$

Уравнения последовательных приближений решаются в квадратурах

$$W_1 = \left[ \frac{1 + \xi \Pi}{(1 + 1/2 \mu_1 \chi^2)^2} - \xi \Pi \right]^{1/2}, \quad U_1 = \frac{U_0}{W_0}, \quad \tau_2 = \frac{I_3(\delta, \omega)}{\sqrt{2\mu_1}}, \quad U_2 = 0$$

$$I_3(\delta, \omega) = \sqrt{\delta} \int_0^\omega \frac{(1 + \omega_1) d\omega_1}{\sqrt{(\delta - 2\omega_1 - \omega_1^2) \omega_1}} \quad (3.5)$$

$$W_2 = -\Phi_{22}(\chi) \exp[-\Phi_{12}(\chi)], \quad U_3 = -f_1(1 - W_1) - \frac{\mu_1 \xi^2 \chi^2 U_0}{W_0}$$

$$\left( \Phi_{12}(\chi) = \int_0^\chi \Psi_{12}(\chi_1) d\chi_1, \quad \Phi_{22}(\chi) = \int_0^\chi \Psi_{22}(\chi_1) \exp[\Phi_{12}(\chi_1)] d\chi_1 \right)$$

Компоненты силы, действующей на внедряющееся тело, равны

$$P_z = \frac{mW_0^2}{\varepsilon \xi a_*} \left\{ \frac{\varepsilon \mu_1}{1 + 1/2 \mu_1 \chi^2} \left[ \left( \chi \tau_2 - \int_0^\chi \tau_2(\chi_1) d\chi_1 \right) \frac{dW_1}{d\chi} + 2\chi(1 - W_2) \right] + \frac{dW_1}{d\chi} \right\} W_1$$

$$P_x = \frac{\varepsilon}{\xi} \frac{mW_0^2}{a_*} \left( f_1 W_1 \frac{dW_1}{d\chi} - 2\mu_1 \xi^2 W_1 \frac{U_0}{W_0} \right) \quad (3.6)$$

Упаковка грунта под кормовой частью тела прекратится, когда безразмерная глубина отпечатка  $\chi$  станет равной величине

$$\chi_1 = \left( \frac{W - \varepsilon}{2\varepsilon \xi U} \right)^2 \quad (3.7)$$

Дальнейшее погружение тела в грунт может быть рассмотрено так же, как и в случае плоской задачи. Прямой удар тела о грунт ( $U_0 = 0$ ) может быть рассмотрен аналогично. При этом рассмотрение третьей стадии процесса существенно упрощается, так как упаковка грунта прекращается одновременно под всей поверхностью контакта.

Следует отметить, что при определенных условиях картина протекания процесса может измениться; в районе вершины внедряющегося тела может возникнуть каверна. Условием начала отрыва является равенство напряжений  $\sigma$  нулю в соответствующих точках поверхности контакта. Расчеты показывают, что в первом приближении отрыв грунта от тела вращения при прямом ударе будет иметь место на части поверхности, вошедшей в грунт на глубину  $H > H_1 = \sqrt{\xi m / (\pi \rho_0 R)}$ .

Рассмотренная выше модель грунта будет, очевидно, предельным случаем упруго-пластической среды, обладающей кусочнолинейным законом одноосной деформации, изображенной на фиг. 3 (предполагается, что разгрузка из состояний, соответствующих точкам отрезка  $AB$ , происходит без изменения объема). При решении задачи об ударном уплотнении лессовых грунтов плоской тромбовкой [4] С. С. Григорьяном использован другой частный случай этой модели, когда относительная деформация грунта не достигает предельной величины, соответствующей точке  $B$ .

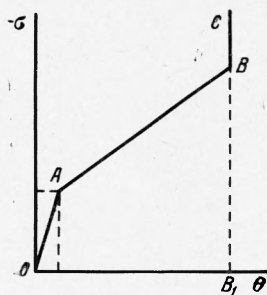
4. При достаточно большой начальной скорости тела процесс деформации грунта в общем случае будет протекать следующим образом.

1) Ударная волна упаковки грунта до предельного несжимаемого состояния соответствующего точкам прямой  $BC$ , распространяется по невозмущенной среде в направлении оси  $z$  (фиг. 1).

2) Под кормовой частью внедряющегося тела скорость ударной волны станет равной, а затем и меньше скорости  $c_0 = \sqrt{E/\rho_0}$  ( $E$  — модуль Юнга; участок  $OA$  на фиг. 3); ударная волна начинает излучать упругую; упаковка грунта до предельного состояния продолжается; правая граница области излучения упругой волны распространяется вправо.

3) При дальнейшем уменьшении компоненты скорости тела, нормальной к поверхности грунта, скорость ударной волны под кормовой частью тела станет равной  $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$  ( $E_1$  — модуль пластичности); уплотнение грунта до предельного несжимаемого состояния прекратится; за упругой волной, движущейся со скоростью  $c_0$  по области с постоянными параметрами ( $\sigma = -p_s$ ,  $w = w_s$ ), пластическая волна будет распространяться со скоростью  $c_1$ .

Очевидно, что если участок  $AB$  достаточно полог и  $c_1 < w_s = p_s / (\rho_0 c_0)$ , то последнего этапа движения не будет, а процесс деформации грунта будет происходить по схеме, рассмотренной в п. 1.



Фиг. 3

Рассмотрим третий этап движения, т. е. будем считать, что компонента начальной скорости  $W_0$  достаточно мала и предельной упаковки грунта до несжимаемого состояния не происходит. Как и выше, считаем, что движение грунта одномерно, например в силу высокой пористости [3, 4] (пылевидный грунт). Тогда можно показать, что распределение напряжений  $\sigma$  ( $\sigma_{zz}$ ) по поверхности внедряющегося осесимметричного тела будет

$$-\sigma(a, \varphi, a_0) = \rho_0 c_1 [t(a_0) - t(a')] \left[ H'' + l' \frac{dh}{da} \cos \varphi - \right. \\ \left. - l^2 \left( \frac{d^2 h}{da^2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{a} \frac{dh}{da} \sin^2 \varphi \right) \right] + p_s + \rho_0 c_1 \left( H' + l' \frac{dh}{da} \cos \varphi - \theta_s c_0 \right) \\ t(a') = t(a) + \frac{dt(a)}{da} [l(a_0) - l(a)] \cos \varphi + O(\varepsilon^2 a_* / W_0) \quad (4.1)$$

$$a' = \sqrt{a^2 + (\Delta l)^2 + 2\Delta l a \cos \varphi} \approx a + \Delta l \cos \varphi$$

$$\Delta l = l(a_0) - l(a') = l(a_0) - l(a) + O(\varepsilon^2 a_*)$$

Здесь  $-\sigma = p_s = E\theta_s$  — предел упругости (точка  $A$  на фиг. 3).

Пусть  $h = a^2 / 2R$ . Как и выше, ограничимся при рассмотрении косоуго ударного случая малого погружения  $H$  тела в грунт. Введем пока не определенный малый параметр  $\varepsilon$  и перейдем к безразмерным величинам

$$a = \alpha a_*, \quad a_* = 2\varepsilon R, \quad H' = W_0 W, \quad l' = W_0 U, \quad \mu_2 = \frac{\pi a_*^3 \rho_0}{m \varepsilon} \\ p_s = \frac{\rho_0 \Pi W_0^2}{\varepsilon}, \quad t = \frac{\varepsilon a_* \tau}{W_0}, \quad f = f_1 \varepsilon^2, \quad c_0 = \frac{\xi_0 W_0}{\varepsilon^3}, \quad c_1 = \frac{\xi_1 W_0}{\varepsilon^2}$$

Для таких пылевидных грунтов, как лес [3]

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ кгГ/м}^2, \quad c_1^2 / c_0^2 = 0.05, \quad \theta_s = 0.003, \quad \rho_0 = 1.5 \cdot 10^2 \text{ кгсек}^2/\text{м}^4$$



и, следовательно, например, при  $\varepsilon \sim 0.3$ ,  $W_0 \sim 10$  м / сек можно считать, что  $\zeta_0 \sim \zeta_1 \sim \Pi \sim 1$ . Повторяя рассуждения п. 2, получим также оценки  $\alpha \sim W \sim U \sim \tau \sim \mu_2 \sim 1$ . Тогда уравнения движения внедряющегося тела запишутся в виде

$$\left[ 1 + \mu_2 \zeta_1 \int_0^{\alpha_0} \frac{2\alpha^3 d\alpha}{W(\alpha)} \right] W \frac{dW}{d\alpha_0} + 2\mu_2 \zeta_1 \alpha_0^3 W + 2\varepsilon \mu_2 \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \Pi \alpha_0^3 = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{dU}{d\alpha_0} - \varepsilon^2 \left[ 2\mu_2 \zeta_1 \int_0^{\alpha_0} \lambda \frac{d\tau(\alpha)}{d\alpha} \alpha^2 d\alpha + f_1 \right] \frac{dW}{d\alpha_0} + 2\varepsilon^2 \mu_2 \zeta_1 \alpha_0^5 \frac{U}{W} = 0, \quad \lambda = \frac{l(\alpha_0) - l(\alpha)}{a_* \varepsilon}$$

$$\left( \lambda \sim 1 \right)$$

$$\frac{d\tau}{d\alpha_0} = \frac{2\alpha_0}{W}, \quad W = 1, \quad U = \frac{U_0}{W_0}, \quad \tau = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0$$

Будем, как и в п. 2, искать решение уравнений (4.2) в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Подставляя (2.3) и (4.2), получим уравнения первого приближения

$$\left[ 1 + \mu_2 \zeta_1 \int_0^{\alpha_0} \frac{2\alpha^3 d\alpha}{W_1(\alpha)} \right] \frac{dW_1}{d\alpha_0} + 2\mu_2 \zeta_1 \alpha_0^3 = 0, \quad \frac{dU_1}{d\alpha_0} = 0 \quad (4.3)$$

$$W_1 = 1, \quad U_1 = U_0 / W_0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0$$

Выберем малый параметр  $\varepsilon$  таким образом, чтобы выполнялось равенство  $\mu_2 \zeta_1 = 2$ . Тогда

$$\left[ W_1 = \exp(-\alpha_0^4), \quad U_1 = U_0 / W_0 \right] \quad (4.4)$$

(при произвольном выборе малого параметра  $\varepsilon$  имеем  $W_1 = \exp(-k\alpha_0^4)$ ,  $k = 1/2\mu_2\zeta_1$ ). Уравнения второго приближения

$$\frac{dW_2}{d\alpha_0} + 4\alpha_0^2 \exp(-2\alpha_0^4) \int_0^{\alpha_0} 4\alpha^3 \exp(2\alpha^4) W_2(\alpha) d\alpha + \gamma_1 \alpha_0^3 = 0$$

$$\frac{dU_2}{d\alpha_0} = 0, \quad \frac{d\tau_2}{d\alpha_0} = 2\alpha_0 \exp(\alpha_0^4) \quad \left( \gamma_1 = 2\mu_2 \left( 1 - \frac{c_1}{c_0} \right) \right) \quad (4.5)$$

$$W_2 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \tau_2 = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0$$

Решение уравнений (4.5) имеет вид

$$W_2 = -\frac{\gamma_1}{4} [2 - (2 + \alpha_0^4) \exp(-\alpha_0^4)], \quad U_2 = 0, \quad \tau_2 = 2 \int_0^{\alpha_0} \alpha \exp(\alpha^4) d\alpha \quad (4.6)$$

Уравнения третьего приближения

$$\frac{dU_3}{d\alpha_0} - \left\{ 2\mu_2 \zeta_1 \frac{U_0}{W_0} \int_0^{\alpha_0} [\tau_2(\alpha_0) - \tau_2(\alpha)] \frac{d\tau_2(\alpha)}{d\alpha} \alpha^2 d\alpha + f_1 \right\} \frac{dW_1}{d\alpha_0} -$$

$$- 2\mu_2 \zeta_1 \frac{U_0}{W_0} \frac{\alpha_0^5}{W_1(\alpha_0)} = 0, \quad U_3 = 0 \quad \text{при } \alpha_0 = 0 \quad (4.7)$$

Таким образом

$$U_3 = -4 \int_0^{\alpha_0} \alpha^2 \exp(-\alpha^4) \left[ 2\mu_2 \zeta_1 \frac{U_0}{W_0} \int_0^{\alpha_2} [\tau_2(\alpha_2) - \tau_2(\alpha)] \frac{d\tau_2(\alpha)}{d\alpha} \alpha^2 d\alpha + f_1 \right] d\alpha_2 -$$

$$- 2\mu_2 \zeta_1 \frac{U_0}{W_0} \int_0^{\alpha_0} \alpha^4 \exp(\alpha^4) d\alpha \quad (4.8)$$

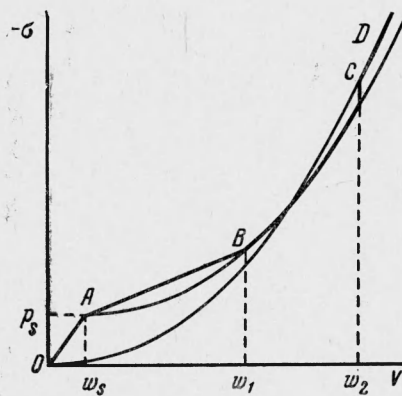
Компоненты силы, действующей на внедряющееся тело, равны

$$P_z = -\frac{mW_0^2}{2\varepsilon a_* \alpha_0} \left[ 4\alpha_0^3 \exp(-2\alpha_0^4) + \varepsilon \exp \alpha_0^4 \left( 4\alpha_0^3 W_2 - \frac{dW_2}{d\alpha_0} \right) \right] \quad (4.9)$$

$$P_x = -\frac{\varepsilon m W_0^2}{2a_* \alpha_0} \left\{ 4\alpha_0^3 \exp(-2\alpha_0^4) \left[ 2\mu_2 \zeta_1 \frac{U_0}{W_0} \int_0^{\alpha_0} [\tau_2(\alpha_0) - \tau_2(\alpha)] \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{d\tau_2(\alpha)}{d\alpha} \alpha^2 d\alpha + f_1 \right] + 2\mu_2 \zeta_1 \frac{U_0}{W_0} \alpha_0^5 \left. \right\}$$

В случае плоской задачи получаются аналогичные выражения.



Фиг. 4

5. При прямом ударе тяжелого ( $\mu_2 \sim \varepsilon^2$ ) цилиндрического тела с пологим затуплением о грунт, рассмотренный в п. 4, можно пренебречь присоединенной массой грунта. Тогда реакция грунта на тело будет однозначно определяться скоростью внедрения. На фиг. 4 показана зависимость напряжений  $\sigma$  на поверхности затупления от скорости внедрения  $V$

$$-\sigma = \rho_0 c_0 V \quad \text{на } OA$$

$$-\sigma = p_s + \rho_0 c_1 V \quad \text{на } AB$$

$$-\sigma = p_s + \frac{\rho_0}{\xi} (V - w_s)^2 \quad \text{на } BC$$

$$-\sigma = \frac{\rho_0}{\xi} V^2 \quad \text{на } CD$$

$$w_s = \frac{p_s}{\rho_0 c_0}, \quad w_1 = \xi c_1 + (1 - \xi) w_s$$

$$w_2 = \xi c_0, \quad \xi = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

Здесь  $\rho_1$  — плотность предельно уплотненного грунта ( $B_1BC$  на фиг. 3).

Следует отметить, что при уменьшении модуля пластичности  $E_1$  скорость  $w_1$  будет приближаться к скорости  $w_s$ . При  $w_1 \leq w_s$  участка  $AB$  (фиг. 4) не будет.

Авторы благодарят Н. В. Зволинского за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 6 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

- Сагомоян А. Я. Проникание заостренных осесимметричных тел в грунты. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 6.
- Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. Изд. МГУ, 1964 г.
- Дидух Б. И. Динамическое взаимодействие трамбующей плиты с уплотняемым грунтом. Инж. физ. ж., 1962, т. 5, № 2.
- Григорян С. С. Об ударном уплотнении лессовых грунтов. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 6.
- Григорян С. С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
- Зволинский Н. В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте. ПММ, 1960, т. 24, вып. I.
- Галин Г. Я. Об условиях на поверхностях сильных разрывов для упругих и пластических сред. ПММ, 1965, т. 19, вып. 3.
- Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформации. ПММ, 1953, т. 17, вып. 4.